Matematika II – přednáška 20

Co bude dneska?

Výpočet potenciálu. Více postupů, hodí se v jiných situacích.

Použití potenciálu v příkladech.

Tyto slidy jsou na adrese
$http://marian.fsik.cvut.cz/\tilde{}neustupa/M2\_Neu\_prednaska20.pdf$
(pro osobní potřeby).

Shrnutí co bylo minule

- Potenciální vektorové pole. Vlastnosti, souvislost s nezávislostí křivkového integrálu na integrační cestě.

- Nutná a postačující podmínka pro to, aby vektorové pole bylo potenciální.

Potenciální pole - opakování

Definice (Potenciální vektorové pole.). Vektorové pole $\mathbf{f}$ v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$ ($k = 2$ nebo $k = 3$) nazýváme *potenciální pole* v D, jestliže existuje skalární pole (= skalární funkce) φ v D takové, že

$$\mathbf{f} = \operatorname{grad} \varphi$$

v D. Skalární funkci φ nazýváme *potenciál* vektorového pole $\mathbf{f}$ v D.

Věta. *Je-li $\mathbf{f}$ potenciální a spojité vektorové pole v oblasti D, φ je potenciál $\mathbf{f}$ v D a C je křivka v D, pak*

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \varphi(k.b.\,C) - \varphi(p.b.\,C).$$

Potenciální pole - opakování

V.1.6.

Věta. f *je potenciální vektorové pole v oblasti* D $\Leftrightarrow$ *Křivkový integrál vektorové funkce* f *nezávisí v* D *na integrační cestě.* $\Leftrightarrow$ Cirkulace $\vec{f}$ po uzavřené křivce $= 0$ v D.

Potenciální pole v $\mathbf{E}_2$

Věta (Potenciální pole v $\mathbb{E}_2$ – NUTNÁ podmínka.). *Nechť*

Nechť $\mathbf{f}$ *je potenciální pole v* D.

Pak $\mathbf{f} = (U, V)$ *je vektorové pole v* D*, jehož souřadnicové funkce* U *a* V *mají v* D *spojité parciální derivace a splňují podmínku:*

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0. \quad \text{v } D. \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}$$

Tj. máme

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \text{v } D. \; ?$$

NEplatí. Pak **f** není potenciální.

ANO, platí. Pak **f** může ale nemusí být potenciální.

$f = \operatorname{grad} \varphi$

$(U, V) = (\partial_x \varphi, \partial_y \varphi)$

$\partial_y U = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$

$\partial_x V = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$

Př.:

$$\vec f = (\underbrace{x+y}_{u},\ \underbrace{x^2-y^2}_{v})$$ je potenciální v E_2?

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2) = 2x$$ $\Rightarrow$ není potenciální

$$\neq$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

$$\vec f = (\overset{u}{2x-y^2},\ \overset{v}{3-2xy})$$ — || — v E_2?

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$$ $\Rightarrow$ musí, ale nemusí! Tj: zatím nevím.

$$\parallel$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

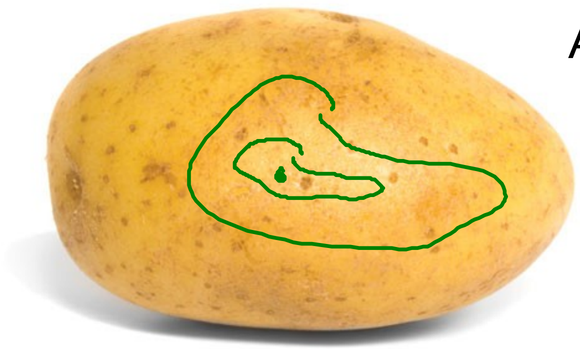
$\underbrace{E_2 \text{ je jednoduše souvislá oblast}}$

$\vec f$ je potenciální pole.

Jednoduše souvislá oblast

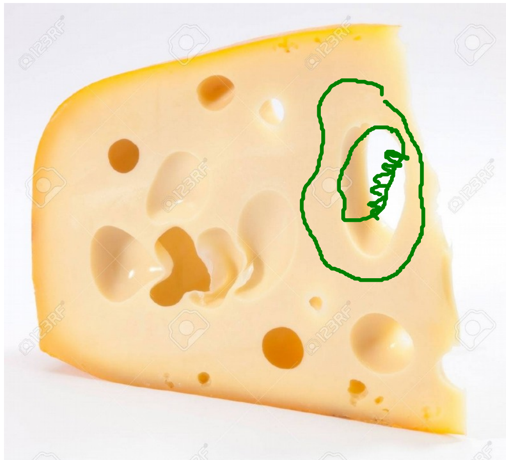
nebo též v E2

Definice (Jednoduše souvislá oblast v E_3.). Oblast $D \subset \mathbb{E}_3$ nazýváme *jednoduše souvislou*, pokud každou uzavřenou křivku C v D můžeme spojitě změnit (stáhnout) v bod v D, aniž přitom kdykoliv oblast D opustíme.



