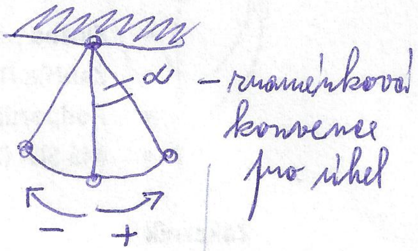
Jak získat fázovou trajektorii ve fázové rovině?

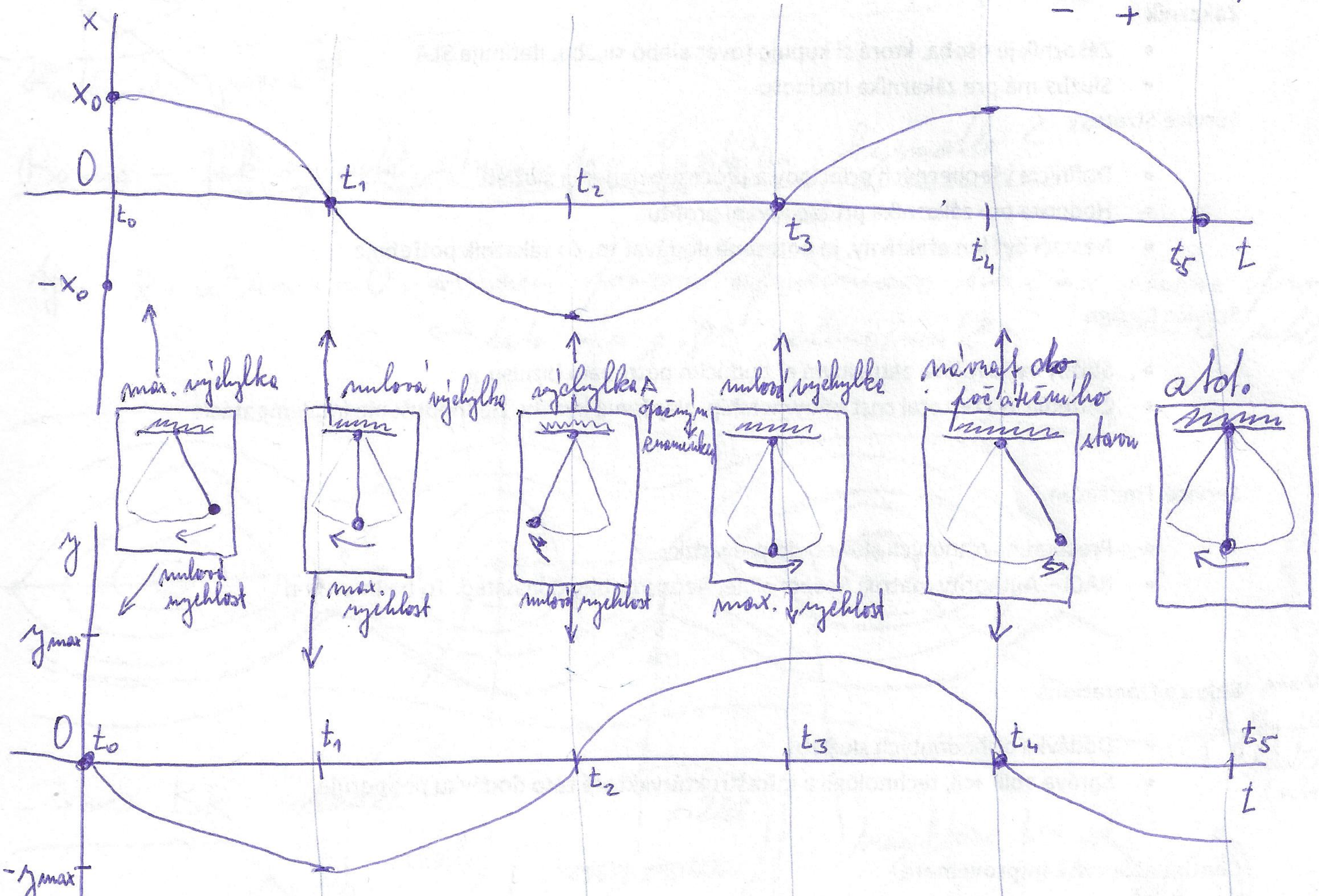
- ilustrativní příklad na matematickém kyvadle

x ~ výchylka (zde měřená v úhlu)

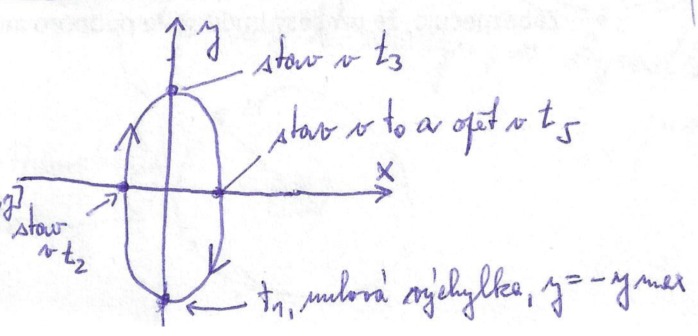
y $(=\dot{x})$ ~ rychlost (zde spíše úhlová rychlost)

