Matematika I – přednáška 3

Shrnutí co bylo minule

Lineární závislost a nezávislost, Dimenze a Báze vektorového prostoru, podprostory.

Co bude dnes

Matice, hodnost matice, Gaussův algoritmus.

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php
(pro osobní potřeby a nenahrazuje skripta ani přednášku).

Matematika I – přednáška 3

I.2. Matice

Definice (matice). *Maticí typu $m \times n$* nazýváme obdélníkové pole, tvořené z $m \cdot n$ reálných čísel (tzv. *prvků* matice), zapsaných v m řádcích a n sloupcích.

Příklady.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Prvky matice A jsou značeny a_{ij}, kde $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$. První index říká, v jakém řádku se prvek nachází, a druhý index říká, v jakém sloupci se prvek nachází.

$$B = \begin{pmatrix} 0, & 2, & 3, & 4, & 8, & -5 \\ 2, & 3, & 5, & -1, & 9, & 17 \\ 3, & -8, & 7, & 6, & -4, & 23 \end{pmatrix}$$

B je matice typu 3×6.
(Má 3 řádky a 6 sloupců.)

Definice (rovnost dvou matic). Dvě matice pokládáme za sobě rovné, jsou-li stejného typu a mají li na odpovídajících si místech stejné prvky.

Předpokládejme, že $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$.

Definice (hlavní diagonála). Prvky $a_{11}, a_{22}, \ldots$ tvoří v matici A tzv. *hlavní diagonálu*.

Definice (horní trojúhelníková matice). Jsou-li v matici A všechny prvky pod hlavní diagonálou rovny nule, nazýváme A *horní trojúhelníkovou maticí*.

Definice (nulová matice). Matici, jejíž všechny prvky jsou rovny nule, nazýváme *nulovou maticí*.

Definice (transponovaná matice). Matici $B = (b_{ij})$ typu $n \times m$, pro jejíž prvky platí $b_{ij} = a_{ji}$ $(i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, m)$, nazýváme *transponovanou maticí* k matici A. Značíme ji A^T.

1. sloupec matice A^T je stejný jako 1. řádek matice A,
2. sloupec matice A^T je stejný jako 2. řádek matice A, atd.

Transponovanou matici A^T získáme "překlopením"matice A kolem hlavní diagonály.

Definice (čtvercová matice). Matici typu $n \times n$ nazýváme *čtvercovou maticí.*

Čtvercová matice má stejný počet řádků, jako sloupců.

Definice (jednotková matice). Čtvercovou matici, která má na hlavní diagonále samé jednotky a všude mimo hlavní diagonálu nuly, nazýváme *jednotkovou maticí.* Tuto matici označujeme E.

Příklady: viz TABULE $\boxed{\text{T3.1}}$

Definice (sčítání matic). Jsou-li $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ matice stejného typu $m \times n$, pak jejich *součtem* nazýváme matici $C = (c_{ij})$, která je rovněž typu $m \times n$ a pro její prvky platí: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$. Používáme zápis $C = A + B$.

Příklad: viz TABULE $\boxed{\text{T3.2}}$

Poznámka. Matice stejného typu také lze odčítat: *Rozdílem matic A a B* nazýváme matici $C = A + (-1) \cdot B$. Píšeme $C = A - B$.

Definice (násobení matic reálnými čísly). Je-li $A = (a_{ij})$ matice typu $m \times n$ a λ je reálné číslo, pak *součinem čísla λ a matice A* (nebo také *λ–násobkem matice A*) nazýváme matici $C = (c_{ij})$, která je rovněž typu $m \times n$ a pro její prvky platí: $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$. Používáme zápis $C = \lambda \cdot A$.

Příklad: viz TABULE $\boxed{\text{T3.3}}$

Definice (násobení matic). Je-li $A = (a_{ij})$ matice typu $m \times n$ a $B = (b_{ij})$ matice typu $n \times p$, pak *součinem matic A a B* nazýváme matici $C = (c_{ij})$ typu $m \times p$, pro jejíž prvky platí:

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj}$$

$(i = 1, \ldots, m;\; j = 1, \ldots, p)$. Používáme zápis: $C = A \cdot B$.

