

Matematika 5 – 7. 1. 2019

1. a) Vypočítejte obsah obrazce, který je pro $x \in \langle 0, 4 \rangle$ ohraničen osou x a grafem funkce $f(x) = \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$.
- b) Vypočítejte integrál $\int \frac{5}{x^2-2x+5} dx$. Určete intervaly existence.
- c) Vypočítejte nevládní integrál $\int_0^{+\infty} \frac{5}{x^2-2x+5} dx$. Je tento integrál konvergentní?
- d) Definujte vlastní číslo a vlastní vektor čtvercové matice.
-

2. a) Určete lokální extrémů funkce $f(x, y) = x^2 + y - x\sqrt{y} - 3x + 2$.
V bodech extrémů nezapomeňte uvést funkční hodnoty.
- b) Dán bod $A = [-2; 4]$ a vektory $\vec{s} = (1, 1)$, $\vec{p} = (1, 2)$, $\vec{q} = (2, -1)$. Určete, ve směru kterého z vektorů funkce nejrychleji roste a klesá, odhadněte v těchto případech sklon tečny.
- c) Zdůvodněte, že daná funkce nabývá na úsečce s krajními body $A=[0,0]$, $B=[2,0]$ nabývá svého maxima a minima. Tyto extrémů najděte.
- d) Je dána funkce $f(x) = \sqrt{2x+1}$. Napište Taylorův polynom $T_2(x)$ stupně 2 o středu $x_0 = 0$ zadané funkce f . Pomocí $T_2(x)$ určete přibližně hodnotu $\sqrt{5/3} = f(?)$ a užitím Lagrangeova tvaru zbytku $|R_3|$ odhadněte velikost chyby přibližného výpočtu této hodnoty.
-

3. Dána diferenciální rovnice $\ddot{x} - \dot{x} - 2x = f(t)$.
- a) Určete fundamentální systém a obecné řešení homogenní rovnice.
- b) Pro následující pravé strany napište odhady partikulárních řešení:
(neznámé koeficienty nepočítejte)
- I) $f(t) = 8e^{3t} + 4$ II) $f(t) = 5te^{2t}$ III) $f(t) = 2\cos 2t$
- c) Pro případ I) určete maximální řešení Cauchyovy úlohy s počátečními podmínkami $x(0) = 9, \dot{x}(0) = 9$.
-

4. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro rovnici 2. řádu v samoadjungovaném tvaru

$$-((x+1.5)y')' + x^2y = x - 2 \quad y(1) = 1, \quad y(5) = 0$$

- a) Zapište (obecně) podmínky postačující pro existenci a jednoznačnost řešení Dirichletovy okrajové úlohy pro ODR 2. řádu v samoadjungovaném tvaru. Ověřte, zda jsou splněny pro zadanou konkrétní úlohu.
- b) Užitím Taylorova rozvoje ukažte, že pro dostatečně hladkou funkci $u(x)$ platí

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

- c) Sestavte síťové rovnice pro řešení dané úlohy s krokem $h = 2$. Soustavu rovnic zapište v maticovém tvaru.
- d) Napište podmínky pro konvergenci Jacobiho iterační metody. Je tato iterační metoda pro soustavu rovnic z úlohy c) konvergentní? Zdůvodněte.
- e) Spočítejte X^1 touto metodou při volbě $X^0 = 0$.