MATEMATIKA 5 - 5.2.2019

1. (a) Definujte pojem derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0.

   (b) Je dána funkce $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + 2$. Najděte bod, ve kterém má tečna sklon 45°. Napište rovnici tečny a rovnici normály ke grafu této funkce v tomto bodě. funkce $f(x)$ z bodu a se středem v bodě $x_0 = 0$.

   (c) Zdůvodněte existenci absolutních extrémů dané funkce $g(x) = \sqrt{|x|} + x$ na intervalu $\langle -2, 4\rangle$. Absolutní extrémy určete (tj. určete jejich polohu a hodnotu).

2. (a) Nakreslete kladně orientovanou křivku $K = \{[x, y] : (x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1, y \geq 0\}$.

   (b) Dáno vektorové pole $\vec{f} = (\sin y + y + 2x, x\cos y + x)$. Spočítejte křivkový integrál $\int \vec{f}(x)\vec{ds}$ podél křivky K z bodu a.

   (c) Dána funkce $g(x) = \frac{1}{1+cx^2}$. Určete konstantu c tak, aby obrazec omezený touto funkcí a osou x na intervalu $x \in \langle 0, +\infty)$ měl plochu $S = 1/2$.

3. (a) Najděte obecné řešení rovnice $\ddot{x} - 2\dot{x} = 4e^{3t} + 4t - 4$.

   (b) Rozhodněte a zdůvodněte, zda diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty může mít následující fundamentální systémy:
   a) $[e^t, cos(t)]$, b) $[e^{2t}, te^{2t}]$, c) $[cos(t), tcos(t)]$, d) $[cos(2t), sin(2t)]$, e) $[cos(t), sin(2t)]$.

4. Dána Cauchyho úloha

$$xy'' + (2-x)y' = 2x, \qquad y(-1) = 0, \quad y'(-1) = -2$$

   (a) Zapište oblast existence a jednoznačnosti dané CÚ.

   (b) Užitím Collatzovy metody s krokem $h = -2$ spočítejte $y(-3)$.

   (c) Ukažte, že pro $y \in C^2$ je výraz $\frac{y(x+h)-y(x)}{h}$ náhradou $y(h)$ duhého řádu přesnosti.