

MATEMATIKA II - vybrané úlohy ze zkoušek v letech 2009–2012
doplňené o další úlohy

3. část KŘIVKOVÉ INTEGRÁLY, GREENOVA VĚTA, POTENCIÁLNÍ POLE,
PLOŠNÉ INTEGRÁLY, GAUSSOVA–OSTROGRADSKÉHO VĚTA

Tento text i výsledky byly kontrolovány, přesto mohlo dojít k pochybení. Nalezené nesrovnalosti ve výsledcích nebo připomínky k tomuto souboru sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz).

Některé úlohy jsou převzaty ze skript [1] a [2]. Jedná se o **základní** doporučenou literaturu pro předmět Matematika II, a to v úrovni A i B. Především ve sbírce [2] lze nalézt další vhodné úlohy pro samostatné počítání.

[1] J. Neustupa: **Matematika II**. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2003 a později.

[2] E. Brožíková, M. Kittlerová: **Sbírka příkladů z Matematiky II**. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2003, dotisk 2007. (*Sbírka řešených i neřešených příkladů*)

Následující výčet nelze chápat jako jednoznačné zařazení uvedených úloh do zkoušky úrovně A, resp. B, ale jako orientační rozlišení. Rozsahem a náročností odpovídají požadavkům zkoušky úrovně B např. úlohy 1 až 3, 6, 8a, 9, 12, 13, 17, 19, 22 až 26, 29, 32, 35, 36, 41 až 43, 47.

Zkoušce úrovně A odpovídají např. úlohy 3 až 8, 10, 11, 14 až 21, 24 až 31, 33, 34, 36 až 40, 43 až 56.

Obrázky stačí načrtnout, musí však obsahovat vše podstatné: popis os, měřítko, **popis** křivek (ploch) a vyznačení bodů, které jsou pro řešení úlohy důležité (průsečíky křivek ap.)

Křivkový integrál skalární funkce, křivkový integrál vektorové funkce, Greenova věta

V následujících pěti úlohách je dána křivka C a délková hustota ρ .

- Navrhněte parametrizaci $X = P(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$ dané křivky C a určete délku vektoru $\dot{P}(t)$.
- Vypočítejte hmotnost křivky C , je-li na ní rozložena hmota s délkovou hustotou ρ .
- Napište, co by příslušný integrál ještě mohl vyjadřovat. Uveďte, zda se jedná o statický moment či moment setrvačnosti, při jaké hustotě a vzhledem k jakému útvaru (bod, přímka, resp. rovina).

1. $C : x^2 + y^2 = 9, x \geq 0, \rho(x, y) = x$. [$m = 18$; statický moment M_y (vzhledem k ose y), je-li $\rho(x, y) = 1$]

2. $C : x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = t/3; t \in \langle 0, 3 \rangle, \rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
[$m = 28\sqrt{82}/3$, c) moment setrvačnosti J_0 (vzhledem k počátku), je-li $\rho(x, y, z) = 1$]

3. $C : x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = t/4; t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \rho(x, y, z) = z^2/(x^2 + y^2)$
[$m = \sqrt{65} \pi^3/96$, c) moment setrvačnosti J_{xy} (vzhledem k rovině xy), je-li $\rho(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2)$]

4. $C : y = \frac{x^2}{2} + 2$ mezi body $A = [0, 2], B = [2, 4], \rho(x, y) = x$. [$m = (5\sqrt{5} - 1)/3$, c) viz úloha č. 1]

5. $C : x = t \cos t, y = t \sin t, z = t; t \in \langle 0, 1 \rangle, \rho(x, y, z) = z$.
[$m = (\sqrt{27} - \sqrt{8})/3$, c) statický moment M_{xy} (vzhledem k rovině xy), je-li $\rho(x, y, z) = 1$]

6. Křivka C je dána parametrizací $X = P(t)$: $x = \cos t, y = 3 \sin t, z = \sqrt{8} \cos t, t \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

- Napište vektor $\dot{P}(t)$ a vypočítejte jeho délku $\|\dot{P}(t)\|$.
- Vypočítejte křivkový integrál $\int_C f \, ds$, kde $f(x, y, z) = xy + 2$. [12π]

7. Zdůvodněte, na které z křivek

- C je kružnice $x^2 - 2x + y^2 = 0$,
 - C je úsečka AB , kde $A = [2, 3], B = [0, 1]$
- existuje integrál

$$\int_C \frac{3 - y}{y - x + 2} \, ds ?$$

Příslušný integrál pak vypočítejte pomocí parametrizace křivky C .

