Matematika II – přednáška 21

Co bude dneska?

Jednoduchá hladká plocha.

Parametrizace plochy.

Jednoduchá po částech hladká plocha. Uzavřená plocha.

Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese
$http://marian.fsik.cvut.cz/\tilde{\ }neustupa/M2\_Neu\_prednaska21.pdf$
(pro osobní potřeby).

Shrnutí co bylo minule

Výpočet potenciálu.

Použití potenciálu v příkladech.

Potenciální pole - opakování

Definice (Potenciální vektorové pole.). Vektorové pole $\mathbf{f}$ v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$ ($k = 2$ nebo $k = 3$) nazýváme *potenciální pole* v D, jestliže existuje skalární pole (= skalární funkce) φ v D takové, že

$$\mathbf{f} \; = \; \mathrm{grad}\, \varphi$$

v D. Skalární funkci φ nazýváme *potenciál* vektorového pole $\mathbf{f}$ v D.

Věta. *Je-li* $\mathbf{f}$ *potenciální a spojité vektorové pole v oblasti* D*,* φ *je potenciál* $\mathbf{f}$ *v* D *a* C *je křivka v* D*, pak*

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \; = \; \varphi(k.b.\, C) - \varphi(p.b.\, C).$$

Potenciální pole - opakování

Věta. f *je potenciální vektorové pole v oblasti* D $\Leftrightarrow$ *Křivkový integrál vektorové funkce* f *nezávisí v* D *na integrační cestě.*

Věta (Potenciální pole v $\mathbb{E}_2$ – postačující podmínka.). *Nechť*

a) *D je jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{E}_2$ a*

b) f $= (U, V)$ *je vektorové pole v D, jehož souřadnicové funkce U a V mají v D spojité parciální derivace a splňují podmínku:*

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \text{v } D.$$

Pak f *je potenciální pole v D.*

19. a) Napište předpoklady Greenovy věty a ověřte, že jsou splněny pro výpočet cirkulace vektorového pole $\vec{f} = (-y,\, x)$ po záporně orientované křivce $C:\ x^2 + y^2 = 16$, tj. pro výpočet $\oint_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$.
Hodnotu tohoto křivkového integrálu vypočítejte pomocí Greenovy věty.
b) Stejný křivkový integrál vypočítejte bez užití Greenovy věty.
c) Lze na základě vypočtené hodnoty jednoznačně odpovědět, zda dané pole $\vec{f}$ je potenciální v E_2? Odpověď zdůvodněte! [cirkulace je $-32\,\pi$, c) není potenciální, cirkulace by musela být nulová]

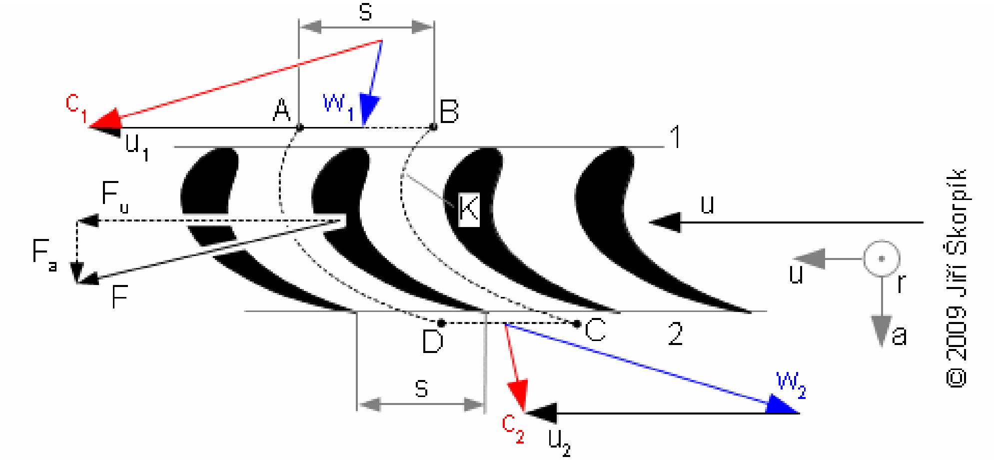
23. a) Pomocí křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (y^2\,,\, 2xy)$ působením po křivce C, což je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $A = [0,0]$ a koncovým bodem $B = [2,4]$.
b) Ověřte, že vektorové pole $\vec{f} = (y^2\,,\, 2xy)$ je potenciální v E_2. Určete potenciál φ tohoto pole a pomocí něho vypočítejte práci z úlohy a). [a) 32, b) potenciál $\varphi(x,y) = xy^2 + konst$]

24. a) Zjistěte, zda vektorové pole $\vec{f} = (2x - y^2, 3 - 2xy)$ je potenciální v $\mathbb{E}_2$. Pokud ano, vypočítejte potenciál φ.
b) Vypočítejte křivkový integrál této funkce $\vec{f}$ po části paraboly $C_1 : x = -y^2 - 1$ od bodu [-1; 0] do bodu [-5; -2].
c) Určete cirkulaci tohoto pole $\vec{f}$ podél kladně orientované křivky $C_2 : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$.
[a) potenciál $\varphi(x,y) = x^2 - xy^2 + 3y + konst$, b) 38, c) nula]

