Matematika I – přednáška 16

Shrnutí co bylo minule

Asymptoty, průběh funkce, oskulační kružnice.

Co bude dnes

Taylorův polynom.

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching
(pro osobní potřeby, nenahrazuje přednášku ani skripta).

Matematika I – přednáška 16

Taylorův polynom, Taylorova věta

Motivace. Předpokládejme, že funkce f má derivace až do řádu n (včetně) v bodě x_0. Hledejme polynom T_n stupně nejvýše n, který v okolí bodu x_0 nejlépe aproximuje funkci f. Polynom můžeme psát ve tvaru

$$T_n(x) \;=\; a_0 \;+\; a_1 \cdot (x - x_0) \;+\; a_2 \cdot (x - x_0)^2 \;+\; \ldots \;+\; a_n \cdot (x - x_0)^n,$$

kde koeficienty a_0, a_1, ... , a_n teprve budou určeny.

Matematika I – přednáška 16

Taylorův polynom, Taylorova věta

Motivace. Předpokládejme, že funkce f má derivace až do řádu n (včetně) v bodě x_0. Hledejme polynom T_n stupně nejvýše n, který v okolí bodu x_0 nejlépe aproximuje funkci f. Polynom můžeme psát ve tvaru

$$T_n(x) \;=\; a_0 \;+\; a_1 \cdot (x - x_0) \;+\; a_2 \cdot (x - x_0)^2 \;+\; \ldots \;+\; a_n \cdot (x - x_0)^n,$$

kde koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ teprve budou určeny.

Požadavek nejlepší aproximace respektujeme takto: polynom T_n konstruujeme tak, aby měl v bodě x_0 stejnou hodnotu a také stejné derivace až do řádu n, jako funkce f:

$$T_n(x_0) = f(x_0), \quad T_n'(x_0) = f'(x_0), \quad T_n''(x_0) = f''(x_0), \quad \ldots, \quad T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Toto je $n+1$ podmínek. Z těchto podmínek vypočítáme:

$$a_0 = f(x_0), \qquad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \qquad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \qquad \ldots, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Odvození: viz TABULE

Dosazením do $T_n(x)$ dostaneme:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Toto je tzv. *Taylorův polynom stupně n funkce f o středu v bodě x_0.* Je-li $x_0 = 0$, užívá se též název *Mac Laurinův polynom.*

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

PF:

Sestavte Taylorův polynom 5. stupně

$f(x) = e^x$ v $x_0 = 0$.

$f(x) = e^x$ $\quad f(x_0=0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x$ $\quad f'(0) = 1$

