

Matematika I – přednáška 12

Shrnutí co bylo minule

Derivace funkce.

Co bude dnes

Derivace funkce. Diferenciál funkce. Derivace vyšších řádů, L'Hospitalovo pravidlo.

Tyto slidy jsou na adrese

<http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching>

(pro osobní potřeby, nenahrazuje přednášku ani skripta).

Matematika I – přednáška 12

Věta (o derivaci inverzní funkce). *Nechť $y = f_{-1}(x)$ je inverzní funkce k funkci f . Má-li funkce f v bodě y nenulovou derivaci $f'(y)$, má inverzní funkce v bodě x derivaci:*

$$f'_{-1}(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f_{-1}(x))}.$$

Pomocí těchto vět lze odvodit vzorce pro **derivate dalších elementárních funkcí:**

$$\text{h) } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{i) } (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{j) } (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{k) } (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{l)} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\text{m)} \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad (a > 0)$$

$$\text{n)} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

Každý z těchto vzorců platí pro ta x , pro která má levá i pravá strana smysl.

Logaritmická derivace. Má-li funkce f derivaci v bodě x a je-li $f(x) > 0$, pak

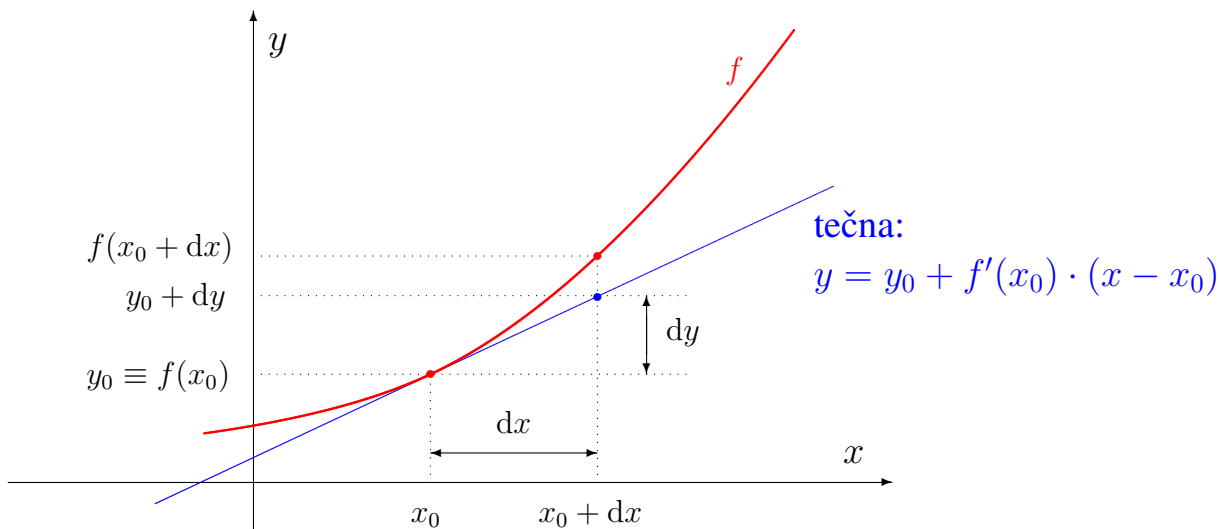
$$[\ln f(x)]' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \dots \text{ tzv. } \textit{logaritmická derivace funkce } f.$$

Nevlastní derivace. Je-li $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \pm\infty$,

pak hodnotu této limity rovněž označujeme $f'(x_0)$ a nazýváme ji *nevlastní derivaci*.

Poznámka. Funkce může mít v nějakém bodě nevlastní derivaci a přesto nemusí být v tomto bodě spojitá. **Příklad:** viz TABULE

Diferenciál. Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$.



Lineární funkce

$$y = y_0 + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

ze všech lineárních funkcí nejlépe aproximuje funkci f v okolí bodu x_0 .