Plošný integrál

Hmotnost věže

Plocha látky

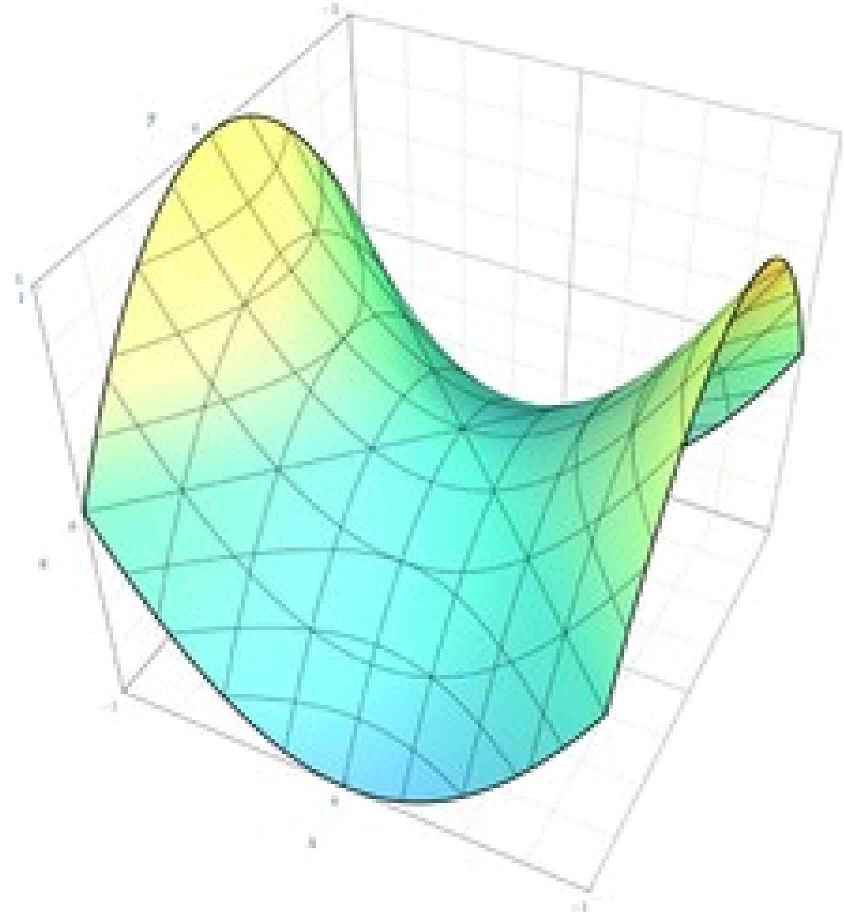


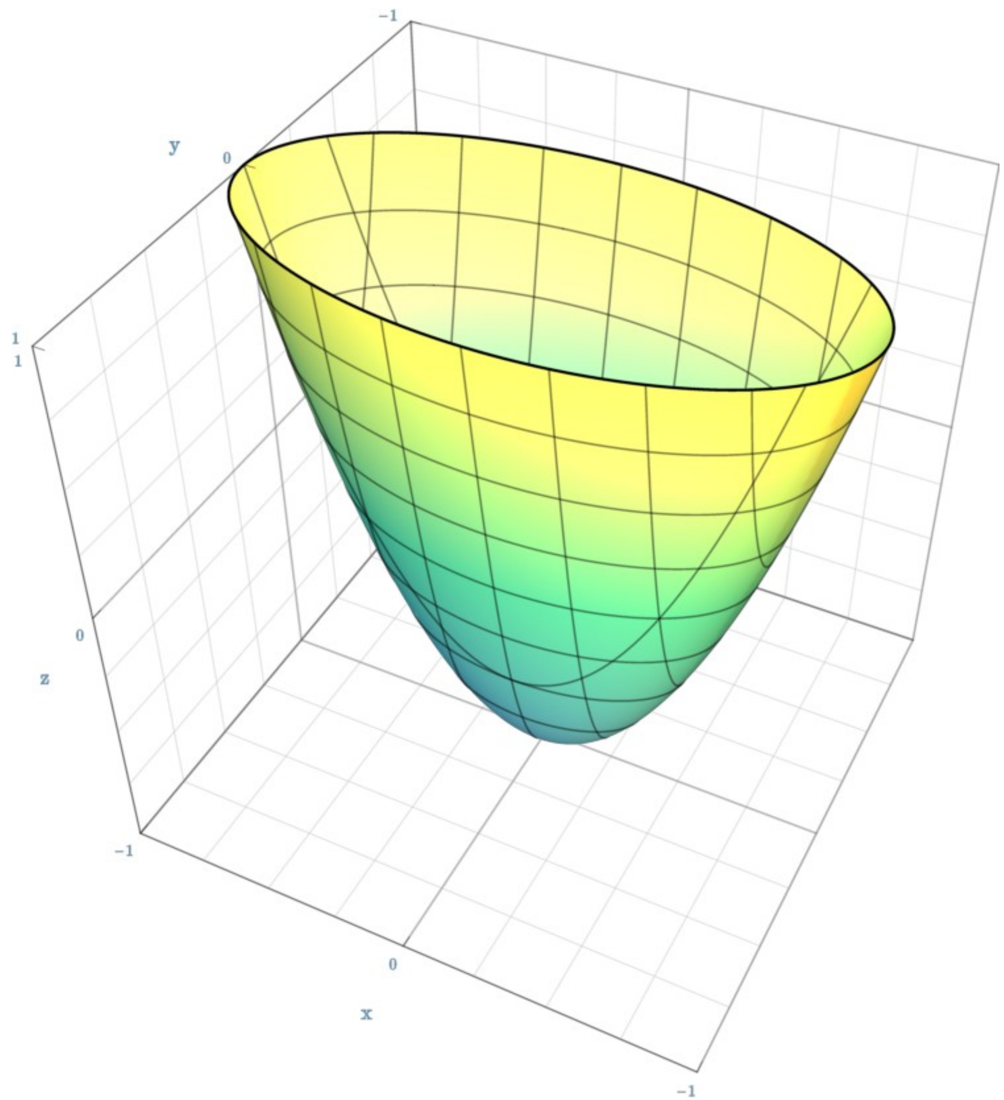
Přenos energie (síla x dráha)

Bilance přítoku a odtoku

Jednoduchá hladká plocha - motivace a značení

Na tabuli - spíše slovně.




