Matematika II – přednáška 1

Kontakty, konzultace a Plán přednášek a Doporučená literatura

Informace na internetu na adrese ”fs.cvut.cz”

- v záložce ”Fakulta”vybrat ”Ústavy a vědecká pracoviště”

- vybrat ”12101 ÚTM”- přejít na interní webové stránky

- tam se najdou všechny informace o předmětu.

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php
Slidy nenahrazují skripta ani zápisky ani účast na přednášce a jsou pouze pro osobní potřeby.

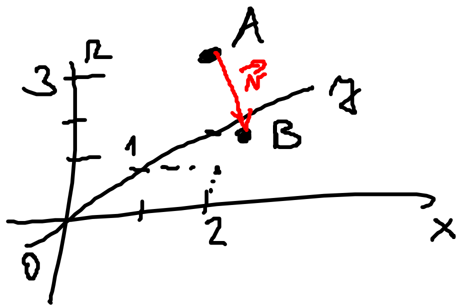
Euklidův prostor $\mathbb{E}_n$. Body a množiny v $\mathbb{E}_n$

Nechť je n přirozené číslo, množinu všech n-tic reálných čísel označujeme $\mathbb{R}^n$ a nazýváme *n-rozměrný aritmetický prostor*.

Prvky $\mathbb{R}^n$ nazýváme *body*.

Body označujeme velkými písmeny a jejich souřadnice píšeme v hranatých závorkách.

$A = [2, 1, 3]$ $\quad$ $B = [1, 2, 0]$



$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 1, -3)$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{11}$

$\|B - A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}$

Euklidův prostor $\mathbb{E}_n$. Body a množiny v $\mathbb{E}_n$

Nechť je n přirozené číslo, množinu všech n-tic reálných čísel označujeme $\mathbb{R}^n$ a nazýváme *n-rozměrný aritmetický prostor*.

Prvky $\mathbb{R}^n$ nazýváme *body*.

Body označujeme velkými písmeny a jejich souřadnice píšeme v hranatých závorkách.

Jestliže definujeme vzdálenost dvou bodů (na tabuli)
Stává se z $\mathbb{R}^n$ tak zvaný *n-rozměrný Euklidův prostor*. Který označujeme $\mathbb{E}_n$.

Za počátek souřadného systému uvažujeme bod $O = [0, 0, \ldots 0]$.

Příklady z M1: $\mathbb{E}_1$ přímka, $\mathbb{E}_2$ rovina, $\mathbb{E}_3$ prostor (3D).

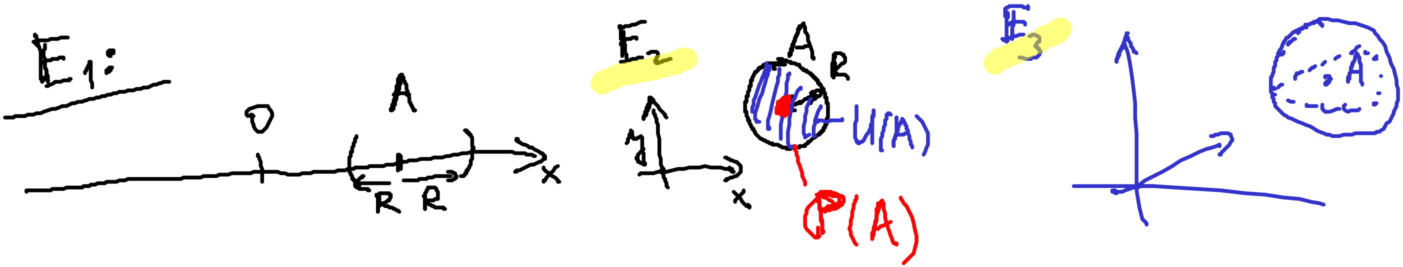
Připomenutí, vektor a délka vektoru.

