Matematika 5: Potenciální vektorové pole. Potenciál. Nezávislost křivkového integrálu vektorové funkce na cestě (pracovní text)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Literatura:
[1] J. Neustupa: **Matematika II.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2008.

[2] E. Brožíková, M. Kittlerová: **Sbírka příkladů z Matematiky II.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2003, dotisk 2007. *(Sbírka **řešených** i neřešených příkladů.)*

Základní pojmy, značení: Vektorovou funkci (vektorové pole) $\vec{f}$ v $\mathbb{E}_2$ se souřadnicovými funkcemi U, V zapisujeme stručně $\vec{f} = (U, V)$. Je to funkce dvou proměnných x, y. Podobně $\vec{f} = (U, V, W)$ v případě vektorové funkce v $\mathbb{E}_3$.

Nebude-li uvedeno jinak, pak zápisem $D \subset \mathbb{E}_k$ rozumíme oblast $D \subset \mathbb{E}_2$ nebo oblast $D \subset \mathbb{E}_3$.

Křivkový integrál vektorové funkce $\int_C \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$, kde C je <u>uzavřená křivka</u> v $\mathbb{E}_2$ nebo v $\mathbb{E}_3$ nazýváme *cirkulací vektorového pole* $\vec{f}$ po křivce C a zapisujeme $\oint_C \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$.

Říkáme, že *křivkový integrál* vektorové funkce $\int_C \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ *nezávisí v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_k$ *na cestě*, jestliže pro libovolné dvě křivky C_1 a C_2 v D, které mají shodný počáteční i koncový bod platí rovnost $\displaystyle\int_{C_1} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{C_2} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$.

Definice. Vektorové pole $\vec{f}$ se nazývá *potenciální pole v oblasti* $D \subset \mathbb{E}_k$, jestliže existuje skalární funkce φ taková, že v D platí

$$\vec{f} = \operatorname{grad}\varphi, \qquad (*)$$

Skalární funkci φ nazýváme *potenciál vektorového pole* $\vec{f}$ v D.

Poznámka: Je-li $\vec{f}$ potenciální pole v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$, pak jeho potenciál φ je určen jednoznačně až na aditivní konstantu.

Věta. Nechť $\vec{f}$ je potenciální a spojité vektorové pole s potenciálem φ v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$. Nechť C je křivka v D s počátečním bodem A a s koncovým bodem B. Pak křivkový integrál $\int_C \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \varphi(B) - \varphi(A)$.

Věta. Nechť $\vec{f}$ je spojité vektorové pole v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$. Pak následující tři výroky jsou ekvivalentní:
a) $\vec{f}$ je potenciální pole v D.
b) Křivkový integrál $\int_C \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ nezávisí v oblasti D na cestě.
c) Cirkulace pole $\vec{f}$ po libovolné uzavřené křivce v D je nulová.

V dalším textu se omezíme na vektorové pole v $\mathbb{E}_2$.

Věta. (Nutná podmínka pro potenciální pole v $\mathbb{E}_2$.) Nechť $\vec{f} = (U, V)$ je potenciální vektorové pole v oblasti $D \subset \mathbb{E}_2$. Nechť jeho souřadnicové funkce U, V mají spojité parciální derivace v D. Pak platí, že $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial y}$ v D.

Oblast $D \subset \mathbb{E}_2$ *se nazývá jednoduše souvislá*, jestliže vnitřek každé uzavřené křivky v D je podmnožinou D.

Věta. (Postačující podmínka pro potenciální pole v $\mathbb{E}_2$.) Nechť
a) D je jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{E}_2$ a
b) $\vec{f} = (U, V)$ je vektorové pole, jehož souřadnicové funkce (U, V) mají v v oblasti D spojité parciální derivace a
c) funkce (U, V) splňují podmínku $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial y}$ v D ("křížový test").

Pak $\vec{f}$ je potenciální pole v D.

Postup při výpočtu:

Podmínka (*) v definici potenciálního pole má v $\mathbb{E}_2$ následující tvar: $\quad (U, V) = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$ v D.

Tato rovnost dvou vektorů představuje splnění dvou podmínek v D (rovnost odpovídajících souřadnic):

$$(1) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = U, \qquad (2) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = V$$

Z podmínky (1) určíme integrováním $\varphi(x,y) = \int U(x,y)\,\mathrm{d}\,x$. Takto vypočtená funkce $\varphi(x,y)$ obsahuje neznámou funkci $C(y)$. Dosazením za φ do podmínky (2) získáme rovnici (2'), ve které nesmí zůstat proměnná x (to je "kontrolní místo" výpočtu). Funkci $C(y)$ pak získáme z rovnice (2') integrováním podle y. Po dosazení za $C(y)$ obdržíme výsledný tvar potenciálu $\varphi(x,y)$. Z podmínky (*) si pak si můžeme ověřit správnost výsledku.