−1
y
0
1
1
0
z
−1
0
x
−1

Jednoduchá hladká plocha - motivace a značení

Na tabuli - spíše slovně.

Jak se přeloží slovní požadavky na plochu do matematického zápisu.

$B \subset \mathbb{E}_2$, omezená uzavřenou křivkou Γ. Každý bod B přemístím do prostoru na místo $P(u,v) = \big[\phi(u,v),\ \psi(u,v),\ \vartheta(u,v)\big]$.

Elastické deformace, neporušující hladkost $\rightarrow$ P je spojité zobrazení a má spojité parciální derivace v dostatečně velké podmnožině B.

Neslepovat body $\rightarrow$ P je prosté zobrazení v množině B.

Jednoduchá hladká plocha - motivace a značení

Na tabuli - spíše slovně.

Jak se přeloží slovní požadavky na plochu do matematického zápisu.

$B \subset \mathbb{E}_2$, omezená uzavřenou křivkou Γ. Každý bod B přemístím do prostoru na místo $P(u,v) = \big[\phi(u,v),\, \psi(u,v),\, \vartheta(u,v)\big]$.

Elastické deformace, neporušující hladkost $\rightarrow$ P je spojité zobrazení a má spojité parciální derivace v dostatečně velké podmnožině B.

Neslepovat body $\rightarrow$ P je prosté zobrazení v množině B.

Jednoduchá hladká plocha je obor hodnot zobrazení P. Nazýváme ho parametrizací jednoduché hladké plochy.

Značení parametrizace

$P(u,v) = \big[\phi(u,v),\, \psi(u,v),\, \vartheta(u,v)\big].$

Funkce

$$x = \phi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad z = \vartheta(u,v)$$

nazýváme *souřadnicové funkce* zobrazení P.

Značení parametrizace

$P(u,v) = \big[\phi(u,v),\ \psi(u,v),\ \vartheta(u,v)\big].$

Funkce

$$x = \phi(u,v), \quad y = \psi(u,v), \quad z = \vartheta(u,v)$$

nazýváme *souřadnicové funkce* zobrazení P.

Parciální derivace P podle proměnných u, v budeme označovat P_u, P_v a budeme je považovat za vektory. Můžeme tudíž psát:

$$P_u(u,v) = \left(\frac{\partial\phi(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial\vartheta(u,v)}{\partial u}\right) \quad \text{zkráceně} \quad P_u = \left(\frac{\partial\phi}{\partial u}, \frac{\partial\psi}{\partial u}, \frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right),$$

$$P_v(u,v) = \left(\frac{\partial\phi(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial\psi(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial\vartheta(u,v)}{\partial v}\right) \quad \text{zkráceně} \quad P_v = \left(\frac{\partial\phi}{\partial v}, \frac{\partial\psi}{\partial v}, \frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right).$$

Značení parametrizace

Zobrazení P považujeme za spojité, jestliže všechny jeho souřadnicové funkce jsou spojité.

O zobrazení P říkáme, že má spojité parciální derivace, mají-li všechny souřadnicové funkce spojité parciální derivace.

Značení parametrizace

Zobrazení P považujeme za spojité, jestliže všechny jeho souřadnicové funkce jsou spojité.

O zobrazení P říkáme, že má spojité parciální derivace, mají-li všechny souřadnicové funkce spojité parciální derivace.

Poznámka: Nehrozí-li záměna se značením souřadných os, můžeme místo $\phi(u, v)$, $\psi(u, v)$, $\vartheta(u, v)$ souřadnicové funkce zobrazení P značit i $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$.

