Matematika II – přednáška 7

Co bude dneska?

Implicitní funkce definovaná rovnicí $F(x, y) = 0$, vlastnosti a použití.

P.S.: Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese
$http://marian.fsik.cvut.cz/\tilde{}neustupa/M2\_Neu\_prednaska07.pdf$
(pro osobní potřeby, nenahrazuje skripta).

Funkce zadaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$

Co je to explicitní funkce, co je to implicitní funkce. → y jako f-ce od x je zadané „skrytě“

Příklady na tabuli. $x^2 - y + 1 = 0$

$x^2 = y - 1 \longrightarrow \boxed{y(x) = x^2 + 1}$

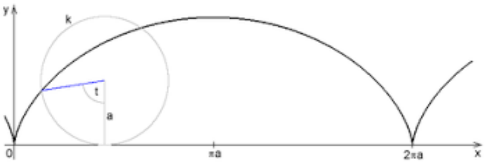
$y^2 + xy + 5 = 0 \longrightarrow \boxed{y(x) =}$

$F(x,y) = 0$

$y^5 - 5xy + y^3/3 - 10x = 0 \longrightarrow y(x) = ?$

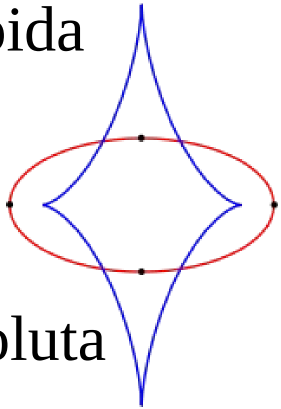
$\sqrt{y^3 + 5xy} - 10 = 0 \quad y(x) \quad \times$ nelze

Motivace = popis (složitých) křivek

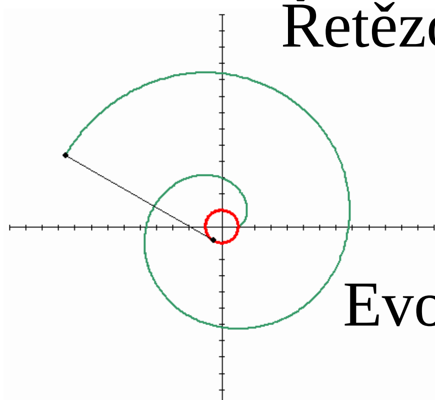


Cykloida

Řetězovka



Evoluta



Evolventa

Další známé křivky viz např. Srdcovka, Astroida, Descartův list, atd=pdf…

Funkce zadaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$

Co je to explicitní funkce, co je to implicitní funkce.

Příklady na tabuli.

Obecně můžeme psát

$$F(x, y) = 0,$$

kde F je spojitá funkce dvou proměnných.

Otázka je: *Je touto rovnicí jednoznačně definována nějaká funkce* $y = f(x)$*? Pokud ano, jakou má derivaci?*

Funkce zadaná implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$

Co je to explicitní funkce, co je to implicitní funkce.

Příklady na tabuli.

Obecně můžeme psát

$$F(x, y) = 0,$$

kde F je spojitá funkce dvou proměnných.
Otázka je: *Je touto rovnicí jednoznačně definována nějaká funkce $y = f(x)$? Pokud ano, jakou má derivaci?*

Pokud je odpověď ano, pak říkáme, že rovnicí $F(x, y) = 0$ je funkce $y = f(x)$ definována implicitně (význam: nevysloveně, skrytě). Funkci $y = f(x)$ pak nazýváme implicitní funkcí.

Věta (o implicitní funkci). *Předpokládejme, že*

a) funkce $F(x,y)$ *má spojité obě parciální derivace v nějakém okolí bodu* $[x_0, y_0]$,

b) $F(x_0, y_0) = 0$, *c)* $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existují čísla $\delta > 0$ *a* $\epsilon > 0$ *a jediná funkce* $y = f(x)$, *definovaná v intervalu* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, *pro kterou platí:*

1. $y_0 = f(x_0)$,
2. $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \; : \; y = f(x) \in (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ *a* $F(x, f(x)) = 0$,
3. *funkce* f *je spojitá a má spojitou derivaci* f' *v intervalu* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,
4. $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \; : \; f'(x) = -\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \Big/ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))$.

