

Případné náměty k tomuto textu, upozornění na nesrovnalosti apod. sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Jedná se o soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) \quad (*)$$

1. Je dána autonomní soustava $\dot{x} = x + y^2, \dot{y} = -x^2 - y$.

- a) Ukažte, že každým bodem fázové roviny prochází právě jedna fázová trajektorie této soustavy.
 b) Vypočítejte všechny body rovnováhy.
 c1) Určete rovnici fázových trajektorií. c2) Speciálně určete trajektorii, která prochází bodem $M = [0, 3]$.

Řešení: a) Jacobiova matice $J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ -2x & -1 \end{pmatrix}$ je spojitá v oblasti $G = \mathbb{E}_2$, což je postačující pro existenci a jednoznačnost fázové trajektorie při zadané počáteční podmínce (Cauchyova úloha).

b) Body rovnováhy určíme řešením soustavy rovnic

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0.$$

Tyto body jsou též řešením dané soustavy diferenciálních rovnic, platí pro ně $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Specifičnost těchto řešení spočívá v tom, že to jsou jednobodové trajektorie.

V daném příkladě se jedná o soustavu dvou rovnic: $x + y^2 = 0, \quad -x^2 - y = 0$.

Z první rovnice vyjádříme $x = -y^2$.

Po dosazení do druhé rovnice a násobení číslem (-1) získáme $y^4 + y = 0$,

kterou upravíme vytknutím na tvar: $y(y^3 + 1) = 0$.

její první řešení je $y_1 = 0$, kterému po dosazení do 1. rovnice odpovídá $x_1 = 0$ a tedy bod rovnováhy $A = [0, 0]$.

Druhá rovnice má však ještě druhé řešení, a to $y_2 = -1$. Tomu po dosazení do 1. rovnice odpovídá $x_2 = -1$. Máme tedy druhý bod rovnováhy: $B = [-1, -1]$.

c) Protože $\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}$, lze danou soustavu převést na jednu rovnici dělením levých a pravých stran:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2 - y}{x + y^2} \text{ v oblasti, kde } P(x, y) \neq 0, \text{ nebo}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + y^2}{-x^2 - y} \text{ v oblasti, kde } Q(x, y) \neq 0.$$

Mimo bodů rovnováhy tedy v obou případech lze odstraněním zlomků upravit na rovnici v diferenciálech v anulovaném tvaru:

$$(x^2 + y)dx + (x + y^2)dy = 0.$$

Tato rovnice se nazývá *diferenciální rovnice pro trajektorie*.

V tomto příkladě se jedná o rovnici exaktní, neboť v oblasti G (která je jednoduše souvislá) je splněna podmínka $\frac{\partial}{\partial x}(x + y^2) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y)$.

Řešením této rovnice jsou křivky (trajektorie) popsány v implicitním tvaru rovnicí:

$$\Phi(x, y) = \textit{konst.}$$

Tomuto vyjádření, tj. rovnici fázových trajektorií se zpravidla říká *obecný integrál soustavy (*)*.

Funkci $\Phi(x, y)$ určíme ze dvou podmínek

$$(1) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = x^2 + y, \quad (2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x + y^2$$

Z první podmínky vypočteme integrováním podle x :

$$\Phi(x, y) = \int (x^2 + y) dx = \frac{x^3}{3} + xy + K(y).$$

Tuto funkci derivujeme podle y a dosadíme do druhé rovnice:

$$(2') \quad x + K'(y) = x + y^2.$$

Zde je **kontrolní místo** výpočtu. Vlastnost exaktní rovnice zaručuje, že v rovnici (2') už nezůstane x !

Je tedy
$$K'(y) = y^2 \Rightarrow K(y) = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + C$$

Řešením dané soustavy jsou trajektorie popsané rovnicí:
$$\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} = C.$$

Hodnotu konstanty C určíme dosazením souřadnic daného bodu M , pak $C = 9$.