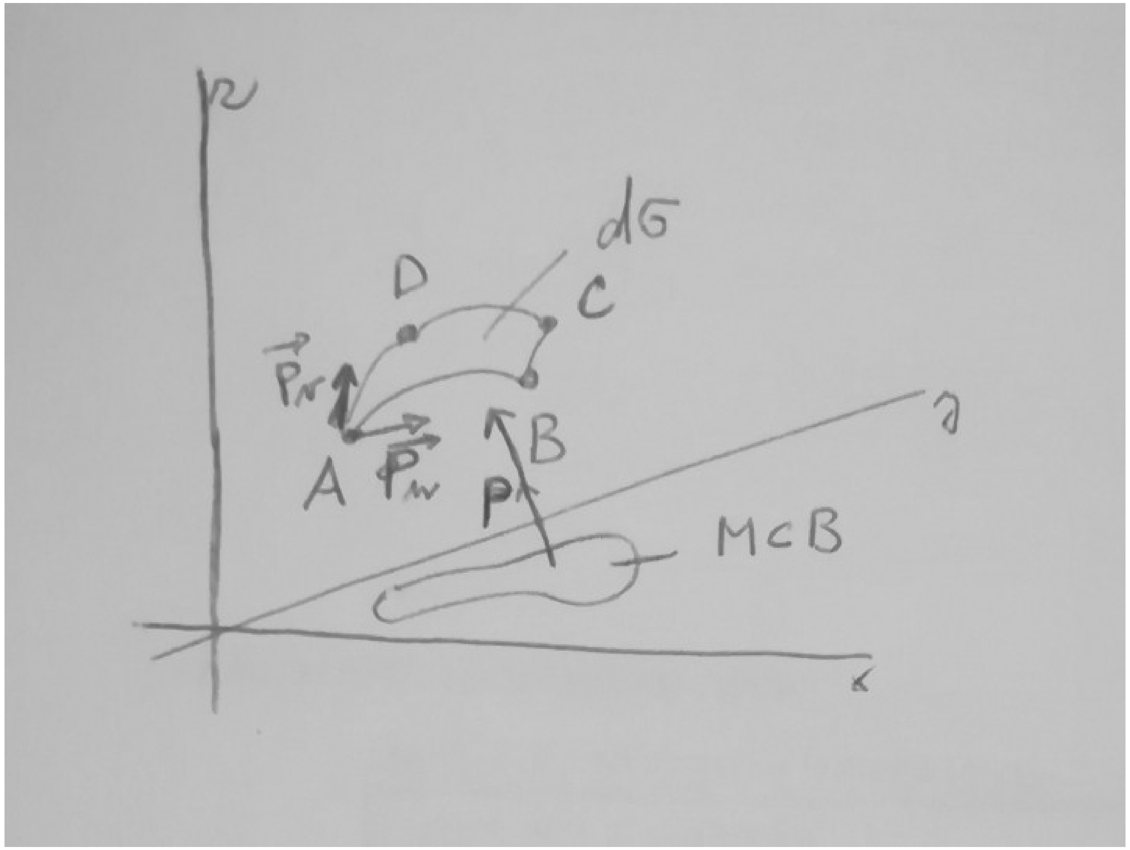
Značení parametrizace

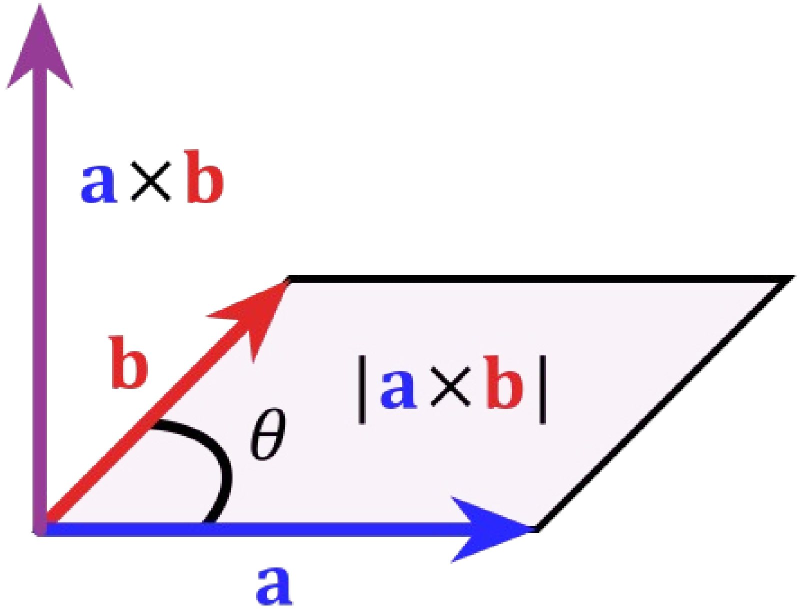
Vektorový součin vektorů P_u a P_v označujeme $P_u \times P_v$. Připomínáme, že

$$P_u \times P_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial u}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial u}, & \dfrac{\partial\vartheta}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial v}, & \dfrac{\partial\psi}{\partial v}, & \dfrac{\partial\vartheta}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\vartheta}{\partial v} - \frac{\partial\vartheta}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}, \frac{\partial\vartheta}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial v} - \frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}, \frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial v} \right).$$

Tohle je obecný zápis. Nebude se do něj dosazovat. Používá se při obecné formulaci. V konkrétních příkladech se počítá vektorový součin konkrétních vektorů.


dσ
D
C
B
A
MCB


a×b
b
|a×b|
θ
a

Jednoduchá hladká plocha - definice

Definice (Jednoduchá hladká plocha.). Nechť Γ je uzavřená jednoduchá po částech hladká křivka v $\mathbb{E}_2$ a $B = \Gamma \cup \operatorname{Int}\Gamma$. Nechť P je spojité zobrazení B do $\mathbb{E}_3$. Předpokládejme, že

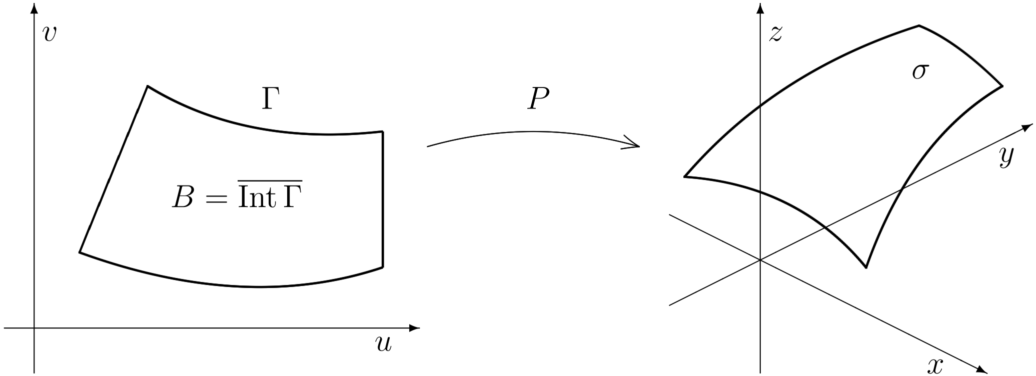
a) P je prosté zobrazení na B,

b) P má spojité a omezené parciální derivace P_u a P_v v $B - K$, kde K je nejvýše konečná množina bodů, nacházejících se na hranici Γ množiny B,

c) $P_u \times P_v \neq \mathbf{0}$ v $B - K$.