- ne, daná funkce není na křivce C omezená,
- existuje, daná funkce je na úsečce AB spojitá, výsl.: $\sqrt{8}/3$

8. Vypočítejte délku dané křivky C :

a) $C : x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = t/2; t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ (jeden závit šroubovice) [délka $l = \pi \sqrt{17}$]

b) $C : y = \frac{1}{3}x \sqrt{x}, x \in \langle 0; 5 \rangle$ [délka $l = 19/3$]

c) $C : x = R \cos t, y = R \sin t, z = at; t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ (jeden závit šroubovice, $R > 0, a > 0$ jsou konstanty).
[délka $l = 2\pi \sqrt{R^2 + a^2}$]

d) $C : x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ (část asteroidy v prvním kvadrantu, $a > 0$ je konstanta).
[délka $l = 3a/2$]

9. a) C je část křivky $y = x^2$ s počátečním bodem $A = [0, 0]$ a koncovým bodem $B = [2, 4]$.
Navrhnete parametrizaci křivky a užitím křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (x^2, xy)$ působením po křivce C .
- b) Křivka K je úsečka AB , kde $A = [1, 0]$, $B = [2, 3]$. Navrhnete parametrizaci křivky K a vypočítejte její hmotnost, je-li délková hustota $\rho(x, y) = x^2 + y^2$. [a) 232/15, b) $m=16\sqrt{10}/3$]
10. Křivka C je úsečka AB , kde $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$.
- a) Vypočítejte hmotnost této křivky C , je-li délková hustota $\rho(x, y) = x^2 + y^2$.
- b) Vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (x\sqrt{y^2 - 2x}, 0)$ podél této úsečky C od bodu A do bodu B . [a) $m=8\sqrt{2}/3$, b) $(\sqrt{8} - 1)/3$]
11. Křivka C je průnikem daných dvou ploch. Navrhnete parametrizaci této křivky a vypočítejte křivkový integrál dané skalární funkce f .
- a) $f(x, y, z) = y^2 + 2z^2$, křivka C je průnikem rovin $x + y + 2z = 5$, $2x + 5y - 2z = 4$ v nezáporném oktantu, tj. $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. [Parametrizace např. $x = 7 - 4t, y = 2t - 2, z = t, t \in \langle 1, 7/4 \rangle$, výsl. $111\sqrt{21}/32$]
- b) $f(x, y, z) = z^2$, křivka C je průnikem válcové plochy $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ a roviny $4x - 3z = 0$. [80 π]
12. a) Napište tvrzení Greenovy věty.
- b) Načrtněte množinu $M = \{[x, y] : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$. Vyznačte křivku C , která je kladně orientovanou hranicí této množiny M .
- c) Vypočítejte cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (xy, x^2 + 2x)$ podél křivky C , tj. $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$.
(Doporučení: K výpočtu je vhodné použít Greenovu větu). [8/3 + π]
13. Křivka C je záporně orientovaný obvod trojúhelníka s vrcholy $[0, 0]$, $[2, 0]$, $[2, 2]$.
- a) Načrtněte křivku C (včetně dané orientace).
- b) Přímým výpočtem pomocí parametrizace křivky C nebo užitím Greenovy věty určete cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (y^2 - 3y, xy)$ podél křivky C , tj. křivkový integrál $\oint_C (y^2 - 3y, xy) \cdot d\vec{s}$. [13/3]
- 13.1. Varianta této úlohy: Křivka C je záporně orientovaný obvod obdélníka s vrcholy $[0, 0]$, $[3, 0]$, $[3, 1]$, $[0, 1]$, vektorové pole $\vec{f} = (\frac{1}{3}y^3, x^2 + y^2)$. [cirkulace je -8]
14. Pomocí křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (x + 1, 2y)$ působením po dané orientované křivce:
- a) C_1 : úsečka AB , s počátečním bodem $A = [-1, 0]$ a koncovým bodem $B = [1, 0]$.
- b) C_2 : $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ s počátečním bodem $B = [1, 0]$.
- c) Pomocí Greenovy věty určete práci po uzavřené orientované křivce $C = C_1 \cup C_2$.
Souvisí výsledek s nějakou vlastností pole \vec{f} ? (Vysvětlete).
[a) 2, b) -2, c) nula. Ano, neboť dané pole je potenciální...]

