Matematika V – 18. 6. 2019

Upozornění: Výsledky bez zřetelného postupu vašeho výpočtu nebudou uznány.

Obrázky stačí načrtnout, musí však obsahovat podstatné údaje: popis os, měřítko, popis křivek (ploch) a vyznačení bodů, které jsou pro řešení úlohy důležité. Pokud použijete vzorec, nebo větu, pak je uveďte.

1. Dána matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Najděte vlastní čísla dané matice $\boldsymbol{A}$.

b) Pro největší z vlastních čísel zapište soustavu rovnic pro výpočet vlastních vektorů. Soustavu vyřešte a napište odpovídající vlastní vektory.

c) Ověřte (výpočtem), že pro vlastní čísla zadané matice platí $det\boldsymbol{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$ a navíc $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$.

d) Jaká budou vlastní čísla a vlastní vektory matice transponované A^T?

2. Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2y^2 - 4xy$ (nezapomeňte uvést funkční hodnoty).

b) Zdůvodněte existenci a určete absolutní extrémy funkce $g(x, y) = xy^2 - x^3$ na množině $M = \{\, [x, y] \in \mathbb{E}_2 \,;\; x^2 + y^2 - 2x \leq 0,\; y \geq 0\}$.

c) Načrtněte množinu M, do obrázku označte polohu extrémů.

d) Zapište vektorové pole $\vec{g}(x, y)$, jehož potenciálem je daná funkce $f(x, y)$.

3. Dána Dirichletova úloha

$$-((x + 1,5)y')' + x^2 y = 1, \quad y(-1) = 1, \quad y(3) = 2$$

a) Ukažte, že daná Dirichletova úloha je jednoznačně řešitelná.

b) Sestavte síťové rovnice, které vzniknou při řešení Dirichletovy úlohy s krokem $h = 1$.

c) Vzniklou soustavu lineárních rovnic zapište maticově a ukažte, že Jacobiho iterační metoda pro danou soustavu bude konvergovat.

d) Spočítejte $\mathbf{X}^{(1)}$ Jacobiho iterační metodou při volbě $\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{0}$.

4. Dána Cauchyho úloha

$$y' = \frac{x}{x^2 y - y}, \quad y(\sqrt{2}) = -1.$$

a) Určete oblast existence a jednoznačnosti řešení dané CÚ.

b) Určete obecné řešení dané diferenciální rovnice.

c) Určete maximální řešení dané CÚ.