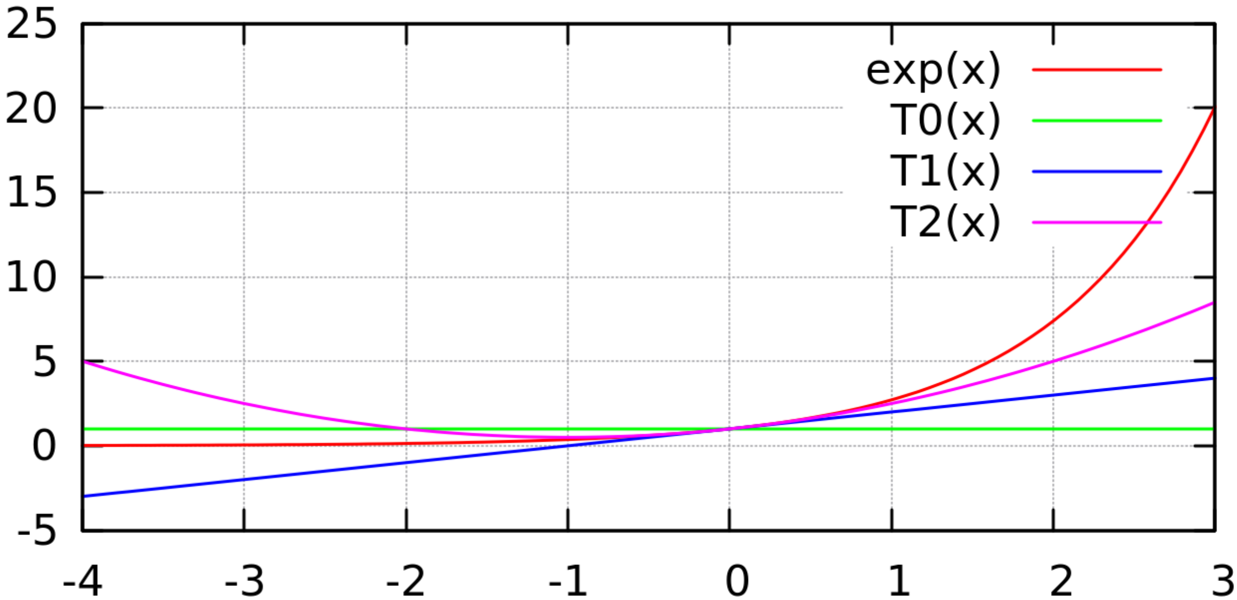
$f''(x) = e^x$ $\quad f''(0) = 1$

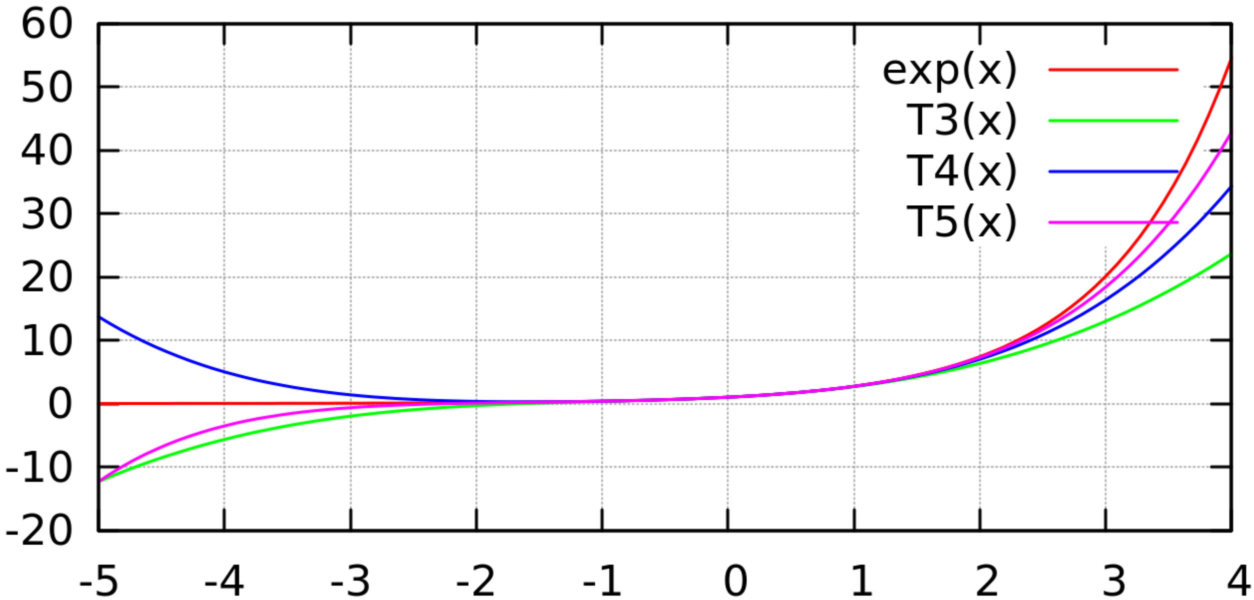
$\vdots$

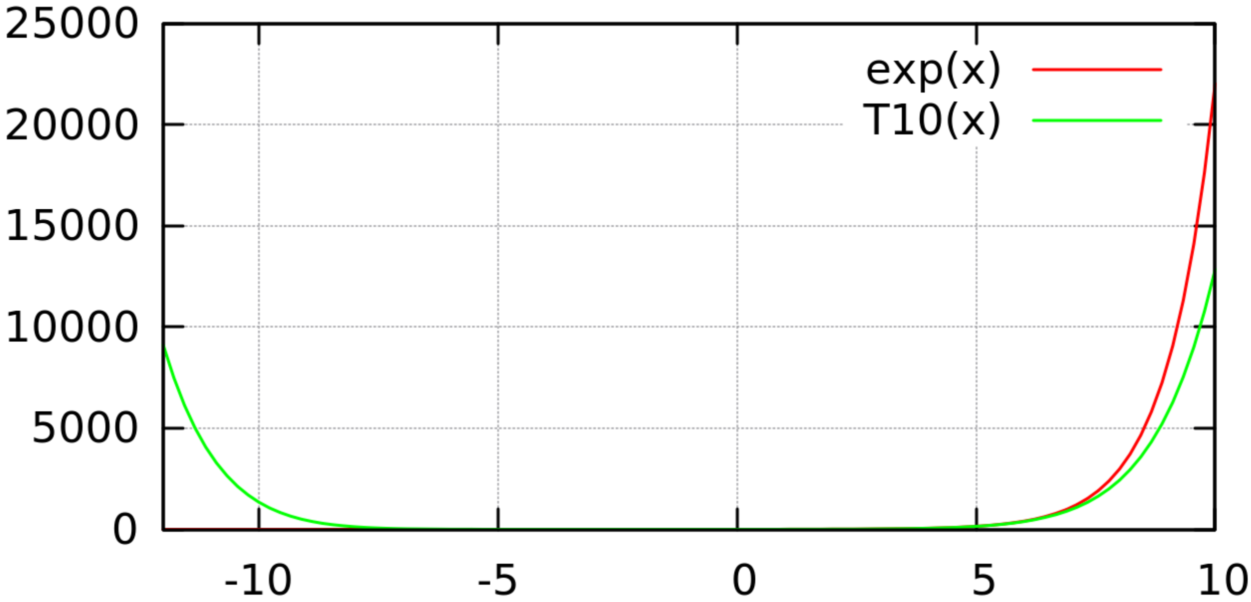
$f^{(5)}(x) = e^x$ $\quad f^{(5)}(0) = 1$

$$T_5(x) = 1 + \frac{1}{1}(x-0)^1 + \frac{1}{2\cdot 1}(x-0)^2 + \frac{1}{3!}(x-0)^3 + \frac{1}{4!}(x-0)^4 + \frac{1}{5!}(x-0)^5$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$


exp(x)
T0(x)
T1(x)
T2(x)
25
20
15
10
5
0
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3


