MAT 5: Diferenciální rovnice 1. řádu. Existence řešení. Separovatelná rovnice (pracovní text, 10.11.2015)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Diferenciální rovnice 1. řádu v normálním tvaru je rovnice $y' = f(x,y)$, (1)
kde f je daná funkce, spojitá v oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$. Neznámá je funkce $y = y(x)$

Funkce $y = y(x)$ se nazývá řešení rovnice (1) na intervalu I (v oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$), jestliže
(a) $[x, y(x)] \in G$ pro každé $x \in I$,
(b) funkce $y = y(x)$ je spojitě diferencovatelná na I,
(c) $y' = f(x, y(x))$ pro každé $x \in I$.

Obrázek

Řešení, ke kterému neexistuje vlastní prodloužení v G se nazývá maximální řešení v G.
Graf (maximálního) řešení se nazývá (maximální) integrální křivka (dané dif. rovnice).

Řešení rovnice (1) se někdy nepodaří nalézt v explicitním tvaru $y = y(x)$,
ale pouze v implicitním tvaru, tj. $\Gamma(x, y, C) = 0$, (2)
kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta.
Jestliže každým bodem $[x_0, y_0]$ oblasti G prochází právě jedna maximální integrální křivka,
pak rovnice (2) se nazývá obecný integrál rovnice (1) v G.

Věta (Existence a jednoznačnost max. řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť funkce $f = f(x, y)$ a funkce $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ jsou spojité v oblasti $G \subset \mathbb{R}^2$.
Pak existuje právě jedno maximální řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$ (CU)
kde $[x_0, y_0]$ je libovolný bod z G.

Poznámky.
1. Geometrická formulace: Jsou-li splněny předpoklady, pak každým bodem oblasti G prochází právě jedna max. integrální křivka.
2. Obecně je zaručena **pouze lokální existence řešení**.
3. Jednoznačnost max. řešení je zaručena předpokladem spojitosti parc. derivace funkce f podle y.

1. Dána diferenciální rovnice $y' = \dfrac{x}{2y\sqrt{x^2+1}}$.

a) Napište postačující podmínky existence a jednoznačnosti maximálního řešení Cauchyovy úlohy pro tuto rovnici. Určete a načrtněte oblasti, ve kterých jsou tyto podmínky splněny.

b) Najděte obecné řešení této rovnice.

c1) Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy s počáteční podmínkou $y(0) = 1$. Nezapomeňte na interval.

c2) ... poč. podmínka $y(0) = -2$.

Varianta zadání. Úloha b) není, je pouze úloha c)

Stejné zadání jako v úloze 1. (resp. ve variantách) pro následující úlohy:

2. Dána Cauchyova úloha $y' = \dfrac{y}{x}$, $y(-1) = -3$.
Výsledky. a) dvě oblasti, OŘ: $y = C\,x$, C.úloha: $y = 3x,\ x \in (-\infty, 0)$

3. Dány dvě Cauchyovy úlohy $y' + y \cdot \sin x = \sin x$, c1) $y(0) = 1$, c2) $y(\pi/2) = 0$.
Výsledky. a) oblast $G = \mathbb{R}^2$, OŘ: $y = 1 - C\,\mathrm{e}^{\cos x}$ c1) $y = 1,\ x \in \mathbb{R}$, c2) $y = 1 - \mathrm{e}^{\cos x},\ x \in \mathbb{R}$

4. Dána Cauchyova úlohy $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \operatorname{tg} x$, $y(0) = -1$.
Výsledky. a) nekonečně mnoho oblastí, OŘ: $y = C/\cos x$, C.úloha: $y = -1/\cos x,\ x \in (-\pi/2, \pi/2)$

5. Dány dvě Cauchyovy úlohy $y' = \dfrac{2xy^2}{4-x^2}$, c1) $y(1) = 1/\ln 3$, c2) $y(-3) = 0$.
Výsledky. a) tři oblasti s hraničními přímkami $x = -2$, $x = 2$, $y = \dfrac{1}{C + \ln|4-x^2|}$,
c1) $C = 0$, $y = \dfrac{1}{\ln(4-x^2)}$, $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$!!!, c2) $y = 0, x \in (-\infty, -3)$