- mějme počáteční výchylku, pusťme kyvadlo a nakresleme průběh x a y





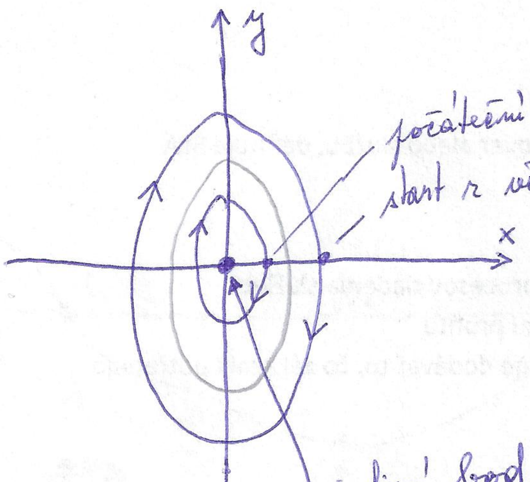
Vezmeme-li oba grafy a budeme vynášet jen souřadnice x na y, tj. body $[x,y]$ dostaneme fázovou trajektorii



Co vyčteme z fázové trajektorie?

- vztah mezi výchylkou a rychlostí
- jestli jsou omezené
- pokud ano, jejich max. hodnoty
- směr pohybu ve fázové rovině (z reálné části vl. čísla od matice A)
- stabilitu bodu rovnováhy

Co kdybychom startovali s menší/větší počáteční výchylkou?



počáteční výchylka menší

start z větší výchylky

tj. stav, který je též řešením a to řešením konst.

jediný bod rovnováhy $[0,0]$ odpovídá nulové počáteční výchylce i rychlosti

Jak získáme tento obrázek z r-ce? (ekvivalence řešení r-ce 2. řádu a soustavy 2x2)

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \iff \begin{vmatrix} x = x \\ \dot{x} = y \end{vmatrix} \iff \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \omega i$

$\hookrightarrow FS = \{\cos \omega t, \sin \omega t\}$

$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0$

$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$

$\dot{x}(t) = -\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t$

$\hookrightarrow x_0 = C_1 \Rightarrow \underline{C_1 = x_0}$

$0 = 0 + \omega C_2 \quad \underline{C_2 = 0}$

$x(t) = x_0 \cdot \cos \omega t$

$(\dot{x}(t) = -x_0 \cdot \omega \cdot \sin \omega t)$

$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega^2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \omega i$

$\lambda_1 = \omega i \rightarrow U_1 = ?$

$\left(\begin{array}{cc|c} -\omega i & 1 & 0 \\ \cancel{-\omega^2} & \cancel{-\omega i} & \cancel{0} \end{array} \right) \Rightarrow U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega i \end{pmatrix}$

$\Phi_1 = Re\left((\cos \omega t + i \sin \omega t) \begin{pmatrix} 1 \\ \omega i \end{pmatrix} \right) = Re \begin{pmatrix} \cos \omega t + i \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t + i \omega \cos \omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -\omega \sin \omega t \end{pmatrix}$

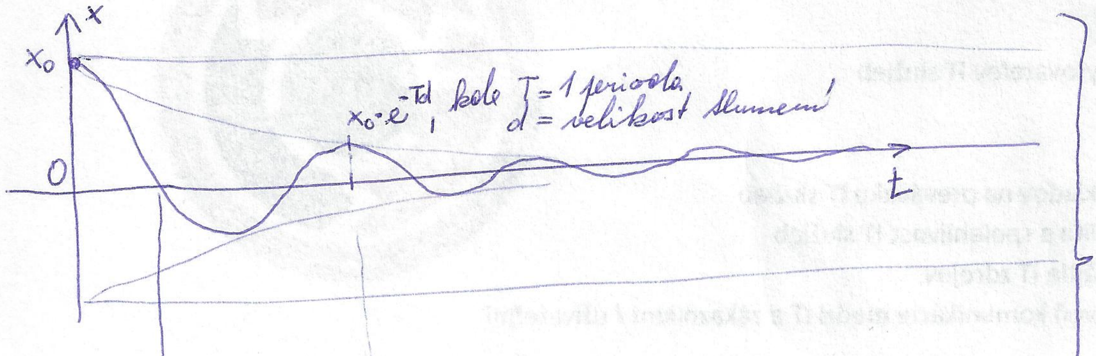
$\Phi_2 = Im(-\|-) = \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ \omega \cos \omega t \end{pmatrix}$