Příklady a obrázky

$F(x,y)=0$

$x^3+y^3-2x^2-xy+1=0$; $A=[1,0]$

• $\exists$ impl. zadaná f-ce $y=f(x)$ na okolí bodu A?

VoIF → 3 předpoklady

a) F má spoj. parc. der. na okolí A:

$\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2-4x-y$ → jsou na celém E_2

$\frac{\partial F}{\partial y}=3y^2-x$

b) splňuje A r-ci $F(A)=0$?

$A=[x_0,y_0]$

$F(1,0)=1+0-2-1\cdot 0+1=0=0$ ✓

c) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$

$\frac{\partial F}{\partial y}(1,0)=0-1=-1\neq 0$

splněné všechny předpoklady

Kdy platí: $\exists$ jediná f-ce $y = f(x)$

1) $y_0 = f(x_0)$

2) na malém okolí x_0

$F(x,$

3) $\exists$ spoj. der. f'

4) $f'(x_0) = - \dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$

speciálně $x, y \to x_0, y_0$

$A = [1, 0]$

$y_0 = f(x_0)$

$y = -1(x-1)$

$\exists!\ y = f(x)$, ale ho neznám, dokážu aprox. $T_1(x)$

- $F_x = 3x^2 - 4x - y \big|_A = -1$
- $F_y = 3y^2 - x \big|_A = -1$

$y'(x_0) = f'(x_0) = - \dfrac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} = - \dfrac{-1}{-1} = -1$

$y \approx T_1(x) =$ tečna

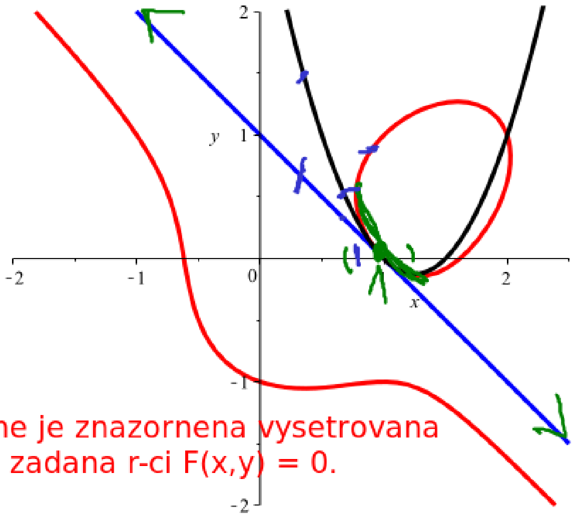
$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 0 - 1(x-1)$

Sb 166 (reseny): Krivka F(x,y)=0, tecna a Tayloruv polynom v okolí bodu A=[1,0]

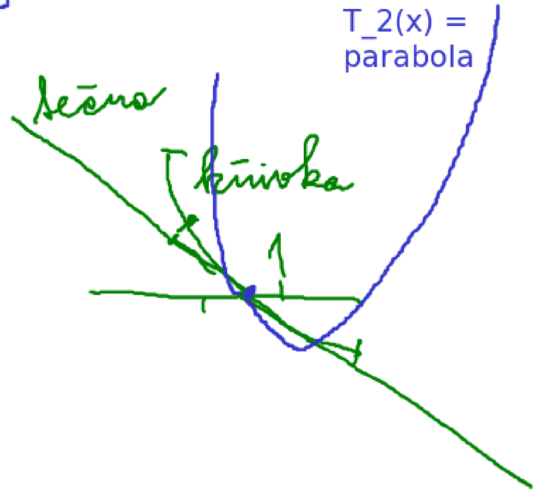
$$x^3 + y^3 - 2x^2 - xy + 1 = 0$$

$$t = 1 - x$$

$$\boxed{T_2(x) = 1 - x + 2\,(x-1)^2} \qquad \textbf{(2)}$$



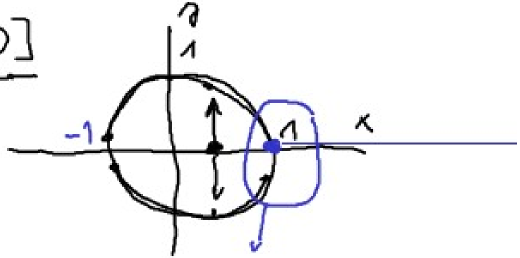
cervene je znazornena vysetrovana
krivka zadana r-ci F(x,y) = 0.



