Matematika I – přednáška 19

Integrace racionálních funkcí

Racionální funkce:

funkce typu $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kde P, Q jsou polynomy a stupeň polynomu Q je ≥ 1.

Naučíme se integrovat racionální funkce, které mají ve jmenovateli polynom stupně nejvýše tři.

Stupeň polynomu P (případně Q) značíme $\deg P$ (případně $\deg Q$). Zkratka pochází z anglického slova „degree" (= stupeň).

Příklady racionálních funkcí:

$$\frac{5}{2x+2}, \qquad \frac{x^2+4x-2}{x^2-3x+1}, \qquad \frac{3x^2+4x-2}{x-1}, \qquad \frac{4x^2-2x+4}{(x-1)(x+3)(x-2)}.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\boxed{\deg P < \deg Q}$ **.**

V opačném případě použijeme tzv. částečné dělení – viz následující příklad.

Příklad. Máme-li integrovat racionální funkci $\dfrac{5x^3 + 2x^2 - 4x + 2}{x^2 - 3x + 2}$, tak nejprve použijeme částečné dělení a zjistíme, že

$$
\begin{aligned}
(5x^3 + 2x^2 - 4x + 2) : (x^2 - 3x + 2) &= 5x + 17, \\
\text{zbytek} = 37x - 32.
\end{aligned}
$$

To znamená, že

$$\frac{5x^3 + 2x^2 - 4x + 2}{x^2 - 3x + 2} = 5x + 17 + \frac{37x - 32}{x^2 - 3x + 2}.$$

První část výrazu vpravo, tj. $5x + 17$, již integrovat umíme. Zbývající část, tj. zlomek

$$\frac{37x - 32}{x^2 - 3x + 2},$$

je racionální funkce s polynomem v čitateli stupně menšího, než je stupeň polynomu ve jmenovateli.

Budeme tedy integrovat racionální funkce typu $P(x)/Q(x)$, kde P a Q jsou polynomy, přičemž $1 \leq \deg Q \leq 3$ a $\deg P < \deg Q$.

Krok 1: rozklad polynomu Q

Rozklad polynomu Q na součin lineárních polynomů (tzv. *kořenových činitelů*) a případně též kvadratických polynomů je prvním krokem integrace.

Je-li $\deg Q = 1$, pak Q je lineárním polynomem a není třeba jej dále rozkládat.
Dále se tedy budeme zabývat případy, kdy

I. $\deg Q = 2$

nebo

II. $\deg Q = 3$.

I. $\boxed{\deg Q = 2}$ **:** $Q(x) = q_0\, x^2 + q_1 x + q_2$ (kde $q_0 \neq 0$)

Jsou tři možnosti (grafy Q – viz TABULE):

I a) Q nemá v reálném oboru žádný kořen a v reálném oboru jej tedy nelze rozložit. (Diskriminant je < 0.)

I b) Q má v reálném oboru jediný (dvojnásobný) kořen α. (Diskriminant je $= 0$.) Pak Q lze rozložit takto:

$$Q(x) \;=\; q_0\,(x-\alpha)^2.$$

I c) Q má v reálném oboru dva různé (jednoduché) kořeny α, β. (Diskriminant je > 0.) Pak Q lze rozložit takto:

$$Q(x) \;=\; q_0\,(x-\alpha)\,(x-\beta).$$

Příklady. Rozložme v reálném oboru polynomy

a) $Q(x) = x^2 - 3x + 3$ b) $Q(x) = 2x^2 - 12x + 18$ c) $Q(x) = 3x^2 - 3x - 18$

(je-li to možné). **Řešení:** viz TABULE

II. $\boxed{\deg Q = 3}$ **:** $Q(x) = q_0\, x^3 + q_1 x^2 + q_2\, x + q_3$ (kde $q_0 \neq 0$)

Jsou čtyři možnosti: (grafy Q – viz TABULE):

II a) Q má jediný reálný kořen α, který je jednoduchý. Pak Q lze rozložit takto:

$$Q(x) \;=\; q_0\,(x-\alpha)\,(x^2 + rx + s),$$

přičemž kvadratický polynom $(x^2 + rx + s)$ v reálném oboru rozložit nelze (jeho diskriminant je záporný).

II b) Q má jediný reálný kořen α, který je trojnásobný. Pak Q lze rozložit takto:

$$Q(x) \;=\; q_0\,(x-\alpha)^3.$$

II c) Q má v reálném oboru jeden jednoduchý kořen α a jeden dvojnásobný kořen β. Pak Q je možné rozložit takto:

$$Q(x) \;=\; q_0\,(x-\alpha)\,(x-\beta)^2.$$

II d) Q má v reálném oboru tři různé kořeny α, β, γ. Pak Q lze rozložit takto:

$$Q(x) \;=\; q_0\,(x-\alpha)\,(x-\beta)\,(x-\gamma).$$

Poznámka. Kořeny polynomu 3. stupně lze vyjádřit pomocí tzv. Cardanových vzorců. Jelikož tyto vzorce jsou poměrně složité, tak se při rozkladu polynomu Q stupně 3 omezíme na případy, kdy minimálně jeden kořen lze uhodnout.

Příklad. Rozložme v reálném oboru polynom $Q(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40.$

Snažíme se uhodnout jeden kořen. Proto za x postupně dosazujeme čísla 0, -1, 1, -2, 2, atd. a testujeme, zda $Q(x) = 0$:

$$Q(0) = 40 \qquad Q(-1) = 54 \qquad Q(1) = 20$$

$$Q(-2) = 56 \qquad Q(2) = 0 \ldots$$

Poznámka. Kořeny polynomu 3. stupně lze vyjádřit pomocí tzv. Cardanových vzorců. Jelikož tyto vzorce jsou poměrně složité, tak se při rozkladu polynomu Q stupně 3 omezíme na případy, kdy minimálně jeden kořen lze uhodnout.

