Matematika 5 – 29. 1. 2019

1. Je dána matice $\boldsymbol{A}$
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 6 & 1\\ 3 & 0 & -1\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

a) Vypočítejte vlastní čísla λ_1, λ_2, λ_3 matice $\boldsymbol{A}$. Ověřte, že pro Vámi vypočtená vlastní čísla platí vztahy pro *stopu* a *determinant* matice, tzn. že platí:
$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=a_{11}+a_{22}+a_{33}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$, resp. $\det(\boldsymbol{A})=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3$.

b) Pro nejmenší (v absolutní hodnotě) vlastní číslo matice $\boldsymbol{A}$ zapište soustavu rovnic pro výpočet vlastních vektorů. Soustavu vyřešte a napište odpovídající vlastní vektory.

---

2. a) Určete fundamentální systém řešení a napište obecné řešení diferenciální rovnice $\ddot{x}+2\dot{x}=0$. Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy pro tuto rovnici s počátečními podmínkami $x(0)=4, \dot{x}(0)=-3$.
Ověřte, že vypočtená funkce je řešením zadané Cauchyovy úlohy.

b) Určete fundamentální systém řešení homogenní diferenciální rovnice $\ddot{x}+16x=0$.
Pomocí metody odhadu určete partikulární řešení nehomogenní rovnice $\ddot{x}+16x=3\cos t$.
Napište obecné řešení této nehomogenní rovnice.

---

3. Je dána nelineární autonomní soustava $\dot{x}=2x+y-1,\ \dot{y}=-\frac{1}{x}-2y+2$.

a) Určete a načrtněte všechny oblasti ve fázové rovině, jejichž body prochází právě jedna fázová trajektorie soustavy. Odpověď zdůvodněte!

b) Uveďte podmínku, ze které vypočítáte body rovnováhy dané soustavy. Tyto body pak nalezněte.

c) Určete rovnici fázových trajektorií. Speciálně určete trajektorii, která prochází bodem $M=[1;2]$.

---

4. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro rovnici 2. řádu v samoadjungovaném tvaru

$$-y''+(1+x^2)y=-x \qquad y(0)=0, \quad y(1)=1$$

a) Zapište (obecně) podmínky postačující pro existenci a jednoznačnost rešení Dirichletovy okrajové úlohy pro ODR 2. řádu v samoadjungovaném tvaru.
Ověřte, zda jsou tyto podmínky splněny pro zadanou konkrétní úlohu.

b) Sestavte síťové rovnice pro danou úlohu a krok $h=0.25$.
Soustavu zapište v maticovém tvaru.

c) Ověřte, zda je možné řešit soustavu z bodu b) Jacobiovou iterační metodou.
Volte $\boldsymbol{X}^{(0)}=\boldsymbol{0}$ a spočítejte iterace $\boldsymbol{X}^{(1)}$, $\boldsymbol{X}^{(2)}$ touto metodou.