Matematika 1 – Opravné příklady

Za písemky standardně rozdávám $0, \frac{1}{2}, 1$ bod. Aby jste si opravili půl bod na celý, spočítejte vždy příklad za a). Na opravu celého bodu pak spočítejte všechny (většinou 3) podúlohy. Opravy počítejte doma a přineste mi je nejlépe na příští cvičením **na samostatném, podepsaném papíru**, ideálně formátu A4. Termín odevzdání není striktně daný, ale opravy slouží k procvičení dané látky, tak je lépe to udělat co nejdříve než začneme probírat něco nového.

1. – LN/LN

    - Vyšetřete, zda jsou vektory LN/LZ (vyberte si opačné zadání než v testíku):
      A) $\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\-4\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}5\\-1\\3\end{pmatrix}$. B) $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$.
    - Pro jakou hodnotu parametru α jsou vektory $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\\alpha\end{pmatrix}$ LZ?
    - Jaký úhel svírají vektory $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$?

2. – Hodnost

    - Kdy má soustava řešení v závislosti na parametru α?

      $$\begin{aligned}\alpha x + 4y &= 1\\ 3x + (\alpha+4)y &= 10.\end{aligned}$$

      Následně ji vyřešte pro $\alpha = 1$.

    - Vyřešte soustavu

      $$\begin{aligned}3x + 2y + z &= 0\\ 2x - y + 3z &= 0\\ x + 3y - 4z &= 1.\end{aligned}$$

    - Určete hodnost matice $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ k & k & 1\\ 2 & 2 & k-1\end{pmatrix}$ v záislosti na par. k.

3. – Frobeniova věta

- Kdy má soustava řešení a kolik jich je v závislosti na parametru λ?

$$\begin{aligned} 2x - y + z + u &= 1 \\ x + 2y - z + 4u &= 2 \\ x + 7y - 4z + 11u &= \lambda. \end{aligned}$$

- Vypočítejte inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- Kdy má soustava $A\vec{x} = \vec{0}$ jediné řešení? Jaké je toto řešení?

4. – vlastní čísla

- Najděte vlastní čísla matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$. Zapište je ve tvaru $z = |r|(\cos(\beta) + i * \sin(\beta))$.
- Najděte k nim vlastní vektory.
- Dosaďte za $\beta = \frac{\pi}{6}$. Spočítejte a nakreslete výsledek $\mathbb{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pomocte si jednotkovou kružnicí. Můžeme říci něco o výsledku (co provádí násobení matice $\mathbb{A}$ s vektory)?

Nebo jako druhou variantu náhrady spočítejte ze Sbírky příklady: 143, 155 a 160.

5. – posloupnosti ($\frac{1}{2}$b - vypočítejte první dva příklady, 0b - spočítejte všechny)

- Jaké vlastnosti (omezená, rostoucí, monotónní, ...) má posloupnost $a_n = -\frac{n^2}{n+1}$?
- Spočítejte $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{4}{n} - \frac{3n}{n^2+1})$.
- Spočítejte $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{5 + 8n^3} - 2n$.
- Spočítejte $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$.
- Spočítejte $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$.

6. – derivace

- Zderivujte funkce:

$$1)\ \cos x^2 \qquad 2)\ (\cos x)^2 \qquad 3)\ \cos(\cos x)$$

- Najděte reálné čísla b, c tak, aby se funkce $f(x) = x^2 + bx + c$ dotýkala přímky $y = x$ v bodě $x = 2$.
- Napište rovnici tečny funkce $f(x) = \frac{8}{4+x^2}$ v bodě $x_0 = 2$ a spočítejte pomocí ní přibližnou hodnotu $f(1,9)$.

7. – konvexnost/konkávnost

- Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, nebo $f(x) = exp(x^2 + 2x)$ (vyberte si jednu ze zadaných funkcí).
- Najděte globální extrémy funkce $g(x) = x^2 \ln x$ na intervalu $< 1, e >$.
- Najděte intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce $f(x) = \exp^{\frac{1}{x}}$.

nebo 3) Najděte intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce $f(x) = x \ln x$.

nebo 3) Určete lokální extrémy a intervaly monotónie funkce $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

8. – integrály I

- Vypočítejte integrál $\int \frac{1}{x} \ln x \, \mathrm{d}x$.

fajnšmejkr Najděte neurčitý integrál $\int x^n \exp^{2x} \, \mathrm{d}x$, kde $n \geq 1$ je přirozené číslo.

nebo Najděte neurčitý integrál $\int x^n \ln x \, \mathrm{d}x$, kde $n \geq 1$ je přirozené číslo.

- Nalezněte primitivní funkci $(F(x) = \int f(x) \, \mathrm{d}x)$ k $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}$.

9. – integrály II

- Vypočítejte integrály $\int \frac{5x^2}{1+x^3} \, \mathrm{d}x$ a $\int \frac{5}{1-3x} \, \mathrm{d}x$.
- Najděte neurčitý integrál $\int \mathrm{tg}\ x \, \mathrm{d}x$.
- Nalezněte primitivní funkce k $f_1(x) = \sin^2(2x)$ a $f_2(x) = \cos^5(3x)$.