

Matematika I – přednáška 18

Shrnutí co bylo minule

Primitivní funkce. Neurčitý integrál. Metoda per partes.

Co bude dnes

Substituční metoda. Integrace funkcí $\sin^m x \cdot \cos^n x$.

Tyto slidy jsou na adrese

<http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching>

(pro osobní potřeby, nenahrazuje přednášku ani skripta).

Matematika I – přednáška 18

Substituční metoda

(otočení pravidla pro derivování složené funkce)

Motivace. Předpokládejme, že F je primitivní funkce k funkci f v intervalu I . Pak

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C \quad \text{pro } x \in I.$$

Je-li $x = g(t)$ pro t v intervalu J , pak podle vzorce pro derivaci složené funkce je

$$[F(g(t))]' = F'(g(t)) g'(t) = f(g(t)) g'(t) \quad \text{pro } t \in J.$$

To znamená, že

$$\int f(g(t)) g'(t) \, dt = F(g(t)) + C \quad \text{pro } t \in J.$$

Vidíme, že pravé strany obou formulí jsou stejné, dosadíme-li $x = g(t)$. Tudíž se (za podmínky $x = g(t)$) rovnají i levé strany. Následující věta vše shrnuje a upřesňuje.

Věta (o integraci substitucí). Předpokládejme, že funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu I , funkce $x = g(t)$ má spojitou derivaci v intervalu J a zobrazuje tento interval na interval I . Pak platí

$$\int f(x) \, dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) \, dt \quad \text{pro } x \in I, \, t \in J, \, x = g(t).$$

Uvedenou formuli lze použít dvěma směry:

- I.** Chceme vypočítat integrál vpravo a problém převedeme na výpočet integrálu vlevo.
- II.** Chceme vypočítat integrál vlevo a problém převedeme na výpočet integrálu vpravo.

Oba způsoby dále popíšeme podrobněji.

I. Chceme vypočítat integrál vpravo. Položíme $g(t) = x$ a $g'(t) \, dt = dx$. Tak získáme integrál vlevo. Tento integrál vypočítáme (pro $x \in I$). Do výsledku pak dosadíme $x = g(t)$.

Toto má smysl tehdy, je-li integrál vlevo jednodušší, než integrál vpravo.

Příklad. Vypočítejme $\int \sin^5 t \cdot \cos t \, dt$.

Užijeme substituci: $\left[\begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = (\sin t)' \, dt = \cos t \, dt \end{array} \right]$.

Dosazením do integrálu dostaneme:

$$\int \sin^5 t \cdot \cos t \, dt = \int x^5 \, dx = \frac{1}{6} x^6 + C = \frac{1}{6} \sin^6 t + C \quad \text{pro } t \in (-\infty, \infty).$$

Příklad. Vypočítejme $\int \frac{\ln^2 s}{s} \, ds$.

Užijeme substituci: $\left[\begin{array}{l} x = \ln s \\ dx = (\ln s)' \, ds = \frac{1}{s} \, ds \end{array} \right]$.

Dosazením do integrálu dostaneme:

$$\int \frac{\ln^2 s}{s} \, ds = \int x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 + C = \frac{1}{3} \ln^3 s + C \quad \text{pro } s \in (0, \infty).$$

Příklad. Vypočítejme $\int e^{x^2} x \, dx$.

Užijeme substituci: $\left[\begin{array}{l} y = x^2 \\ dy = (x^2)' \, dx = 2x \, dx \implies x \, dx = \frac{1}{2} \, dy \end{array} \right]$.

Dosazením do integrálu dostaneme:

$$\int e^{x^2} x \, dx = \int e^y \frac{1}{2} \, dy = \frac{1}{2} e^y + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty).$$

Příklad. Vypočítejme $\int \sin(5x) \, dx$.

Užijeme substituci: $\left[\begin{array}{l} y = 5x \\ dy = (5x)' \, dx = 5 \, dx \implies dx = \frac{1}{5} \, dy \end{array} \right]$.