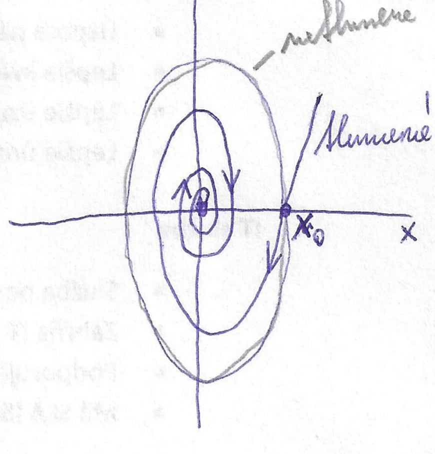
$\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

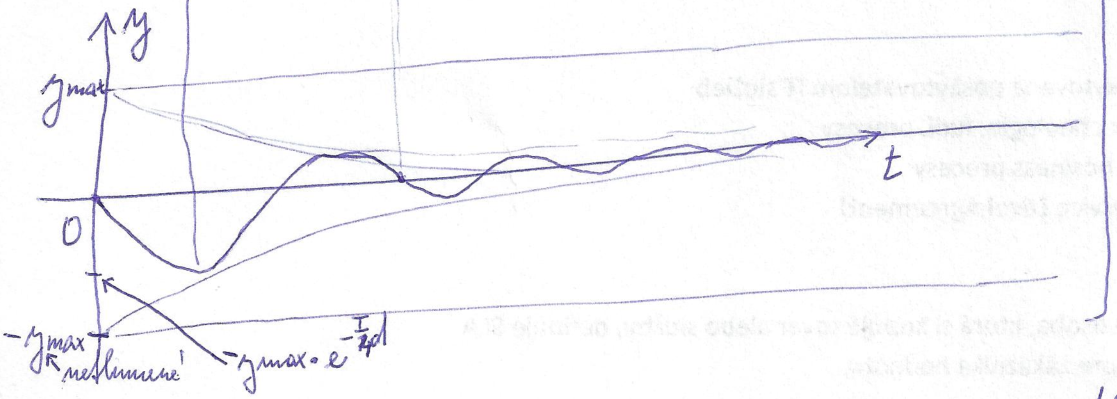
$\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = x_0 \\ C_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -\omega \sin \omega t \end{pmatrix}$

$|y_{max}| = \omega x_0$

Jak se situace změní při přidání tlumení?



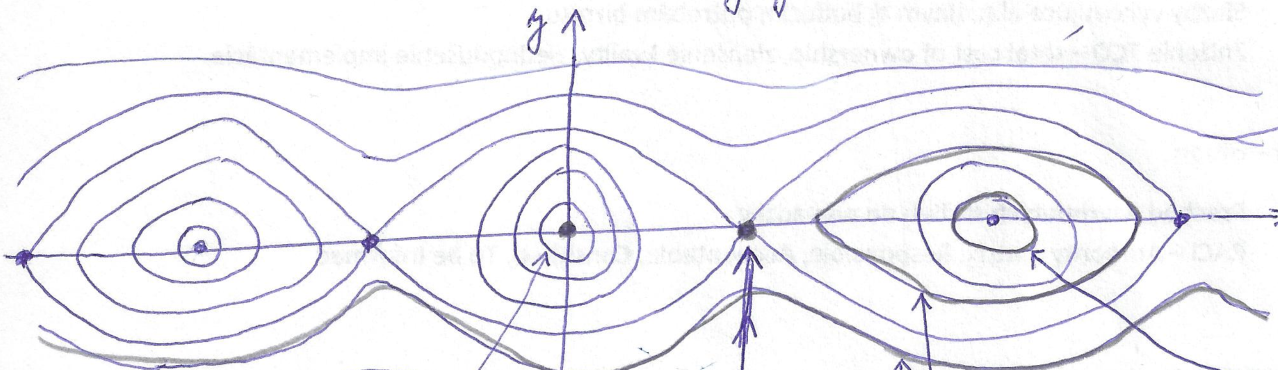




Bonus – Jak vypadá situace pro fyzikální kyvadlo?

tj. $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$ ← není použita aproximace $\sin x \doteq x$ platná pro malé úhly

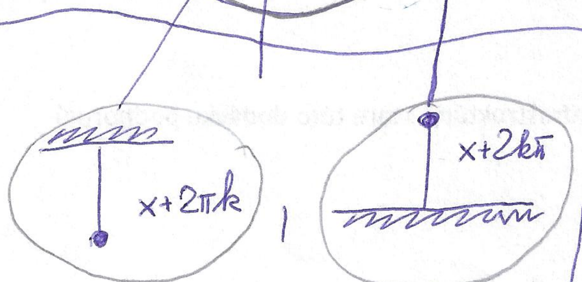
← tato r-ce je již nelineární!

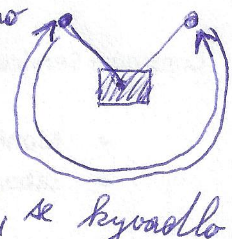


pro malé výchylky přibližně kružnice (nebo elipsa)

trajektorie pro

– +∞ BR





při určité energii, se kyvadlo začne protáčet!

– hezké vysvětlení viz:

en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_(mathematics)#Examples