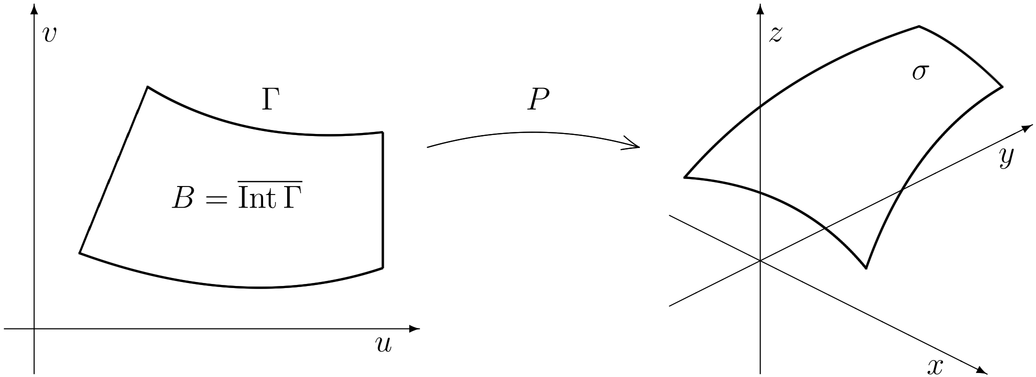
Množinu všech bodů $P(u,v)$ pro $[u,v] \in B$ (tj. obor hodnot zobrazení P) pak nazýváme *jednoduchá hladká plocha* v $\mathbb{E}_k$. Zobrazení P nazýváme *parametrizace*.

Většinou značíme řeckými písmeny, například σ, σ_1, σ_2, κ, apod.



Obr. ze skript

Většinou značíme řeckými písmeny, například σ, σ_1, σ_2, κ, apod.



Obr. ze skript

Každá JHP má nekonečně mnoho parametrizací (”způsobů jak ji získat defor. z $\mathbb{E}_2$”).

Jednoducho hladkou křivku v $\mathbb{E}_3$, která je obrazem Γ (hranice množiny B) při zobrazení P, nazýváme *okraj* jednoduché hladké plochy.

Do definice jednoduché hladké plochy se nevejde například *kulová plocha* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ nebo *válcová plocha* $x^2 + y^2 = R^2,\ 0 \leq z \leq h$. (Budeme je skládat z více JHP).

Do definice jednoduché hladké plochy se nevejde například *kulová plocha* $x^2+y^2+z^2=R^2$ nebo *válcová plocha* $x^2+y^2=R^2,\ 0\le z\le h$. (Budeme je skládat z více JHP).

Orientace Jednoduché hladké plochy, normálový vektor

Zamyšlení na tabuli.

Orientace Jednoduché hladké plochy, normálový vektor

Myšlenka na tabuli.

Plochu σ můžeme *orientovat* tak, že na ploše definujeme *normálový vektor* $\mathbf{n}$ (tj. jednotkový vektor, kolmý k ploše σ, který udává orientaci plochy σ) buď rovnicí

$$\mathbf{n} = \frac{P_u(u,v) \times P_v(u,v)}{\|P_u(u,v) \times P_v(u,v)\|} \qquad \text{pro všechna } [u,v] \in B - K,$$

nebo rovnicí

$$\mathbf{n} = -\frac{P_u(u,v) \times P_v(u,v)}{\|P_u(u,v) \times P_v(u,v)\|} \qquad \text{pro všechna } [u,v] \in B - K.$$

Je-li normálový vektor $\mathbf{n}$ dán první rovnicí, říkáme, že jednoduchá hladká plocha σ je orientována *souhlasně s parametrizací P*. V opačném případě, kdy vektor $\mathbf{n}$ je definován druhou rovnicí, říkáme, že jednoduchá hladká plocha σ je orientována *nesouhlasně s parametrizací P*.

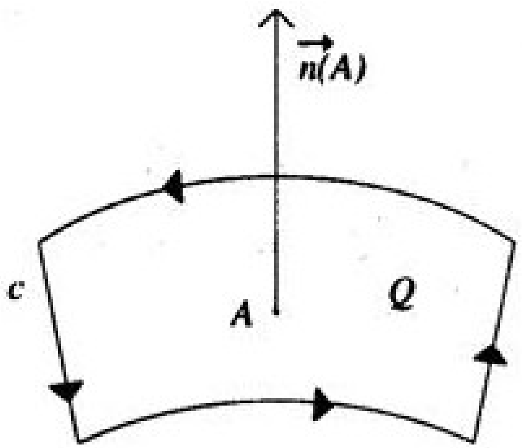
Normálový vektor definovaný výše se mění spojitě, tedy nemůže v různých bodech mířit na různé strany plochy.

Vztah mezi orientací jednoduché hladké plochy a jejího okraje

Na tabuli. Příklad na tabuli.

Jednoduchá po částech hladká plocha

Na tabuli.



Říkáme, že plocha Q a její okraj c jsou souhlasně orientovány, jestliže pro směr křivky c a normálu $\vec{n}$ plochy platí pravidlo pravé ruky.