Dosazením do integrálu dostaneme:

$$\int \sin(5x) \, dx = \int \sin y \frac{1}{5} \, dy = -\frac{1}{5} \cos y + C = -\frac{1}{5} \cos(5x) + C \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty).$$

Příklad. Vypočítejme $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$, kde f je nenulová funkce se spojitou derivací v intervalu I .

Užijeme substituci: $\left[\begin{array}{l} f(x) = u \\ f'(x) dx = du \end{array} \right]$.

Dosazením do integrálu dostaneme:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |f(x)| + C \quad \text{pro } x \in I.$$

II. Chceme vypočítat integrál vlevo, což je $\int f(x) dx$. V tomto integrálu položíme $x = g(t)$ a $dx = g'(t) dt$. Tímto způsobem převedeme integrál $\int f(x) dx$ na integrál vpravo, tj. na $\int f(g(t)) g'(t) dt$. Tento integrál vypočítáme pro $t \in J$. Výsledek ještě transformujeme do proměnné x . K tomu potřebujeme, aby k funkci g (v intervalu J) existovala inverzní funkce g_{-1} . Do výsledku tedy dosadíme $t = g_{-1}(x)$, čímž se dostaneme zpět k proměnné x .

Toto má smysl tehdy, je-li integrál vpravo jednodušší, než integrál vlevo.

Příklad. Vypočítejme $\int \frac{dx}{9+x^2}$.

Užijeme substituci: $\begin{bmatrix} x = 3t \\ dx = (3t)' dt = 3 dt \end{bmatrix}$.

Dosazením do integrálu dostaneme:

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \int \frac{3 dt}{9+9t^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty).$$

Další příklady:

1) $\int \frac{dx}{x-a} \quad (a \in \mathbb{R})$

2) $\int \frac{\ln^2 x + 1}{x \sqrt{\ln x}} dx$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-8x^2}}$

4) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x} dx$

5) $\int \frac{1}{\sqrt{2^x+1}} dx$

6) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$

Návod k řešení: viz TABULE

Integrace funkcí typu $\sin^m x \cdot \cos^n x$

I. Příklad, kdy alespoň jedno z čísel m, n je liché.

Předpokládáme, že například n je liché, tj. n lze vyjádřit: $n = 2k + 1$, kde k je celé číslo. Pak

$$\begin{aligned}\int \sin^m x \cos^n x \, dx &= \int \sin^m x \cos^{2k+1} x \, dx = \int \sin^m x (\cos^2 x)^k \cdot \cos x \, dx \\ &= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k \cdot \cos x \, dx.\end{aligned}$$

V integrálu $\int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^k \cos x \, dx$ pak užijeme substituci $\sin x = t$.

Pokud je lichým číslem m , postupujeme analogicky.

Příklad.
$$\int \sin^4 x \cos x \, dx \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = t \\ (\sin x)' \, dx = \cos x \, dx = dt \end{array} \right]$$

$$= \int t^4 \, dt = \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{1}{5} \sin^5 x + C \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty)$$

Příklad.
$$\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx = \int \sin^2 x \sin x \cos^4 x \, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x \sin x \, dx \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = t \\ (\cos x)' \, dx = -\sin x \, dx = dt \end{array} \right]$$

$$= - \int (1 - t^2) t^4 \, dt = \dots \text{ tento integrál již umíme vypočítat}$$

Příklad.
$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} \, dx \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \end{array} \right]$$

$$= - \int \frac{dt}{1 - t^2} = \dots \text{ tento integrál již umíme vypočítat}$$

II. Příklad, kdy obě čísla m, n jsou sudá.

Použijeme vzorce

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}}, \quad \boxed{\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}}.$$

Tyto vzorce případně použijeme víckrát, až obdržíme integrál, kde buď sinus nebo kosinus jsou v liché mocnině. Pak postupujeme jako v případě I.

Příklad.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) \, dx = \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x \, dx \quad \left[\begin{array}{l} t = 4x \\ dt = 4 \, dx \implies dx = \frac{1}{4} dt \end{array} \right] \\ &= \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin 4x + C \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$