f''(x_0) rozhoduje o tom, jestli
graf f(x) lezi pod nebo nad grafem f-ce

Př.:

$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$; $A = [1,0]$



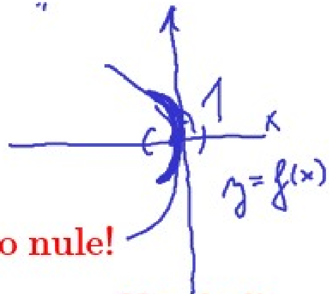
$y^2 = 1 - x^2$

$y = \pm\sqrt{1-x^2}$

a) $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y$ ✓

b) $F(1,0) = 1 - 0 - 1 = 0$ ✓

c) $\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 2y\Big|_{y=0} = 0 = 0$ X Rovno nule!



Na okolí x=1 nelze popsat jako y=f(x)

↳ 4) $y' = f'(x_0) = -\frac{F_x(A)}{F_y(A)}$, $F_y(A) \neq 0$

Věta (o implicitní funkci). *Předpokládejme, že*

a) funkce $F(x,y)$ *má spojité obě parciální derivace v nějakém okolí bodu* $[x_0,y_0]$,

b) $F(x_0,y_0)=0$, *c)* $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$.

Pak existují čísla $\delta>0$ *a* $\epsilon>0$ *a jediná funkce* $y=f(x)$, *definovaná v intervalu* $(x_0-\delta,x_0+\delta)$, *pro kterou platí:*

1. $y_0=f(x_0)$,
2. $\forall\, x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\ :\ y=f(x)\in(y_0-\epsilon,y_0+\epsilon)$ *a* $F(x,f(x))=0$,
3. *funkce* f *je spojitá a má spojitou derivaci* f' *v intervalu* $(x_0-\delta,x_0+\delta)$,
4. $\forall\, x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\ :\ f'(x)=-\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))\Big/\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))$.

Zamyšlení, odkud plyne tvrzení 4. (první a případně druhá derivace)

Odvození 4. tvrzení (= vzoreček)

$$f'(x) = -\frac{\partial_x F(x,y)}{\partial_y F(x,y)}$$

~~Poznámka, co to vlastně znamená geometricky~~?

$$F(x, y(x)) = 0 \quad / \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d f(x)}{dx} = f'(x)$$

$$\frac{dF}{dx}(x, f(x)) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot f'(x) = 0$$

$$f'(x) = \frac{-\partial_x F}{\partial_y F}$$

Odvození f''(x) viz skripta

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0. \tag{I.7.5}$$

Vyjádříme-li odtud y' a uvědomíme-li si, že $y = f(x)$ a $y' = f'(x)$, dostaneme žádaný vzorec. Použijeme-li zjednodušené označení

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad F_y = \frac{\partial F}{\partial y},$$

můžeme vzorec zapsat ve tvaru

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}, \tag{I.7.6}$$

kde y' je uvažováno v bodě x a F_x a F_y v bodě $[x, f(x)]$.

Obdobným způsobem lze získat i vyjádření druhé derivace funkce $y = f(x)$. Předpokládejme, že funkce F má spojité druhé parciální derivace. Rovnici (I.7.5) derivujeme ještě jednou podle x. Označujeme-li pro jednoduchost parciální derivace funkce F i nadále pouze indexy, obdržíme:

$$F_{xx} + F_{yx}\, y' + F_{xy}\, y' + F_{yy}\, y'^2 + F_y\, y'' = 0.$$

Využijeme-li rovnosti $F_{xy} = F_{yx}$ (viz věta I.5.12) a dosadíme-li sem vyjádření y' z (I.7.6), dostaneme:

$$y'' = f''(x) = -\frac{F_{xx}\, F_y^2 - 2F_{xy}\, F_x\, F_y + F_{yy}\, F_x^2}{F_y^3},$$

kde y'' je uvažováno v bodě x a všechny derivace funkce F v bodě $[x, f(x)]$. Tuto formuli si nemusíte pamatovat. Je však dobré si pamatovat postup, který k ní vede. To znamená, že rovnici (I.7.3) derivujeme dvakrát podle x a poté vyjádříme y''.