První a druhá derivace, geometrický význam. Tečna ke grafu funkce. Taylorův polynom, Lagrangeův tvar zbytku, přibližný výpočet funkční hodnoty, odhad chyby (nepřesnosti) tohoto výpočtu

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Předpoklad: Funkce f má derivace až do řádu n v bodě x_0. Taylorův polynom n-tého stupně dané funkce f (se středem) v bodě x_0:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Lagrangeův tvar zbytku $R_{n+1}(x)$ vyjadřuje chybu (nepřesnost), které se dopustíme při nahrazení funkční hodnoty $f(x)$ hodnotou $T_n(x)$, tj. $R_{n+1}(x) = f(x) - T_n(x)$.

Věta (Taylorova). Nechť funkce f má spojité derivace až do řádu $n+1$ v okolí $U(x_0)$ bodu x_0.

Pak pro každé $x \in U(x_0)$ existuje mezi body x_0 a x bod ξ tak, že $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$.

Protože přesnou polohu bodu ξ zpravidla neznáme, můžeme zmíněnou nepřesnost pomocí tvaru zbytku pouze odhadnout shora. Lze použít odhad $|R_{n+1}(x)| \le \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, kde M_{n+1} je maximum funkce $|f^{(n+1)}|$ na intervalu $\langle x_0, x\rangle$, resp. $\langle x, x_0\rangle$.

V následujících úlohách je dána funkce f, stupeň n a body x_0, x_1.

a) Napište rovnici tečny ke grafu dané funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$. Načrtněte tečnu a tvar grafu funkce f v okolí bodu x_0. Popište chování funkce f v okolí bodu x_0, tj. rostoucí nebo klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).

b) Napište Taylorův polynom $T_n(x)$ dané funkce f se středem v bodě x_0.
Pomocí $T_n(x)$ určete přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = x_1$ (ve tvaru zlomku).

c) Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_{n+1}(x)$ a $R_{n+1}(x_1)$ pro tuto úlohu.
Pomocí $R_{n+1}(x_1)$ odhadněte velikost chyby přibližného výpočtu hodnoty $f(x_1)$ z úlohy b).

1. Funkce $f(x) = \ln(2x+1) - \dfrac{x}{2}$, $n = 2$, $x_0 = 0, x_1 = 1/2$.

Výsl.: a) Derivace $f'(x) = \dfrac{2}{2x+1} - \dfrac{1}{2}$, $f''(x) = \dfrac{-4}{(2x+1)^2}$, $D(f) = D(f') = (-1/2, +\infty)$, $f(0) = 0, f'(0) = 3/2$, rovnice tečny: $y = \dfrac{3}{2}x$. Funkce rostoucí, konkávní, sklon tečny asi 55^o.

b) $f''(0) = -4$, $T_2(x) = \dfrac{3}{2}x - 2x^2$, $f(1/2) \doteq T_2(1/2) = 1/4$.

c) $f'''(x) = \dfrac{16}{(2x+1)^3}$, $R_3(x) = \dfrac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = \dfrac{8}{3(2\xi+1)^3}x^3$, kde ξ leží mezi $x_0 = 0$ a x,

$R_3(1/2) = \dfrac{8}{3(2\xi+1)^3} \cdot \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{3(2\xi+1)^3}$, $\xi \in \langle 0, 1/2\rangle$, $|R_3(1/2)| = |f(1/2) - T_2(1/2)| \le 1/3$.

2. Funkce $f(x) = \sqrt{2x-1} - \dfrac{x^2}{3}$, $n = 2$, $x_0 = 1, x_1 = 3/2$

[Výsl.: Derivace $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} - \dfrac{2x}{3}$, $f''(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{(2x-1)^3}} - 2/3$, $D(f) = \langle 1/2, \infty)$, $D(f') = D(f'') = (1/2, \infty)$. Funkce rostoucí, konkávní, sklon tečny asi 20^o.

$T_2(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{5}{6}(x-1)^2$, $f(3/2) \doteq T_2(3/2) = 5/8$,

$f'''(x) = \frac{3}{\sqrt{(2x-1)^5}}$, $R_3(x) = \frac{1}{2\sqrt{(2\xi-1)^5}}(x-1)^3$, $|R_3(3/2)| = |f(3/2) - T_2(3/2)| \le 1/16$.]

3. Funkce $f(x) = x^2 + \ln x$, $n = 2$, $n = 3$, $x_0 = 1, x_1 = 3/2$

[Výsl.: Funkce rostoucí, konvexní, sklon tečny asi 70^o. $T_3(x) = 1 + 3(x-1) + \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{1}{3}(x-1)^3$,

$f(3/2) \doteq T_3(3/2) = 8/3$. $R_4(x) = -\dfrac{(x-1)^4}{4\xi^4}$, ξ leží mezi $x_0 = 1$ a x, $|R_4(3/2)| = |f(3/2) - T_3(3/2)| \le 1/64$.

Literatura:

[1] J. Neustupa: **Matematika I.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2014 (též 2013).

[2] S.Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: **Sbírka příkladů z Matematiky I**. ČVUT v Praze, 2014 (též 2013).

[3] E. Brožíková, M. Kittlerová: **Diferenciální počet funkcé jedné proměnné** (řešené příklady). Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2007.