Hodnoty funkce f v bodech x v malém okolí bodu x_0 lze pomocí této lineární funkce přibližně vypočítat:

$$f(x) \doteq y_0 + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Píšeme-li $x = x_0 + dx$, pak

$$f(x_0 + dx) \doteq y_0 + \boxed{f'(x_0) \cdot dx}$$

značíme: dy

Výraz $dy := f'(x_0) \cdot dx$ se nazývá *diferenciálem* funkce f v bodě x_0 .

Místo x_0 se často píše pouze x . Při tomto značení platí:

$$f(x + dx) \doteq f(x) + dy, \quad \text{kde} \quad dy = f'(x) \cdot dx.$$

Příklad. Pomocí diferenciálu přibližně vypočítejte $\sin 47^\circ$.

Řešení: viz TABULE

Poznámka. Viděli jsme, že diferenciál funkce f v bodě x_0 (který se značí dy nebo df a platí: $dy = f'(x_0) dx$) existuje právě tehdy, má-li funkce f derivaci v bodě x_0 .

Odtud je odvozen následující termín: o funkci, která má derivaci v bodě x_0 , říkáme, že je v bodě x_0 *diferencovatelná*.

Podobně, má-li funkce f derivaci v intervalu I , říkáme, že tato funkce je *diferencovatelná v intervalu I* .

Derivace vyšších řádů. *Derivací druhého řádu* funkce f rozumíme derivaci funkce f' .
Značení: f''

Podobně, *derivací třetího řádu* funkce f rozumíme derivaci funkce f'' . Značení: f'''
ATD.

Derivaci n -tého řádu funkce f značíme $f^{(n)}$.

Pro definiční obory platí: $D(f) \supset D(f') \supset D(f'') \supset D(f''') \supset \dots$

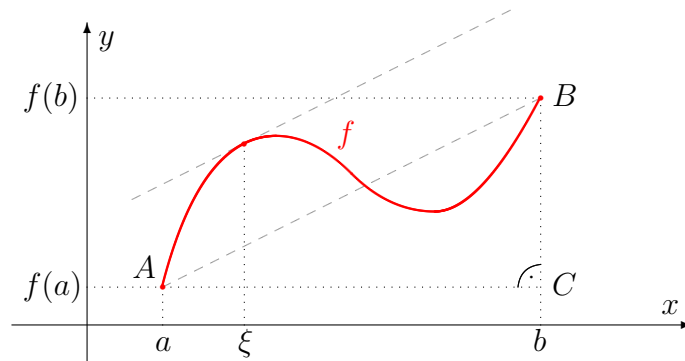
Derivace vyšších řádů též značíme $\frac{d^2 f}{dx^2}, \frac{d^3 f}{dx^3}, \dots, \frac{d^n f}{dx^n}, \dots$ apod.

Leibnizův vzorec. Na průniku $D(f^{(n)})$ a $D(g^{(n)})$ lze derivaci n -tého řádu součinu $f \cdot g$ vypočítat:

$$[f \cdot g]^{(n)} = f^{(n)} g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)} g'' + \dots + \binom{n}{n} f g^{(n)}.$$

Příklady: viz TABULE

Následující věta má velký význam zejména při následném odvozování různých vlastností funkcí, které mají v nějakém intervalu I derivaci.



Věta (Lagrangeova). *Nechť funkce f je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a nechť má derivaci v otevřeném intervalu (a, b) . Pak existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

II.6. Užití derivace při výpočtu limit typu $\frac{\infty}{\infty}$ nebo $\frac{0}{0}$ (tzv. **neurčité výrazy**)

Věta (l'Hospitalovo pravidlo). Předpokládejme, že $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a že limity $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ jsou buď obě rovny $\pm\infty$ nebo obě rovny 0. Pak platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{existuje-li limita vpravo.}$$

(Stejná tvrzení platí i pro limitu zleva a limitu zprava.)

Příklady: viz TABULE

Co přesně znamenají rčení, že při výpočtu limit

„exponenciála vždy vyhrává nad jakoukoliv mocninou”

a naopak, *„logaritmus vždy prohrává s jakoukoliv mocninou”* ?

Vysvětlení: viz TABULE