Matematika 5 – 27. 6. 2019

Upozornění: Výsledky bez zřetelného postupu výpočtu nebudou uznány.
Pokud použijete nějaký vzorec, pak ho uveďte.

$\boxed{\textbf{1.}}$ a) Vypočítejte střední hodnotu funkce
$f(x) = x^3 \cdot \sqrt{16 - x^4}, \quad x \in \langle 0, 2 \rangle.$

b) Vypočítejte integrál $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - 4}\,\mathrm{d}x$. Určete intervaly jeho existence.

c) Rozhodněte výpočtem, zda konverguje nevlastní integrál $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{2x^2 + 8}\,\mathrm{d}x$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ a) Zdůvodněte existenci absolutních extrémů funkce $f(x, y) = 2x^3 + y^2 - 2xy - 8x$ na úsečce $M = \{ [x, y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x + y = 1,\ -3 \le x \le 0\}$. Tyto absolutní extrémy nalezněte, tj. určete jejich polohu, typ a hodnotu.

b) Určete vektorové pole $\mathbf{g} = grad(f)$. Sestavte rovnici tečné roviny ke grafu funkce v bodě $A = [1, 2]$.

c) Nakreslete kladně orientovanou křivku $4x^2 + 9y^2 = 36 \quad x > 0$.

d) Spočítejte práci pole $\mathbf{g}$ po křivce z bodu c).

$\boxed{\textbf{3.}}$ a)Určete maximální řešení Cauchyho úlohy $\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 20\cos 2t + 4, \quad x(0) = -4, \dot{x}(0) = 2$

b) Zapište tvar partikulárního řešení pro danou rovnici z a) s pravou stranou $f(t) = 2e^{2t}$ (neznámé konstanty nepočítejte).

c) Napište libovolnou ODR druhého řádu, pro kterou platí, že řešení rovnice homogenní je $x_H = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Je dána Cauchyho úloha

$$y''' - \frac{x}{y} = \frac{2}{x+1} \qquad y(3) = 2, \quad y'(3) = 4, \quad y''(3) = 1$$

a) Zapište oblast existence a jednoznačnosti dané CÚ.

b) Užitím Eulerovy metody s krokem $h = 2$ spočítejte aproximaci $y''(1)$.

c) Užitím Collatzovy metody s krokem $h = 2$ spočítejte aproximaci $y''(1)$.

d) Jakého řádu je Collatzova metoda? Odhadněte, jak se změní globální chyba v daném bodě při změně kroku z h na $h/3$ u Collatzovy metody?