ANO

NE



Potenciální pole - opakování

Věta. $\mathbf{f}$ *je potenciální vektorové pole v oblasti* D $\Leftrightarrow$ *Křivkový integrál vektorové funkce* $\mathbf{f}$ *nezávisí v* D *na integrační cestě.*

Věta (Potenciální pole v $\mathbb{E}_2$ – postačující podmínka.). *Nechť*

a) *D je jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{E}_2$ a*

b) *$\mathbf{f} = (U, V)$ je vektorové pole v D, jehož souřadnicové funkce U a V mají v D spojité parciální derivace a splňují podmínku:*

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \text{v } D.$$

Pak $\mathbf{f}$ je potenciální pole v D. $\Rightarrow$ přes Green. V.

Potenciální pole v $\mathbf{E}_2$

Věta (Potenciální pole v $\mathbb{E}_2$ – postačující podmínka.). *Nechť*

a) *D je jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{E}_2$ a*

b) *$\mathbf{f} = (U, V)$ je vektorové pole v D, jehož souřadnicové funkce U a V mají v D spojité parciální derivace a splňují podmínku:*

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad v\,D.$$

Pak $\mathbf{f}$ je potenciální pole v D.

Tj. máme

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad v\,D.$$

?

→ **NE**. Pak **f** není potenciální.

→ **ANO.** ***Je D jednoduše souv. oblast?***

→ **NE, f** není v D potenciální.

→ **ANO, f** je v D pot.

Metody nalezení potenciálu potenciálního vektorového pole

Na tabuli. 0) ověření post. podmínky

Metoda 1

$\vec{f} = \operatorname{grad} \varphi$

$U = \partial_x \varphi$

$V = \partial_y \varphi$

$\Rightarrow$ a) $\tilde{\varphi}_1(x,y) = \int \partial_x \varphi \, dx = \int U(x,y)\, dx + C(y)$

$\tilde{\varphi}_2(x,y) = \int \partial_y \varphi \, dy = \int V(x,y)\, dy + C(x)$

b) porovnáním kandidátů $\tilde{\varphi}_1$ a $\tilde{\varphi}_2$ určím $C(x)$ a $C(y)$ $\longrightarrow \varphi(x,y)$.

$$\vec{f} = (2x - y^2,\ 3 - 2xy)$$

a) $u = 2x - y^2 \longrightarrow \tilde{\varphi}_1 = \int u\,dx = \int 2x - y^2\,dx = x^2 - y^2 x + C(y)$

$V = 3 - 2xy \longrightarrow \tilde{\varphi}_2 = \int V\,dy = \int 3 - 2xy\,dy = 3y - \cancel{2}x\frac{y^2}{\cancel{2}} + C(x)$

b) porovnání $\tilde{\varphi}_1$ a $\tilde{\varphi}_2$

$$\varphi(x,y) = \tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2$$

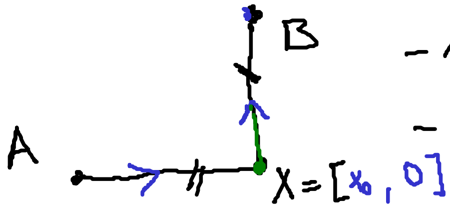
$$c \cdot x^2 - \cancel{y^2 x} + \boxed{C(y)} = \boxed{3y + c} - \cancel{xy^2} + C(x)$$

$C(x) = x^2 + c$

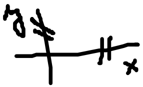
$C(y) = 3y + c$

$$\varphi(x,y) = x^2 - y^2 x \underbrace{+ 3y}_{C(y)} \underbrace{+ C}$$

Metoda 2 (založená dk V.1.6)



- volím body A a B libovolně, ale pevně
- pak počítám křivk. int. z $\vec{f}$ na úsečkách // se SS
- typicky $A=[0,0]$, $B=[x_0,y_0]$ $\Rightarrow \varphi(x_0,y_0)$.