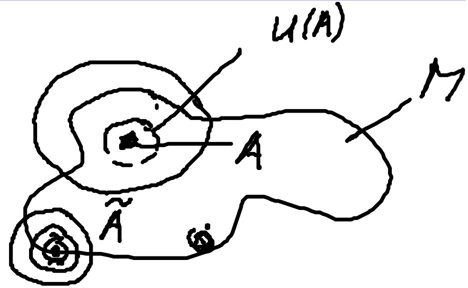
Okolí bodu v $\mathbb{E}_n$. Prstencové okolí bodu v $\mathbb{E}_n$

na tabuli

$$U_R(A) = \{X \in \mathbb{E}_n \mid \|X - A\| < R\}$$

$$P(A) = \{X \in \mathbb{E}_n \mid 0 < \|X - A\| < R\}$$
$$= U(A) \setminus \{A\}$$





Okolí bodu v $\mathbb{E}_n$. Prstencové okolí bodu v $\mathbb{E}_n$

na tabuli

Vnitřní bod množiny. Hraniční bod množiny

na tabuli

Bod A je —||— M, pokud $\exists$ okolí $U(A)$, že $U(A) \subset M$.

Bod A je —||— M, pokud v každém ($\forall U(A)$) jeho okolí $U(A)$
je alespoň 1 bod z mn. M
a alespoň 1 bod, který do M nepatří!

Okolí bodu v $\mathbb{E}_n$. Prstencové okolí bodu v $\mathbb{E}_n$

na tabuli

Vnitřní bod množiny. Hraniční bod množiny

na tabuli

Vnitřek množiny. Otevřená množina. Hranice množiny.

Uzavřená množina. Omezená množina

na tabuli definice a některé vlastnosti.

Def: $M \in E_n$. Množinu všech vnitřních bodů mn. M nazýváme <u>vnitřkem mn. M</u> a značíme M°.

Def: Množina M je <u>otevřená</u>, pokud $M = M^\circ$.

Def: $M \in E_n$. Množinu všech hraničních bodů mn. M nazveme <u>hranicí M</u>, značíme ∂M.

Def: $M \in E_n$. Uzávěrem mn. M nazveme sjednocení $M \cup \partial M$. Uzávěr mn. M značíme $\overline{M}$.

Def: Množina M je uzavřená, pokud $M = \overline{M}$.

Vlastnosti množin

1) Sjednocení a průnik konečného počtu otevřených mn. je otevřená mn. $\rightarrow$ $M_i = M_i^\circ \Rightarrow M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i$, $M = M^\circ$

2) —||— a průnik —||— uzavřených mn. je uzavřená mn.

9) $M = M^\circ \Leftrightarrow (E_n \setminus M)$ je uzavřená mn.

---

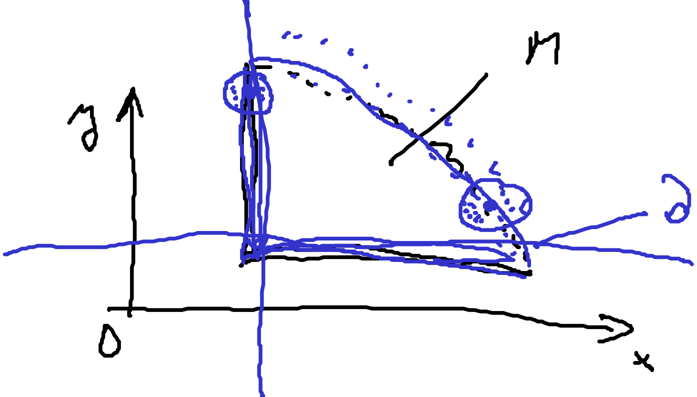
3) Pro každý $A \in M$ platí: a) A je vnitřním bodem
b) A je hraničním —||—.

4) $\partial M = \partial(E_n - M) = \overline{M} \cap \overline{(E_n - M)}$

5) ∂M je uzavřená mn.

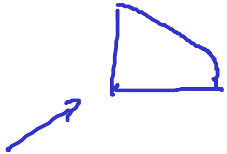
6) $M^\circ = M - \partial M$

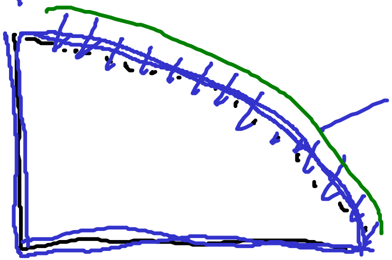
7) $M = M^\circ$ pokud neobsahuje žádný svůj hraniční bod.