Př a) Ověřte, že vektorové pole $\vec{f} = (3x^2y,\, x^3 + \sqrt{y})$ je potenciální, uveďte největší možnou oblast D. Vypočítejte potenciál $\varphi(x,y)$ tohoto pole $\vec{f}$.

b) Vypočítejte křivkový integrál dané vektorové funkce $\vec{f}$ podél úsečky $\overline{AB}$ od bodu $A = [2,4]$ do bodu $B = [1,1]$.

c) Načrtněte křivku C, která je záporně orientovanou hranicí množiny $M = \{[x,y] : x^2 + (y-3)^2 \leq 8,\, x \geq 0\}$. Určete cirkulaci daného vektorového pole $\vec{f} = (3x^2y,\, x^3 + \sqrt{y})$ podél křivky C.

Řešení: a) $U(x,y) = 3x^2y,\ V(x,y) = x^3 + \sqrt{y}$. Ověřte si, že parciální derivace jsou spojité a "křížový test" je splněn v oblasti $D = \{\,[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ y > 0\}$, která je jednoduše souvislá.

Výpočet potenciálu φ:

Podmínky (1) a (2) mají tvar: (1) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 3x^2y$, (2) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = x^3 + \sqrt{y}$

Z podmínky (1) vypočítáme $\varphi(x,y) = \int 3x^2y\,\mathrm{d}\,x = x^3y + C(y)$.

Po dosazení do (2): $x^3 + C'(y) = x^3 + \sqrt{y}$. Kontrolní místo je tedy splněno. Z rovnice $C'(y) = \sqrt{y}$ určíme $C(y) = \int \sqrt{y}\,\mathrm{d}\,y = \dfrac{2}{3}\sqrt{y^3} + C$. Hledaný potenciál je tedy $\varphi(x,y) = x^3y + \dfrac{2}{3}\sqrt{y^3} + C$.

b) Křivkový integrál $\int_C \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_C (3x^2y,\, x^3 + \sqrt{y}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \varphi([1,1]) - \varphi([2,4]) = -107/3$.

c) Daná křivka je uzavřená. Je to obvod půlkruhu, který leží v oblasti $D = \{\,[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ y > 0\}$, v níž je dané vektorové pole potenciální. Z vlastnosti potenciálu pak vyplývá, že cirkulace daného vektorového pole podél této křivky C je rovna nule.

Většina z následujících úloh je vybrána ze zkoušek v předmětu Matematika IIA.

2. a) Vysvětlete, co to znamená, že integrál $\int_C \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ nezávisí v oblasti $\Omega \subset E_2$ na integrační cestě.

b) Zdůvodněte, zda $\int_C (y \sin x\,,\, y - \cos x) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$ nezávisí v E_2 na integrační cestě.

c) Existuje-li potenciál pole $\vec{f} = (y \sin x\,,\, y - \cos x)$ v E_2, najděte jej a vypočítejte křivkový integrál tohoto pole po křivce C s poč. bodem $A = [0,0]$ a konc. bodem $B = [0,\pi]$.
[b) ověřte splnění postačující podmínky c) potenciál $\varphi(x,y) = y^2/2 - y \cos x + konst$, $\pi^2/2 - \pi$]

V následujících třech úlohách je dáno vektorové pole $\vec{f}$.

a) Napište postačující podmínky pro to, aby vektorové pole $\vec{f} = (U,V)$ bylo potenciální v oblasti $D \subset \mathbb{E}_2$.

b) Ověřte, že postačující podmínky splněny pro dané vektorové pole $\vec{f}$ a danou oblast D (není-li oblast D dána, uveďte největší možnou),

c) Určete potenciál a užijte jej k výpočtu křivkového integrálu vektorové funkce $\vec{f}$ po dané křivce C.

3. a) $\vec{f} = (\dfrac{y^2}{\sqrt{x}}\,,\, 4y\sqrt{x})$, uveďte největší možnou oblast D, C je křivka s počátečním bodem $A = [1,2]$ a koncovým bodem $B = [4;-2]$. [b) $D = \{\,[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x > 0\}$, c) potenciál $\varphi(x,y) = 2\,y^2\sqrt{x} + konst$; 8]

4. a) $\vec{f} = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$, $D = \{\,[x,y] \in \mathbb{E}_2\,;\ x > 0,\ y > 0\,\}$, C_1 je úsečka AB s počátečním bodem $A = [2,4]$ a koncovým bodem $B = [1,2]$, C_2 je kladně orientovaná kružnice $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$.
[c) potenciál $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + konst$; $-\ln 2$ pro C_1, nula pro C_2]

5. a) $\vec{f} = (\dfrac{y^2}{x} + x^2,\, 2y\ln x - \cos 2y)$, uveďte největší možnou oblast D, C je křivka s počátečním bodem $A = [1,\pi/4]$ a koncovým bodem $B = [2;0]$. [potenciál $\varphi(x,y) = x^3/3 + y^2 \ln x - \sin 2y/2 + konst$, 17/6]