$\vec{f}$: $U = 2x - y^2$

$V = 3 - 2xy$

$\cancel{\int_{AX} (2x-y^2)\,dx + (3-2xy)\,dy}$

a) $I_1 = \int_A^X \vec{f}\cdot d\vec{s} = \left|\begin{array}{l} \text{úsečka } AX: \\ p(t): \; x = 0 + t \\ \qquad\;\; y = 0 \\ \dot{p}(t) = (1,0) \\ t \in \langle 0, x_0 \rangle \end{array}\right| = \int_0^{x_0} (2t - 0^2, 3 - 2t0)\cdot(1,0)\,dt$

$= \int_0^{x_0} 2t + 0\,dt = [t^2]_0^{x_0} = x_0^2$

$\int_A^B \vec{f}\cdot d\vec{s} = I_1 + I_2$

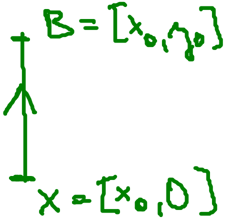
$\Updownarrow$

$(1,0)\,dt = \dot{p}(t)\,dt = (dx, dy)$

$dt = dx \qquad dy = 0$

b) $I_2 = \int_{\overline{XB}} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \left| \begin{array}{l} \text{param. úsečky } \overline{XB} \\ P(t): \begin{array}{l} x = x_0 \\ y = 0 + t \end{array} \\ t \in \langle 0, y_0 \rangle \\ \dot{P}(t) = (0,1) \end{array} \right| = \int_0^{y_0} (\cancel{2x_0 t^2}, 3-2x_0 t)\cdot \underbrace{(0,1)}_{\equiv} \, dt$

$= \int_0^{y_0} 3 - 2x_0 t \, dt = \left[3t - 2x_0 \frac{t^2}{2}\right]_0^{y_0} = 3y_0 - x_0 y_0^2$



$= \int_{\overline{XB}} \cancel{(2x - y^2)dx} + (3 - 2xy)dy =$

c) $\int_A^B \vec{f}\cdot d\vec{s} = I_1 + I_2 = x_0^2 + 3y_0 - x_0 y_0^2$

$\left(\varphi(B) - \varphi(A) \right)$

$\varphi(B) = \varphi([x_0, y_0])$

d) $[x_0, y_0] \to [x, y]$

$\varphi(x,y) = x^2 + 3y - xy^2 + C$

Metoda 3 (viz M3)

$$U = \partial_x \varphi \implies \tilde{\varphi}_1 = \int U\,dx + C(y)$$

$$V = \partial_y \varphi \qquad \tilde{\varphi}_2 = \int V\,dy + C(x)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial y} = V \implies C'(y) = \ldots\ldots \implies C(y)$$

Př.:

$$U = (2x - y^2) \implies \tilde{\varphi}_1(x,y) = \int U\,dx = \int 2x - y^2\,dx = \underline{x^2 - xy^2 + C(y)}$$

$$V = (3 - 2xy)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial y} = 0 - \cancel{2xy} + C'(y) = V = 3 - \cancel{2xy}$$

$$C'(y) = 3 \implies C(y) = \int C'(y)\,dy = \int 3\,dy = 3y + C \qquad \boxed{\varphi = x^2 - xy^2 + 3y + C}$$

Pr.:

$\vec{f}$: $u = \frac{3}{4}x^2y^2 + 2x$ $\longrightarrow$ a) $\varphi(x,y) = ?$

$V = \frac{1}{2}x^3y + y^2$ b) $\int_{[0,-2]}^{[2,2]} \vec{f} \cdot d\vec{s} = ?$

$$\tilde{\varphi}_1(x,y) = \int u\,dx = \int \frac{3}{4}x^2y^2 + 2x\,dx = \frac{\cancel{3}}{4}y^2\frac{x^3}{\cancel{3}} + x^2 + C(y)$$

$$V = \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial y} = \cancel{\frac{1}{4}x^3 \cdot 2y} + 0 + C'(y) = \cancel{\frac{1}{2}x^3y} + y^2$$

$$C(y) = \int C'(y)\,dy = \int y^2\,dy = \frac{y^3}{3} + C$$

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}y^2x^3 + x^2 + \frac{y^3}{3} + C$$

