Matematika 5 – 12. 2. 2019

1.

a) Je dána funkce $f(x) = x^2 - \ln(1-x)$. Napište Taylorův polynom $T_2(x)$ stupně 2 o středu $x_0 = 0$ zadané funkce f. Pomocí $T_2(x)$ určete přibližně hodnotu $f(1/2)$.

b) Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_3(x)$. Pomocí $|R_3|$ odhadněte velikost chyby přibližného výpočtu hodnoty $f(1/2)$ z úlohy a).

c) Rozhodněte výpočtem, zda konverguje nevlastní integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+4}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

---

2. Je dána reálná funkce dvou proměnných: $f(x,y) = x^2 - x - xy + y^2 - \ln xy$

a) Vypočítejte gradient dané funkce f. Jaká je geometrická interpretace gradientu funkce v bodě?

b) Najděte globální extrémy funkce f na trojúhelníku s vrcholy $A = [\frac{1}{4}; \frac{1}{4}], B = [3;3], C = [\frac{1}{4}; 3]$

c) Napište rovnice tečných rovin v bodech $P = [\frac{1}{2}; 2], Q = [2;1]$

d) Zapište vektorové pole $\vec{g}(x,y)$, jehož potenciálem je daná funkce $f(x,y)$.

---

3. Je dána nelineární autonomní soustava $\dot{x} = xy + x,\ \ \dot{y} = xy + y$.

a) Určete a načrtněte všechny oblasti ve fázové rovině, jejichž body prochází právě jedna fázová trajektorie soustavy. Odpověď zdůvodněte!

b) Uveďte podmínku, ze které vypočítáte body rovnováhy dané soustavy. Tyto body pak nalezněte.

c) Určete rovnici fázových trajektorií. Speciálně určete trajektorii, která prochází bodem $M = [1;1]$.

d) Napište řešení Cauchyovy úlohy s počáteční podmínkou $x(0) = -1, y(0) = 0$.

---

4. Dána Cauchyova úloha

$$Y' = \begin{pmatrix} \dfrac{y_2 - y_1}{2-x} \\[2ex] y_1 + \dfrac{2}{x+1} \end{pmatrix}, \qquad Y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

a) Zapište interval maximálního řešení dané Cauchyovy úlohy.

b) Vypočítejte $Y(1.5)$ přibližně užitím Eulerovy metody s krokem $h = 1/2$.

c) Vypočítejte $Y(1.5)$ přibližně užitím Collatzovy metody s krokem $h = 1/2$.

d) Převeďte následující úlohu pro ODR 3. řádu na soustavu ODR 1. řádu (včetně počátečních podmínek).

$$y''' + \frac{1}{3-x}\,y' + y = x \qquad y(-2) = 1; \quad y'(-2) = 5; \quad y''(-2) = 2$$