60
50
40
30
20
10
0
-10
-20
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
exp(x)
T3(x)
T4(x)
T5(x)


exp(x)
T10(x)
25000
20000
15000
10000
5000
0
-10
-5
0
5
10

Dosazením do $T_n(x)$ dostaneme:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Toto je tzv. *Taylorův polynom stupně n funkce f o středu v bodě x_0.* Je-li $x_0 = 0$, užívá se též název *Mac Laurinův polynom.*

Důležité příklady:

1) **Mac Laurinův polynom funkce e^x stupně n:** $T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$

2) **Mac Laurinův polynom funkce $\sin x$ stupně $n = 2k - 1$, kde $k \in \mathbb{N}$:**

$$T_{2k-1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \qquad \Big(\equiv T_{2k}(x)\Big).$$

3) **Mac Laurinův polynom funkce $\cos x$ stupně $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$:**

$$T_{2k}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \Big(\equiv T_{2k+1}(x)\Big).$$

Další příklady:

Maclaurinovy řady běžných funkcí [editovat | editovat zdroj]

- Maclaurinova řada polynomu je tentýž polynom.
- aproximovanou hodnotu funkce e^x v blízkosti bodu $x = 0$ určíme tak, že se omezíme pouze na *n* členů Taylorova rozvoje, čímž získáme Taylorův polynom stupně *n-1*

Taylorův rozvoj: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \text{ pro } x \in (-\infty, \infty)$

aproximovaná hodnota funkce: $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{(n)!}$.

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ pro } x \in (-1, 1)$
- $(1+x)^r = 1 + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \binom{r}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n \text{ pro } r \in \mathbb{R}, x \in (-1, 1)$, kde $\binom{r}{n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{r-k+1}{k} = \frac{r \cdot (r-1) \cdots (r-n+1)}{n!}$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \text{ pro } x \in (-1, 1\rangle$
- $a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 a}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln a)^n}{n!} \text{ pro } a > 0, x \in (-\infty, \infty)$
- $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots\right] = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \; x \in (-1, 1)$

Goniometrické funkce:

Matematická přestávka

Inženýr po smrti přijde k nebeské bráně a chce vstoupit. Svatý Petr se ale omlouvá, že mají plno a že ho nemůže pustit. Ale inženýři vždycky končí v nebi, oponuje inženýr. To máš pravdu, ale bohužel to nejde. A kam mám teď jít? Tak jdi do pekla, tam mají ještě volno. Inženýr ho tedy poslechne. V pekle se diví, co tam inženýr chce, ale ten jim to vysvětlí a nabídne své služby. Po půl roce jde na návštěvu bůh a diví se, že v pekle mají všechno krásně zrenovované, opravené kotle, trubky září čistotou. Ďábel mu říká, že je to díky inženýrovi, kterého v nebi nechtěli. Bůh říká, že to tak nenechá a že chce inženýra nazpátek. Ďábel ho ale nechce dát. Tak já tě zažaluju, rozčílí se bůh. No to chci vidět jak, směje se mu ďábel, když jsou všichni právníci v pekle.

V bodech $x \neq x_0$ obecně neplatí $T_n(x) = f(x)$. Nahradíme-li tedy $f(x)$ polynomem $T_n(x)$, dopustíme se jisté chyby. Označme ji $R_{n+1}(x)$. Přesně tedy platí rovnost

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x).$$

Toto je tzv. *Taylorův vzorec.* Výraz $R_{n+1}(x)$ se nazývá *zbytek po n–tém členu.* Dosadíme-li za $T_n(x)$, dostáváme Taylorův vzorec ve tvaru

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x).$$

Následující věta poskytuje informaci o tom, jak lze zbytek vyjádřit (a tudíž i odhadnout).

Věta (Taylorova). *Nechť funkce f má derivace až do řádu $n+1$ (včetně) v intervalu (a,b) a nechť $x_0 \in (a,b)$. Pak ke každému $x \in (a,b)$ existuje bod ξ ležící mezi x a x_0 tak, že*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}.$$

Příklad užití: viz TABULE **Další příklady:**

Př.: Jaké největší chyby se dopustíme při použití T5(x) s x0 = 0 pro aproximaci f-ce sin x na intervalu (-1,1) ? A pro T6(x) ?

Př:

Pro jak velký interval je maximální chyba menší než 10^{-2} při náhradě f-ce $\ln(x)$ pomocí $T_3(x)$ s $x_0 = 1$?

Př:

Jaký stupeň Taylorova polynomu se středem v bodě 0 musím použít, když chci spočítat Eulerovo číslo s přesností na 10^-5?