$\partial M \notin M$

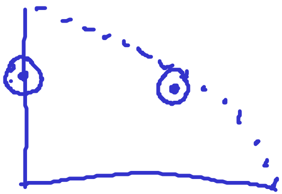
$$M = \{x \in \mathbb{E}_2 \mid x \geq a,\ y \geq b,\ (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}$$





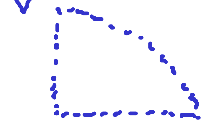
$\overline{M} = M \cup \partial M \neq M$

není uzavřená



$M \neq M^{\circ}$ → není otevřená

$\Downarrow$



Omezenost

Def: Množina $M \subset E_n$ je omezená, pokud $\exists\, U(0)$ taková, že $M \subset U(0)$.

Def: Pokud M není omezená, tak ji nazýváme neomezená.

Souvislost

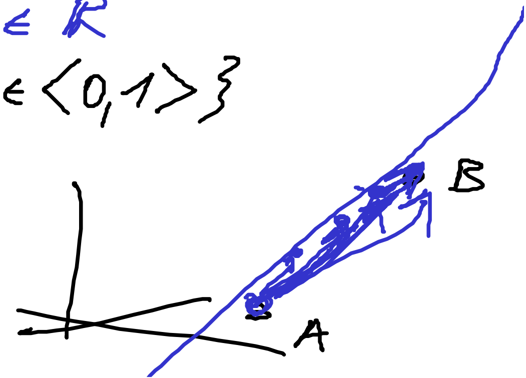
Přímka

Def: Úsečkou v E_n spojující body A a B rozumíme mn.

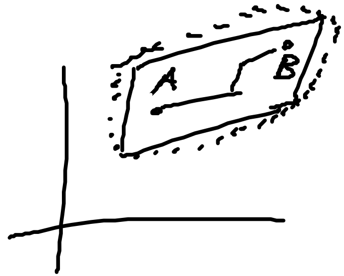
$t \in \mathbb{R}$

$$\{X \in E_n \mid \underline{X = A + t\cdot(B-A)},\ t \in \langle 0,1\rangle\}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + t(b_1 - a_1) \\ x_2 &= \\ x_n &= a_n + t(b_n - a_n) \end{aligned}$$



Def: Nechť $A_1, A_2 \dots A_k$ různých bodů v E_n. Potom sjednocení úseček $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3} \dots \overline{A_{k-1}A_k}$ nazýváme lomenou čárou.



Def: Množinu $D \subset E_n$ a splňuje:

a) otevřená

b) její dva lib. body lze spojit lomenou čárou, která celá leží v D, (souvislost)

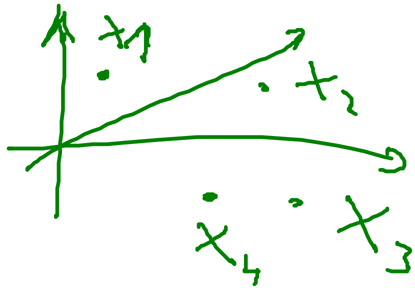
nazýváme **oblastí**.

Posloupnost bodů v $\mathbb{E}_n$ a Limita posloupnosti

Definice (posloupnost). *Každé zobrazení množiny přirozených čísel* $\mathbb{N}$ *do* $\mathbb{E}_n$ *nazýváme* *posloupností* *v* $\mathbb{E}_n$

.

Značíme jako $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ nebo $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ nebo jenom krátce $\{X_k\}$.



Posloupnost bodů v $\mathbb{E}_n$ a Limita posloupnosti

Definice (posloupnost). *Každé zobrazení množiny přirozených čísel* $\mathbb{N}$ *do* $\mathbb{E}_n$ *nazýváme posloupností v* $\mathbb{E}_n$

.

Značíme jako $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ nebo $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ nebo jenom krátce $\{X_k\}$.

Definice (limita posloupnosti v $\mathbb{E}_n$.). *Bod* $A \in \mathbb{E}_n$ *nazýváme limitou posloupnosti* $\{X_k\}$, *jestliže*

$$\lim_{k \to +\infty} \|X_k - A\| = 0.$$

Používáme značení: $\lim_{k \to +\infty} X_k = A,$ $\lim X_k = A$ *nebo pouze* $X_k \longrightarrow A.$

Posloupnost bodů $\{X_k\}$ v $\mathbb{E}_n$, která má v $\mathbb{E}_n$ limitu, se nazývá *konvergentní*. Je-li limitou bod A, říkáme, že posloupnost $\{X_k\}$ *konverguje* k bodu A.

