Matematika 5 – 26. 3. 2019

1. Je dána funkce

a) Napište rovnici normály ke grafu funkce $f(x) = x^2 + 1$ v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 1$.

b) Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce $g(x,y) = x^2 + y^2$ v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$, je-li $x_0 = 1$ a $y_0 = 2$.

c) Jaká je střední hodnota funkca $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(x)-1}}$ na intervalu $\langle 0, 4 \rangle$?

---

2. a) Určete definiční obor a vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 - 25 \ln y$. V bodech extrému vypočítejte funkční hodnotu, výsledek odhadněte (na celá čísla).

b) Je dána funkce $g(x,y) = x^2 + y^2 + xy$. Vypočtěte gradient funkce $g(x,y)$ a určete bod A, ve kterém funkce nejrychleji roste ve směru vektoru $\overrightarrow{s} = (4,5)$. Určete derivaci funkce f v bodě $B = [-2;1]$ ve směru $\overrightarrow{v} = (3,4)$.

c) Načrtněte kladně orientovanou křivku $x^2 - 2x + 2y^2 = 2$. Předpokládejte, že vektorové pole $\vec{f}(x,y) = (U(x,y), V(x,y))$ je potenciální v $\mathbb{E}_2$. Určete křivkový integrál tohoto pole po zadané křivce.

---

3. a) Zapište obecně postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy pro diferenciální rovnici prvního řádu v normálním tvaru.

b) Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y - x^2 y}{1 - y}$$

.

c) Najděte řešení Cauchyovy úlohy pro danou rovnici pro počáteční podmínky: I) $y(2) = 3$, II) $y(0) = 3$.

---

4. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro rovnici 2. řádu v samoadjungovaném tvaru

$$-((x+1.5)y')' + x^2 y = x \qquad y(2) = 1, \quad y(6) = 0$$

a) Zapište (obecně) podmínky postačující pro existenci a jednoznačnost rešení Dirichletovy okrajové úlohy pro ODR 2. řádu v samoadjungovaném tvaru. Ověřte, zda jsou splněny pro zadanou konkrétní úlohu.

b) Užitím Taylorova rozvoje ukažte, že pro dostatečně hladkou funkci $u(x)$ platí

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h)$$

c) Sestavte síťové rovnice pro řešení dané úlohy s krokem $h = 1$. Soustavu rovnic zapište v maticovém tvaru.

d) Napište podmínky pro konvergenci Gaussovy–Seidelovy iterační metody. Je tato iterační metoda pro soustavu rovnic z úlohy c) konvergentní? Zdůvodněte.