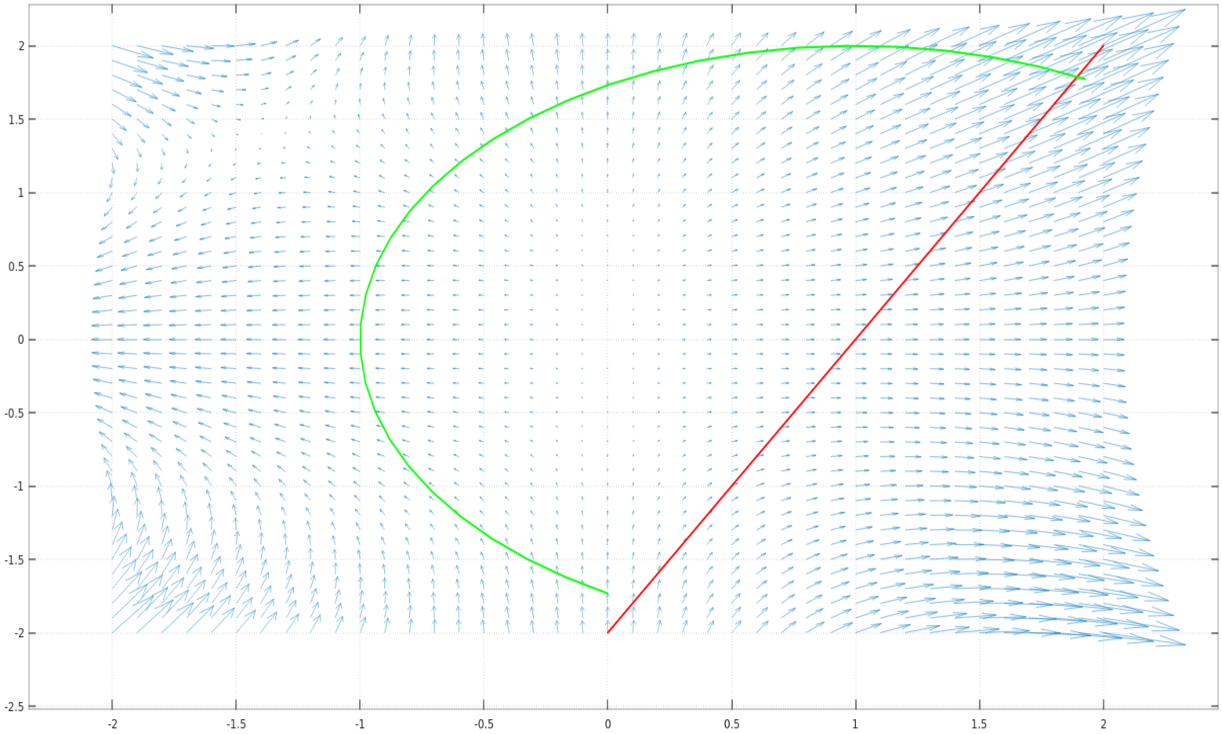
b)

$$I = \varphi(2,2) - \varphi(0,-2) = \frac{1}{\cancel{4}}\cancel{4} \cdot 8 + 4 + \frac{1}{3} \cdot 8 + C - \left(0 + 0 - \frac{8}{3} + C\right)$$

$$= 12 + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{52}{3}$$

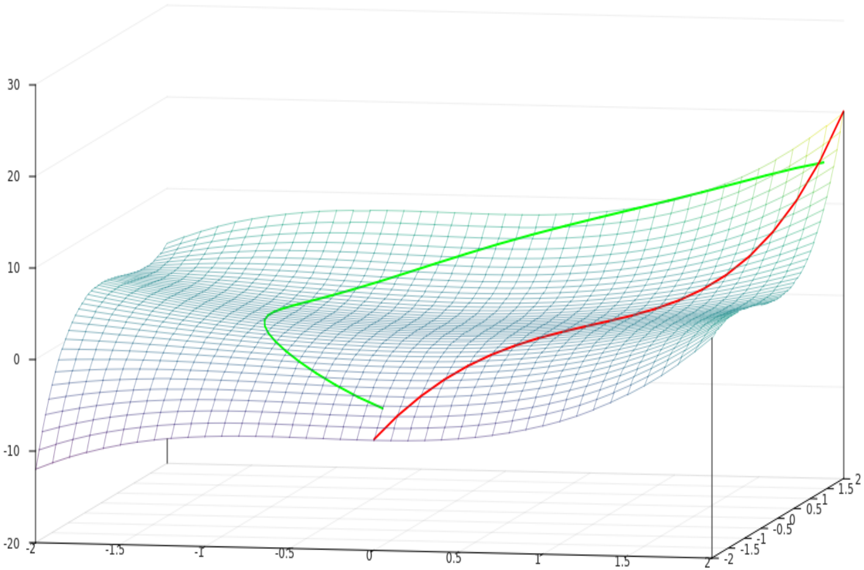
Pr.:

f = (3/4*x^2*y^2+2x, 1/2*x^3*y+y^2); prace mezi body A = [0, -2] a B = [2, 2]?



zobrazeni vektoroveho pole, jak pusobi v kazdem bode v okoli pocatku souradnic

pole f je potencialni
zobrazeni nalezeneho potencialu a zvyrazneni pohybu po primce a kruznici mezi body A a B; vysledna prace je stejna :)



Křivkový integrál skalární funkce.

Křivkový integrál vektorové funkce.

Křivkový integrál vektorové funkce přes uzavřenou křivku. Greenova Věta.

Potenciální vektorové pole, nalezení potenciálu a aplikace na výpočet křivkového integrálu.

Na tabuli příklady.