Vztah mezi orientací jednoduché hladké plochy a jejího okraje

Na tabuli. Příklad na tabuli.

Jednoduchá po částech hladká plocha

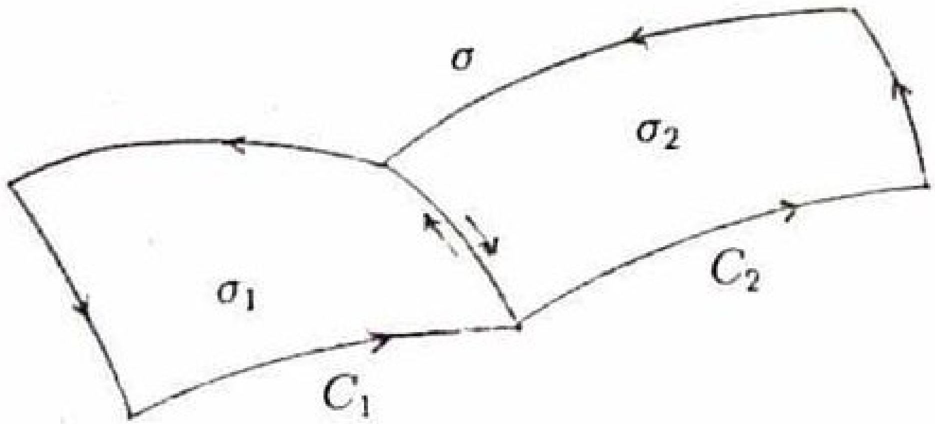
Na tabuli.

Uzavřená plocha

Na tabuli.

Příklady ploch a parametrizací, na tabuli.

IV.1.6. Jednoduchá po částech hladká plocha, složená ze dvou jednoduchých hladkých ploch. Předpokládejme, že σ_1 a σ_2 jsou dvě jednoduché hladké plochy, které jsou buď obě orientované souhlasně se svými okraji C_1 a C_2 nebo jsou obě orientovány nesouhlasně se svými okraji. Předpokládejme, že



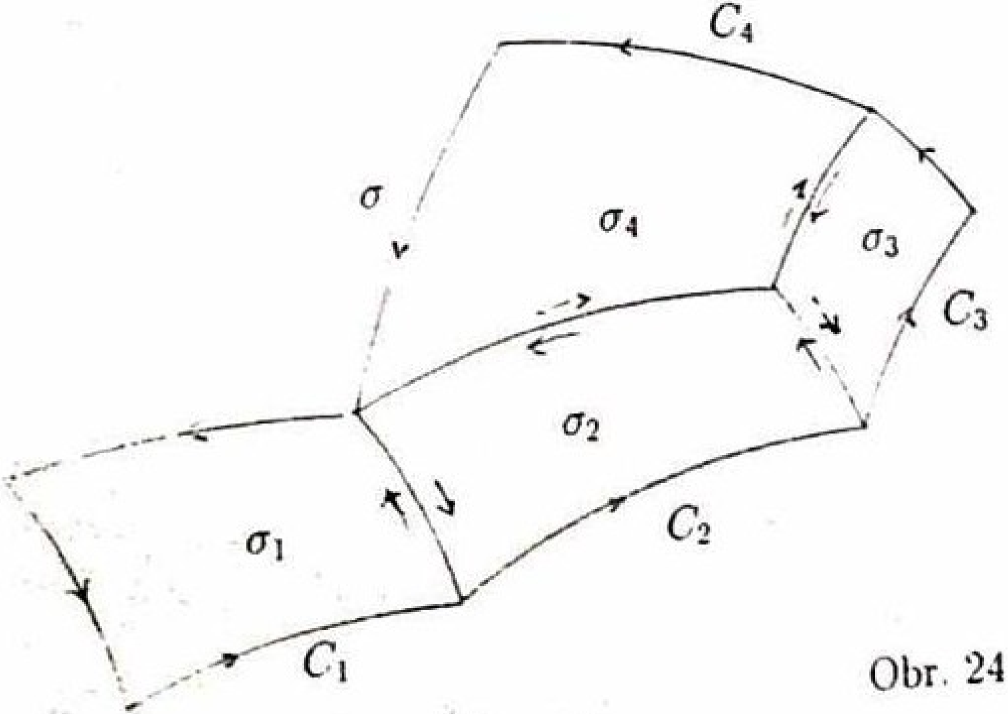
a) $\sigma_1 \cap \sigma_2 = C_1 \cap C_2$ a tento průnik vytváří jednu nebo více jednoduchých hladkých křivek,

b) orientace křivek C_1 a C_2 je ve všech jejich společných bodech (tj. na $C_1 \cap C_2$) opačná.

Sjednocení $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ pak nazýváme <u>*jednoduchou po částech hladkou plochou*</u> v $\mathbb{E}_3$, složenou se ze dvou jednoduchých hladkých ploch σ_1 a σ_2.

