Matematika 5: Určitý (Riemannův) integrál. Nevlastní integrál.
(Doplněný pracovní text přednášky ze dne 3. 11. 2015)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Definice Riemannova integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ předpokládá (nutná podmínka existence): interval $\langle a,b\rangle$ je omezený a funkce f je v něm omezená.

Poznámka. Postačující podmínka pro existenci: Funkce f je spojitá na omezeném intervalu $\langle a,b\rangle$. Slabší podmínka: Funkce f je po částech spojitá a omezená na omezeném intervalu $\langle a,b\rangle$.

Pokud nutná podmínka není splněna, pak Riemannův integrál neexistuje. Přesto mohou nastat situace, ve kterých je vhodné se takovým integrálem zabývat.

Předpokládejme tedy, že Riemannův integrál daná funkce f v intervalu $\langle a,b\rangle$ neexistuje, že však pro každé $t \in \langle a,b)$ je funkce f integrovatelná v intervalu $\langle a,t\rangle$.
Jestliže existuje limita

$$\lim{}_{t\to b_-} \left(\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

pak její hodnotu nazýváme *nevlastním Riemannovým integrálem se singulární horní mezí.* Pokud je tato hodnota konečná, pak říkáme, že *integrál konverguje.* Pokud je tato hodnota $+\infty$ nebo $-\infty$, pak říkáme, že *integrál diverguje.*

Analogicky je definován *nevlastní Riemannův integrál se singulární dolní mezí.*

Je-li funkce f v intervalu (a,b) neomezená, mluvíme o *nevlastním integrálu vlivem funkce.* Je-li interval (a,b) neomezený, mluvíme o *nevlastním integrálu vlivem meze.*

Výpočet nevlastního integrálu

Věta IV.6.6. Nechť funkce f je spojitá v intervalu (a,b). Potom existuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim{}_{t\to b_-} F(t) - \lim{}_{t\to a_+} F(t),$$

pokud výraz na pravé straně má smysl.

Poznámka. Je-li funkce f spojitá v intervalu $\langle a,b\rangle$, který je omezený, pak hodnoty limit jsou $F(b)$, resp. $F(a)$ a jedná se o Newtonovu-Leibnizovu formuli pro "běžný"Riemannův integrál.

Příklady. Výpočtem rozhodněte, zda daný nevlastní integrál konverguje či diverguje.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$, konverguje **2.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = +\infty$, diverguje

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi/4.$ **4.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi.$

Řešení příkladu č. 4. Integrovaná funkce je spojitá v intervalu $(-\infty,+\infty)$. Neurčitý integrál je $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C$. Podle výše uvedené věty tedy počítáme nevlastní integrál takto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim{}_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x - \lim{}_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Rozklad racionální funkce na součet parciálních zlomků

Řešený příklad. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = \ln(4/3).$

Řešení: Definiční obor $D(f) = (-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$. V intervalu $(3,+\infty)$ je tedy integrovaná funkce spojitá. Jedná se o nevlastní integrál vlivem horní meze, můžeme postupovat podle uvedené věty. Primitivní funkci určíme pomocí rozkladu na součet parciálních zlomků. Ten má tvar $\dfrac{1}{x^2+x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1}$. Po vynásobení společným jmenovatelem získáme rovnici, která vyjadřuje rovnost dvou polynomů.

$1 = A(x+1) + Bx.$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin nebo dosazením vhodných hodnot, např. $x := -1$, resp. $x := 0$ určíme, že $A = 1, B = -1$.

Je tedy $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x| - \ln|x+1| + C.$

Po úpravě výrazů s logaritmy a využitím toho, že na daném intervalu je $x > 0$ lze primitivní funkci napsat ve tvaru $F(x) = \ln\dfrac{x}{x+1}$.

Výpočet dokončíme podle uvedené věty:

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x}{x+1} - F(3) = \ln 1 - \ln(3/4) = \ln(4/3).$$

Při výpočtu limity jsme postupovali podle věty o limitě složené funkce.

Podobně v následujícím příkladu se stejnou funkcí, kde se však jedná o nevlastní integrál vlivem funkce. Ta není omezená v pravém okolí bodu $x = 0$.

Příklad. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = +\infty$. Primitivní funkce je stejná jako v předchozím příkladu, takže v závěrečné části výpočtu dostáváme:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = F(1) - \lim_{x\to 0_+} \ln\frac{x}{x+1} = \ln(1/2) - \lim_{y\to 0_+} \ln y = \ln(1/2) - (-\infty) = +\infty.$$

5. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 3.$ **6.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = +\infty.$ $\displaystyle F(x) = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|$

Příklad č. 5 je vyřešen ve sbírce [2], a to včetně první části, tj. nalezení primitivní funkce pomocí rozkladu na součet parciálních zlomků.

Integrace per-partes

7. $\displaystyle\int_0^1 x^3\ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{16}.$ **8.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^3\ln x\,\mathrm{d}x = +\infty.$ $\displaystyle F(x) = \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4$

Integrace substitucí

$\boxed{\textbf{9.}}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$ substituce $-x^2 = t$, pak $F(x) = -\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

$\boxed{\textbf{10.}}$ $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{x\,\ln^2 x}\,\mathrm{d}x = 1.$ substituce $\ln x = t$, pak $F(x) = -\dfrac{1}{\ln x}$.

$\boxed{\textbf{11.}}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x = \pi/6$ substituce $3x = t$, pak $F(x) = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{arctg}(3x)$.

$\boxed{\textbf{12.}}$ Je dána funkce $f(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$.

a) Vypočítejte integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Určete intervaly existence.

b) Vypočítejte obsah obrazce, který je pro $x \in \langle 0, 2\rangle$ ohraničen osou x a křivkou $y = f(x)$. Výsledek upravte.

c) Rozhodněte výpočtem, zda konverguje nevlastní integrál $\int_4^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

[Primitivní funkci najdeme pomocí substituce nebo rozkladem na součet parciálních zlomků, $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x+3| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2-9| + C$, $x \in (-\infty,-3)$, $x \in (-3,3)$, $x \in (3,\infty)$, obsah $P = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{9}{5}$, neboť $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{9} < 0$, c) diverguje, $\int_4^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$]

Varianty této úlohy **s jinými funkcemi a intervaly**.

a1) $f(x) = x^3\ln x$, **b1)** $x \in \langle 2, 4\rangle$ **c1)** nevlastní integrál $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

[$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$, $x \in (0,\infty)$, obsah $P = 124\ln 2 - 15$, c) konverguje, $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -1/16$]

a2) $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$, **b2)** $x \in \langle 0, 2\rangle$ **c2)** nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

[$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + C$, $x \in (-\infty,\infty)$, obsah $P = \pi/8$, c) konverguje, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \pi/2$]

a3) $f(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{x}}$, **b3)** $x \in \langle 1/4, 1\rangle$ **c3)** nevlastní integrál $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

[$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$, $x \in (0,\infty)$, obsah $P = \dfrac{5}{12}$, c) konverguje, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$]

Nevlastní (Riemannův) integrál je vysvětlen v kapitole V.6 skripta [1]. Obsahuje neřešené příklady s výsledky a dva příklady řešené. Další příklady, řešené i neřešené, jsou ve Sbírce [2].

Literatura:

[1] J. Neustupa: Matematika I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2014.
[2] S.Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: Sbírka příkladů z Matematiky I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2014.