Řešením dané Cauchyovy úlohy je fázová trajektorie popsaná implicitně rovnicí

$$\boxed{x^3 + 3xy + y^3 = 27}$$

Poznámka. Podmínky (1) a (2) jsou stejné jako pro výpočet potenciálu $\Phi(x, y)$ vektorového pole $\vec{f} = (x^2 + y, x + y^2)$.

Poznámka k terminologii. Funkci $\Phi(x, y)$ se zpravidla říká *první integrál soustavy* (*). V některých textech, např. ve Sbírce příkladů od S. Čipery, se prvním integrálem rozumí rovnice fázových trajektorií $\Phi(x, y) = konst.$

Poznámka. U některých soustav (*) je odpovídající diferenciální rovnice pro trajektorie nejenom exaktní, ale má i separovatelné proměnné. V takovém případě lze použít metodu separace proměnných.

2. Je dána nelineární autonomní soustava $\dot{x} = \frac{1}{y} - x$, $\dot{y} = y - 4x$.

a) Napište Jacobiovu matici. Určete a načrtněte všechny oblasti, jejichž body prochází právě jedna fázová trajektorie soustavy. Odpověď zdůvodněte !

b) Vypočítejte všechny body rovnováhy dané soustavy.

c1) Určete rovnici fázových trajektorií.

c2) Speciálně určete trajektorii, která prochází bodem $M = [2, 1]$.

Výsledky (obměna příkladu 7.3.2 z textu [3] od L. Herrmanna):

a) Jacobiova matice je spojitá v $G_1 = (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$ a v $G_2 = (-\infty, \infty) \times (-\infty, 0)$.

b) dva body rovnováhy: $[1/2, 2]$, $[-1/2, -2]$

c1) $2x^2 - xy + \ln|y| = C$, $C \in \mathbb{R}$, c2) $2x^2 - xy + \ln y = 6$.

3. Je dána autonomní soustava $\dot{x} = x^2 - y^2$, $\dot{y} = -2x(y + 1)$ a bod $M = [1, 0]$.

Řešte úlohy a), b), c) jako v příkladu 1.

Výsledky (viz skriptum [2], řešený příklad 4.5 v odst. 4.3):

a) Jacobiova matice je spojitá v \mathbb{E}_2 , b) tři body rovnováhy: $[0, 0]$, $[1, -1]$, $[-1, -1]$.

c) $x^2(y + 1) - \frac{y^3}{3} = C$, $C \in \mathbb{R}$, c2) $x^2(y + 1) - \frac{y^3}{3} = 1$.

4. Je dána autonomní soustava $\dot{x} = \frac{x}{1 + y^2}$, $\dot{y} = \frac{\pi}{4 \cos^2 x} - \arctg y$.

Řešte úlohy a), b), c) jako v příkladu 2, bod $M = [\pi/4, 1]$.

Výsledky. a) Jacobiova matice je spojitá v nekonečně mnoha oblastech (pásech) rovnoběžných s osou y :

$$G_k = ((2k - 1)\pi/2, (2k + 1)\pi/2) \times \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

b) jediný bod rovnováhy $[0, 1]$.

c1) $x \arctg y - \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} x = C$, $C \in \mathbb{R}$, c2) $x \arctg y - \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} x = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right)$.

5. Je dána autonomní soustava $\dot{x} = y$, $\dot{y} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ a bod $M = [0, 1]$.

Řešte úlohy a), b), c) jako v příkladu 1.

Výsledky a) Jacobiova matice je spojitá v \mathbb{E}_2 ,

b) jediný bod rovnováhy $[0, 0]$.

c1) Soustava vede k rovnici se separovatelnými proměnnými, výsledkem je rovnice fázových trajektorií

$$\frac{y^2}{2} + \sqrt{x^2 + 1} = C, C \in \mathbb{R}, \quad \text{c2) } \frac{y^2}{2} + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{3}{2}.$$