Příklad. Rozložme v reálném oboru polynom $Q(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$.

Snažíme se uhodnout jeden kořen. Proto za x postupně dosazujeme čísla 0, -1, 1, -2, 2, atd. a testujeme, zda $Q(x) = 0$:

$$Q(0) = 40 \qquad Q(-1) = 54 \qquad Q(1) = 20$$

$$Q(-2) = 56 \qquad Q(2) = 0 \dots \textbf{ máme to}$$

Číslo $\alpha = 2$ je kořenem polynomu Q. Polynom Q je tedy beze zbytku dělitelný kořenovým činitelem $(x - 2)$. Dělením obdržíme:

$$(x^3 - 3x^2 - 18x + 40) : (x - 2) \;=\; x^2 - x - 20.$$

Kvadratický polynom již umíme rozložit: $x^2 - x - 20 \;=\; (x - 5)(x + 4)$.

Celkově tedy máme: $x^3 - 3x^2 + x + 2 \;=\; (x - 2)(x - 5)(x + 4)$.

Krok 2: rozklad racionální funkce $P(x)/Q(x)$

Rozklad racionální funkce $P(x)/Q(x)$ na součet tzv. *parciálních (= částečných) zlomků* je druhým krokem integrace. Postup závisí na tom, jak je rozložen polynom Q.

Připomeňme, že předpokládáme $\deg P < \deg Q$.

Bez újmy na obecnosti můžeme dále předpokládat, že polynomy P a Q nemají žádného společného dělitele, jímž by byl polynom stupně ≥ 1. V opačném případě zlomek $P(x)/Q(x)$ společným dělitelem krátíme.

Nyní postupně projdeme všechny uvažované případy I a) – II d) a ukážeme, zda a jak lze $P(x)/Q(x)$ rozložit.

I. $\boxed{\deg Q = 2}$

I a) $P(x)/Q(x)$ nelze v reálném oboru rozložit – je to již parciální zlomek

I b) $Q(x) = q_0\,(x-\alpha)^2$

V tomto případě
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{q_0\,(x-\alpha)^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2}$$

I c) $Q(x) = q_0\,(x-\alpha)(x-\beta)$ **($\alpha \neq \beta$)**

V tomto případě
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{q_0\,(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$$

Výpočet čísel A a B – ukážeme na konkrétních příkladech.

Příklady: viz TABULE

II. $\boxed{\deg Q = 3}$

II a) $Q(x) = q_0\,(x-\alpha)(x^2+rx+s)$

V tomto případě $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{q_0\,(x-\alpha)(x^2+rx+s)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+D}{x^2+rx+s}$$

II b) $Q(x) = q_0\,(x-\alpha)^3$

V tomto případě $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{q_0\,(x-\alpha)^3} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{D}{(x-\alpha)^3}$$

II c) $Q(x) = q_0\,(x-\alpha)(x-\beta)^2$

V tomto případě $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{q_0\,(x-\alpha)(x-\beta)^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{D}{(x-\beta)^2}$$

II d) $Q(x) = q_0\,(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

V tomto případě $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x)}{q_0\,(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)} = \dfrac{A}{x-\alpha} + \dfrac{B}{x-\beta} + \dfrac{D}{x-\gamma}$

Příklady: viz TABULE

Krok 3: integrace jednotlivých parciálních zlomků

1) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^k} = \begin{cases} \ln|x-\alpha| + C & (k=1) \\ -\dfrac{1}{x-\alpha} + C & (k=2) \\ -\dfrac{1}{2\,(x-\alpha)^2} + C & (k=3) \end{cases}$$

pro $x \in (-\infty, \alpha)$ a $x \in (\alpha, \infty)$ (užitím substituce $u = x - \alpha$)

2) $\displaystyle\int \frac{P(x)}{x^2+rx+s}\,\mathrm{d}x,$ kde $\deg P \leq 1$ (tj. $P(x) = ax + b$)
a polynom $x^2 + rx + s$ není rozložitelný v reálném oboru
(což znamená, že nemá reálné kořeny, neboli diskr. < 0)

Nejprve provedeme rozklad

$$\frac{ax+b}{x^2+rx+s} = A\,\frac{2x+r}{x^2+rx+s} + \frac{B}{x^2+rx+s}\,.$$

(Na příkladu ukážeme, jak najít koeficienty A a B – viz TABULE.)

První zlomek vpravo má tu vlastnost, že čitatel je roven derivaci jmenovatele.
Integrál tohoto zlomku vypočítáme pomocí substituce $u = x^2 + rx + s$:

$$\int \frac{2x+r}{x^2+rx+s}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C$$

$$= \ln|x^2+rx+s| + C$$

pro $x \in (-\infty, \infty)$.

3) Nakonec zbývá integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + rx + s}$.

Označme $D = r^2 - 4s$. Připomeňme, že $D < 0$.

Můžete si buď pamatovat vzorec

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + rx + s} = \frac{2}{\sqrt{-D}} \operatorname{arctg} \frac{2x + r}{\sqrt{-D}} + C \qquad \text{pro } x \in (-\infty, \infty)$$

nebo postup, kterým se integrál vypočítá, a který si ukážeme na konkrétním příkladu.

Příklad: viz TABULE