Fourierovy řady, cvičení

Funkce $f(x) = \cos x,\ g(x) = \sin x$ jsou periodické s periodou $p =$.

Nechť $k \in N,\ L \in \mathbb{R}^+$, kde L je libovolné, pevné číslo. Pak funkce

$f_k(x) = \cos \dfrac{k\pi x}{L},\ g_k(x) = \sin \dfrac{k\pi x}{L}$ jsou $2L$ - periodické pro každé $k \in N$,

tj. perioda $p = 2L$. Jejich základní (primitivní) perioda je $p = 2\,L/k,\ k \in N$.

Pro každé $k \in N_0$ platí: $\sin k\pi =$, $\cos k\pi =$

$\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{d}x =$

Liché, resp. sudé rozšíření (prodloužení) fce f zadané na intervalu $(0,\, L)$ (příp. s krajními body) vznikne takto:
na intervalu $(-L,\, 0)$ ...

Periodické prodloužení fce f zadané na intervalu $(a,\, b)$ (příp. s krajními body), když perioda je délka daného intervalu: graf funkce f ...

Fourierova (trigonometrická) řada funkce f,

která je $p = 2L$ - periodická a integrovatelná na intervalu $\langle -L,\, L\rangle$,

je funkční řada $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{L} + b_k \sin\frac{k\pi x}{L}\right)$,

kde

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}\,\mathrm{d}x, \qquad k \in N_0,$$

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}\,\mathrm{d}x, \qquad k \in N.$$

Věta o konvergenci: Je-li f funkce $p = 2\,L$ - periodická a po částech hladká na intervalu $\langle -L,\, L\rangle$, pak Fourierova řada konverguje v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, (tj. má součet $s(x)$), a to
a) $s(x) = f(x)$ v každém bodě $x \in \mathbb{R}$, ve kterém je f spojitá
b) $s(x) = \dfrac{1}{2}\,[\,f(x_+) + f(x_-)\,]$, tj. aritmetický průměr limit zprava a zleva funkce f v bodě $x \in \mathbb{R}$, ve kterém f není spojitá.

$\boxed{\textbf{1.}}$ a) Vypočítejte koeficienty a napište Fourierovu řadu 2π -periodické funkce f (tj. $p = 2L = 2\pi$): $f(x) = 1$, $x \in (-\pi,\ 0\rangle$, $\quad f(x) = 0$, $x \in (0,\ \pi\rangle$.

b) Napište součet prvních čtyř nenulových členů této řady.

c) Graficky znázorněte a určete součet $s(x)$ Fourierovy řady dané funkce v [-$\pi, 3\pi$]. Určete hodnoty součtu v bodech $x = -1$, $x = 2\pi$, $x = 15\pi/2$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ a) Vypočítejte koeficienty a napište Fourierovu ***kosinovou*** řadu 4-periodické funkce f, která je definována v intervalu $\langle 0, 2\rangle$ předpisem $f(x) = x + 1$.

b) Napište součet prvních čtyř nenulových členů této řady.

c) Určete součet $s(x)$ Fourierovy řady dané funkce v intervalu $J = [-6, 2]$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ a) Vypočítejte koeficienty a napište Fourierovu ***sinovou*** řadu 4-periodické funkce f, která je definována v intervalu $(0, 2)$ předpisem $f(x) = x + 1$.

b) ... c) Graficky znázorněte a určete součet $s(x)$ Fourierovy řady dané funkce v intervalu $J = [-4, 4]$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ a) Vypočítejte koeficienty a napište Fourierovu ***sinovou*** řadu 2-periodické funkce $f : f(x) = 1 - x$, $x \in (0, 1\rangle$.

b) Napište součet prvních čtyř nenulových členů této řady.

c) Graficky znázorněte a určete součet $s(x)$ Fourierovy řady dané funkce v intervalu $J = [-2, 2]$. Určete hodnoty $s(x)$ v bodech $x = -1, x = 1.5, x = 4$.

Poznámka: Obměna příkladu 1.2.2 z textu [3] od L. Herrmanna.

Doporučení: Načrtněte si graf zadané funkce v intervalu $(0, 1\rangle$, pak rozšíření na lichou funkci v intervalu $\langle -1, 1\rangle$ a pak periodické prodloužení v intervalu $(-2, 2)$ - to vše do jednoho obrázku. Do druhého obrázku si načrtněte graf součtu $s(x)$ na intervalu $[-2, 2]$.

Výsledek: $a_k = 0,\ k \in N_0, \quad b_k = 2\displaystyle\int_0^1 (1 - x)\sin k\pi x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k\pi}$.

Fourierova řada $\displaystyle\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\sin k\pi x$ konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$, a to:

a) ke 2-periodickému lichému rozšíření funkce $f(x) = 1 - x$, $x \in (0, 1)$

b) k hodnotě $s(x) = 0$ v bodech nespojitosti rozšíření funkce f, tj. $x = 2k$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ **Příklad č. 1.1.2** z níže uvedeného textu [3], kde jsou uvedeny i výsledky. Jedná se o případ funkce (tzv. trojúhelníkové vlny), která není sudá ani lichá. Vyžaduje tedy výpočet koeficientu a_0, koeficientů a_k, $k = 1, 2, ..,$ ale též koeficientů b_k, $k = 1, 2, ...$

Literatura:

[1] Herrmann, L.: Fourierovy řady. Nakladatelství ČVUT.

[2] Čipera, S.: Řešené příklady z Matematiky 3. Nakladatelství ČVUT 2008.

[3] Herrmann, L.: Matematika III - příklady ze zkouškových testů. Webové stránky Ústavu technické matematiky pod odkazem Matematika III.