Hranice vysledne plochy je mnozina: (C1 sjednoceno s C2) bez (C1 prunik s C2)

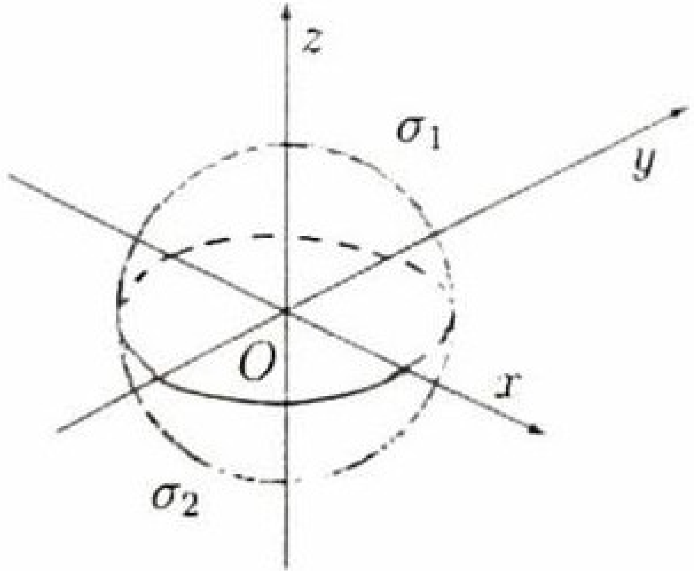
IV.1.7. Jednoduchá po částech hladká plocha, složená z více jednoduchých hladkých ploch. Předpokládejme, že σ_1 a σ_2 jsou jednoduché hladké plochy z předcházejícího odstavce IV.1.6. Pokud postupně k jejich sjednocení připojíme, při respektování stejných pravidel, další jednoduché hladké plochy $\sigma_3, \sigma_4, \ldots, \sigma_n$, získáme jednoduchou hladkou plochu, složenou z n jednoduchých hladkých ploch $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. (Viz obr. 24.)



Obr. 24

IV.1.11. Příklad. Kulová plocha, složená ze dvou jednoduchých hladkých ploch $\sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$ a $\sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \leq 0$, je uzavřená jednoduchá p. č. hladká plocha.

Protoze C1 od sigma1 je tataz kruznice, co okraj C2 od sigma2, je



Obr. 27

Dalšími příklady uzavřených jednoduchých p. č. hladkých ploch jsou povrch krychle, povrch čtyřstěnu atd.

Co vše musím mít připravené pro počítání s parametrizací plochy?

a) předpis souřadnicových f-cí
$x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$

b) množinu $B \subset \mathbb{E}_2$, ze které beru u, v

D) orientaci $P(u,v)$ vůči ploše

C) $\vec{P}_u$, $\vec{P}_v$ $\Rightarrow$ $\vec{P}_u \times \vec{P}_v$

e) $\| \vec{P}_u \times \vec{P}_v \|$

Typické plochy (v předmětu M2):

- rovina
- paraboloidy, hyperboloidy, atd.

plocha od $\underbrace{\text{paraboloidy, hyperboloidy, atd.}}_{\text{kvadratické plochy}}$

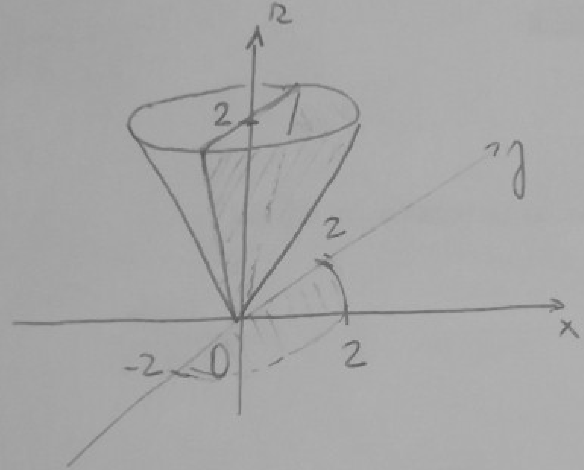
- část grafu f-ce dvou proměnných
- kulová plocha
- válcová plocha

} (složitější na představu, B neleží v rovině x-y)

Př.:

Parametrizujte plochu σ: $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $x \geq 0$, $x^2+y^2 \leq 4$.
Plocha je orientována vektorem, který má třetí souřadnici kladnou, tj. míří "vzhůru".

↳ půlka kuželové plochy omezená kruhem ($x^2+y^2 \leq 4$)
(ve 3D je to válec)



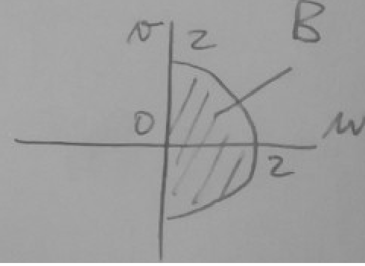
$\underline{\underline{P(u,v) = ?}}$

↳ Chci splnit $z = \sqrt{x^2+y^2}$ automaticky.

$$x = u \implies z = \sqrt{u^2+v^2}$$
$$y = v$$

(ne vždy nejlepší recept)

$\underline{B = ?}$ $\implies u^2+v^2 \leq 4$
$u \geq 0$



$$\vec{P}_u = \frac{\partial}{\partial u} P(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}\left(u, \; v, \; \sqrt{u^2+v^2} \right) =$$

$$= \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \right)$$

$$\vec{P}_v = \frac{\partial}{\partial v} P(u,v) = \frac{\partial}{\partial v}\left(u, \; v, \; \sqrt{u^2+v^2} \right) =$$

$$= \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \right)$$

$\left(\vec{P}_u, \vec{P}_v \text{ spoj. a omezené na } B \setminus \{[0,0]\} \right)$

$$\vec{P_u} \times \vec{P_v} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{u}{\sqrt{\ }} \\ 0 & 1 & \frac{v}{\sqrt{\ }} \end{pmatrix} = \vec{i}\left(0 - \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) + \vec{j}\cdot(-1)^3\left(\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} - 0\right)$$