Věta. *Posloupnost bodů $\{X_k\}$ v $\mathbb{E}_n$ může mít nejvýše jednu limitu.*

Úvaha je zde stejná jako pro limitu posloupnosti reálných čísel. Není možné, aby se vzdálenost bodu A blížila k nule vzhledem ke dvěma různým bodům

Věta. *Posloupnost bodů $\{X_k\}$ v $\mathbb{E}_n$ může mít nejvýše jednu limitu.*

Úvaha je zde stejná jako pro limitu posloupnosti reálných čísel. Není možné, aby se vzdálenost bodu A blížila k nule vyhledem ke dvěma různým bodům

Věta. *Nechť $\{X_k\}$ je posloupnost bodů v $\mathbb{E}_n$, přičemž $X_k = [x_{1k}, \ldots, x_{nk}]$. Nechť $A = [a_1, \ldots, a_n] \in \mathbb{E}_n$. Pak*

$$\lim_{k \to +\infty} X_k = A \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{k \to +\infty} x_{ik} = a_i \ \text{ pro všechna } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Věta říká, že limitu je možno počítat ”po souřadnicích”.

Příklady na tabuli

Funkce n proměnných. Definiční obor a zápis funkce

M1:

$$y = f(x)$$

M2:

a) $y = f(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)$

b) vektorová f-ce

$$z = f(x, y)$$

Objem kužele

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = f(r, v)$$

Funkce n proměnných. Definiční obor a zápis funkce

Definice (Funkce n proměnných). *Předpokládejme, že $n \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{E}_n$, $M \neq \emptyset$. Zobrazení f množiny M do $\mathbb{R}$ nazýváme funkcí n proměnných.*

Hodnotami funkce f jsou reálná čísla, proto též hovoříme o reálné funkci n proměnných.

Množinu M nazýváme *definičním oborem* funkce f a značíme ji $D(f)$.

$$D(f) = \{X \in \mathbb{E}_n \mid \underset{f(X)}{f(x_1, \dots, x_n)} \text{ dává smysl}\}$$

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(X),\ X \in D(f)\}$$

Př.: $f(x,y) = \sqrt{x+y^2}$

graf f-ce f: $gr(f) = \{[X, y] \in \mathbb{E}_{n+1} \mid X \in D(f),\ y = f(X)\}$.

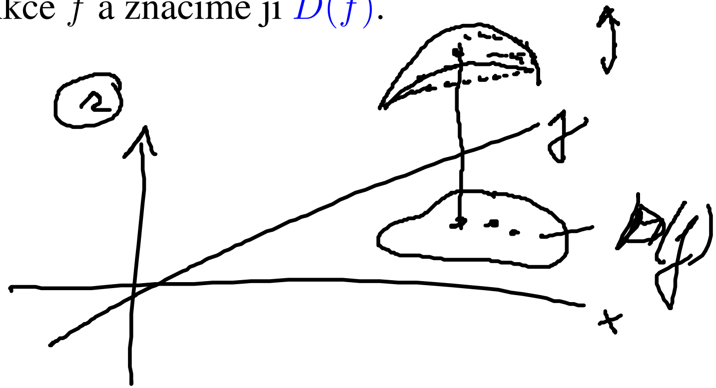
Funkce n proměnných. Definiční obor a zápis funkce

Definice (Funkce n proměnných). *Předpokládejme, že $n \in \mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{E}_n$, $M \neq \emptyset$. Zobrazení f množiny M do $\mathbb{R}$ nazýváme* ***funkcí n proměnných****.*

Hodnotami funkce f jsou reálná čísla, proto též hovoříme o reálné funkci n proměnných.

Množinu M nazýváme *definičním oborem* funkce f a značíme ji $D(f)$.

Obor Hodnot funkce, Graf funkce na tabuli



Příklady na definiční obor funkce na tabuli.

$D(f) \subset \mathbb{E}_2$

$gr(f) \subset \mathbb{E}_3$