Skalárním součinem aritmetických vektorů $[\, u_1,\, u_2, \ldots, u_n \,]$ a $[\, v_1,\, v_2, \ldots, v_n \,]$ z $\mathbb{R}^n$ nazýváme číslo $u_1\, v_1 + u_2\, v_2 + \ldots + u_n\, v_n$.

Nyní vidíme: <u>Prvek c_{ij} v matici C je skalárním součinem i–tého řádku v matici A a j–tého sloupce v matici B.</u>

Abychom mohli utvořit součin dvou matic A a B (v tomto pořadí), musí mít matice A tolik sloupců, kolik má matice B řádků. Jinak matice A a B násobit (v tomto pořadí) nelze.

Příklady: viz TABULE $\boxed{\text{T3.4}}$

Pravidla pro operace s maticemi. Předpokládejme, že A, B a C jsou matice a α, β jsou reálná čísla. Pak platí:

a) $A + B = B + A$,

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$,

c) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$,

d) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$,

e) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$,

f) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,

g) $A \cdot E = A$,

h) $E \cdot B = B$,

i) $(A + B)^T = A^T + B^T$,

j) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

(Předpokládáme, že typy matic jsou takové, že uvedené operace mají smysl.)

Násobení matic není komutativní, tj. obecně neplatí, že $A \cdot B = B \cdot A$!

Příklady: viz TABULE $\boxed{\text{T3.5}}$

Definice (hodnost matice). Maximální počet lineárně nezávislých řádků matice A (chápaných jako aritmetické vektory) nazýváme *hodností* matice A. Značíme ji $h(A)$.

Jednduchý příklad: viz TABULE $\boxed{\text{T3.6}}$

Poznámka. Hodnost matice lze definovat i jako maximální počet lineárně nezávislých sloupců. Obě definice (tj. „řádková" i „sloupcová") přiřazují matici totéž číslo jakožto její hodnost. (Toto jednoduché tvrzení není úplně snadné dokázat.)

Otázka: Jak určit hodnost zadané matice?

Odpověď je jednoduchá, pokud matice je horní trojúhelníková (s nenulovými prvky na hlavní diagonále):

Věta. *Nechť A je horní trojúhelníková matice typu $m \times n$, která má všechny prvky na hlavní diagonále různé od nuly. Pak $h(A) = \min\{m; n\}$.*

Poznámka. Za předpokladů věty platí: $h(A) = \min\{m; n\} =$ počet nenulových řádků.

Příklady: viz TABULE $\boxed{\text{T3.7}}$

Otázka: Co ale máme dělat, když chceme určit hodnost matice, která není horní trojúhelníková (s nenulovými prvky na hlavní diagonále)?

Odpověď: Pomocí tzv. *ekvivalentních úprav,* které nemění hodnost, převedeme zadanou matici na horní trojúhelníkovou matici (s nenulovými prvky na hlavní diagonále). Její hodnost pak určíme pomocí uvedené věty.

Ekvivalentní úpravy matice. Ekvivalentní úpravy, které budeme používat, jsou tyto:

a) *změna pořadí řádků,*

b) *vynásobení některého řádku nenulovým číslem,*

c) *přičtení k některému řádku lineární kombinace ostatních řádků (speciálně, přičtení násobku jiného řádku),*

d) *vynechání řádku, který je lineární kombinací ostatních řádků (speciálně, vynechání řádku obsahujícího samé nuly nebo vynechání řádku, který je násobkem nějakého jiného řádku).*

Úpravy z bodů a) – d) lze provádět i se sloupci matice, hodnost se rovněž nemění.

Postup, jak pomocí ekvivalentních úprav převést libovolnou matici na horní trojúhelníkovou matici (s nenulovými prvky na hlavní diagonále), se nazývá **Gaussův algoritmus.**

Příklad: viz TABULE $\boxed{\text{T3.8}}$