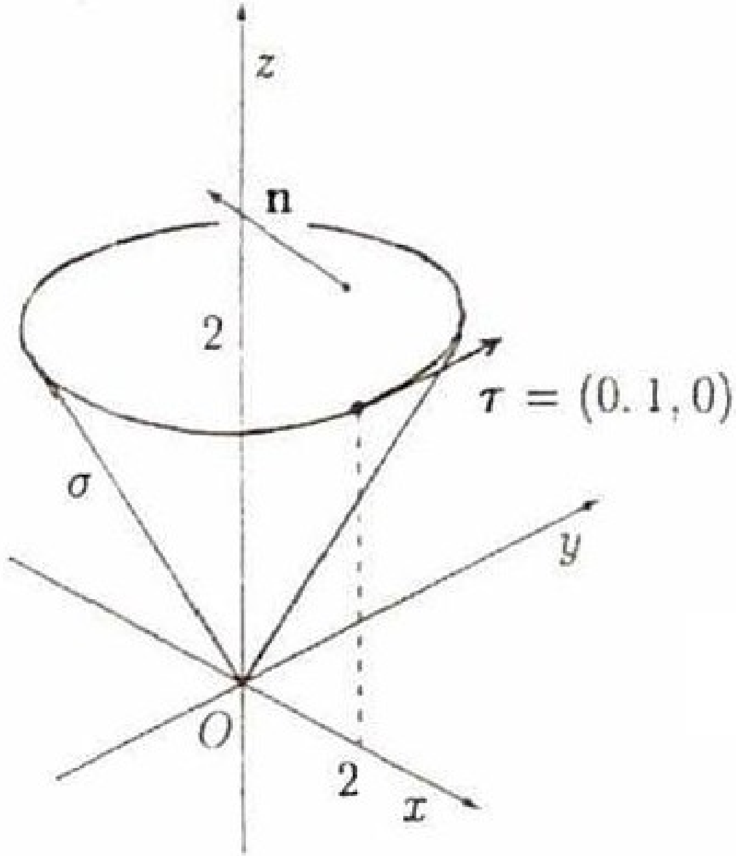
$$+\vec{k}\cdot(1-0) = \left(-\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1\right)$$

$$\|\vec{P_u} \times \vec{P_v}\| = \sqrt{\frac{u^2}{u^2+v^2} + \frac{v^2}{u^2+v^2} + 1^2} = \sqrt{2} \neq 0$$

Navíc z-ová souřadnice od $\vec{P_u} \times \vec{P_v}$ je kladná (míří vzhůru) $\Longrightarrow$ proto je $P(u,v)$ souhl. orient.

a $\vec{n} = +\dfrac{P_u \times P_v}{\|P_u \times P_v\|} = \dfrac{\left(-\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, -\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1\right)}{\sqrt{2}}$

Orientace okraje plochy σ, kterým je uzavřená křivka C, souhlasná s orientací plochy σ, je naznačena na obr. 22. Například, jednotkovým tečným vektorem k C v bodě $X = [2, 0, 2]$ je $\boldsymbol{\tau} = (0, 1, 0)$.

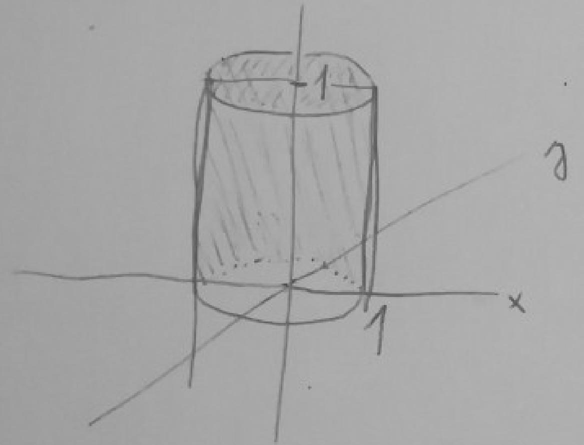


Př.:

Ověřte, že $P(u,v) = (\cos u,\ \overset{\sin}{\cancel{\cos}}\ u,\ v)$, $B = \{[u,v] \in E_2 \mid u \in \langle 0,\pi\rangle,\ v \in \langle 0,1\rangle\}$.

je parametrizací JHP dané σ_1: $x^2 + y^2 = 1$
$y \geq 0$
$0 \leq z \leq 1$.

σ_1 je válcová plocha



0) Splňuje $P(u,v)$ rovnice?

$x = \cos u$
$y = \sin u$
$z = v$

- $x^2 + y^2 = \cos^2 u + \sin^2 u = 1$ ✓
- $y = \sin u \geq 0$?
  ano, na $\langle 0,\pi\rangle$ platí ✓
- $0 \leq z = v \leq 1$ ✓

1) Je $P(u,v)$ spoj. a prosté?

ano.

2) Je $\vec{P_u}$ a $\vec{P_v}$ spoj. a omezené až na spočetně výjimek?

$$\vec{P_u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\cos u, \sin u, v\right) = \left(-\sin u, \cos u, 0\right)$$

$$\vec{P_v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\cos u, \sin u, v\right) = \left(0, 0, 1\right)$$

ano, pro $\forall u, v \in B$ jsou spoj. a omez.

3) $\|\vec{P_u} \times \vec{P_v}\|$ různé od nuly

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\cos u\right) - \vec{j}\left(-\sin u\right) + \vec{k}\cdot 0$$

$$= \underline{\underline{\left(\cos u, \sin u, 0\right)}}$$

$$\|\vec{P_u} \times \vec{P_v}\| = \sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u + 0} = 1 \quad \forall u, v \in B \checkmark$$