V následujících čtyřech úlohách je dáno vektorové pole a orientovaná křivka.

- a) Načrtněte danou křivku $C \subset E_2$. Navrhnete její parametrizaci a zdůvodněte, zda je křivka C orientována souhlasně s touto parametrizací.
- b) Vypočítejte práci, kterou vykoná síla \vec{f} působením po dané orientované křivce C .
15. C je část křivky $x = 2y^2$ od bodu $A = [8, 2]$ do bodu $B = [2, 1]$, síla $\vec{f} = (\sqrt{x} + y, x + \sqrt{y})$. [$-(40 + 32\sqrt{2})/3$]
16. Křivka C daná rovnicí $y = e^x$, kde $|x| \leq 1$, má počáteční bod se souřadnicí $x = -1$, síla $\vec{f} = \left(x^3, \frac{1}{y} \ln y\right)$.
[nula]
17. Křivka C je levá polovina kružnice $x^2 + y^2 = 4$ orientovaná od bodu $[0, 2]$ k bodu $[0, -2]$,
síla $\vec{f} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2}\right)$. [$-\pi$]
18. C je záporně orientovaná křivka daná rovnicí $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, síla $\vec{f} = \left(\frac{2y}{x^2 + 4y^2}, -\frac{2x}{x^2 + 4y^2}\right)$
- c) Je možné v této úloze počítat práci pomocí Greenovy věty? (Odpověď zdůvodněte).
[b) 2π , c) nelze]
19. a) Napište předpoklady Greenovy věty a ověřte, že jsou splněny pro výpočet cirkulace vektorového pole $\vec{f} = (y, -x)$ po záporně orientované křivce $C : x^2 + y^2 = 16$, tj. pro výpočet $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$.

Hodnotu tohoto křivkového integrálu vypočítejte pomocí Greenovy věty.

b) Stejný křivkový integrál vypočítejte bez užití Greenovy věty.

c) Lze na základě vypočtené hodnoty jednoznačně odpovědět, zda dané pole \vec{f} je potenciální v E_2 ? Odpověď zdůvodněte! [cirkulace je 32π , c) není potenciální, cirkulace by musela být nulová]

V následujících dvou úlohách je dán křivkový integrál vektorové funkce.

a) Napište Greenovu větu a ověřte, zda jsou splněny její předpoklady pro výpočet zadaného integrálu.

b) V kladném případě integrál pomocí Greenovy věty vypočítejte.

20. $\oint_C \left(-\frac{1}{x^2}, 2x\right) \cdot \vec{ds}$, je-li křivka C kladně orientovaná a je postupně vyjádřena rovnicí

1) $x^2 + y^2 = 1$, 2) $x^2 - 2x + y^2 = 0$, 3) $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.

[integrály 1) a 2) neexistují, 3) 2π , větu lze použít]

21. $\oint_C y^2 dx + (x + y)^2 dy$, je-li C kladně orientovaný obvod trojúhelníku PQR , kde

$P = [4, 0]$, $Q = [4, 4]$, $R = [0, 4]$. [$128/3$, větu lze použít]

Potenciál, nezávislost křivkového integrálu vektorové funkce na cestě

22. a) Pomocí křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (x + 3y, 3x)$ působením po orientované úsečce s počátečním bodem $A = [0, 1]$ a koncovým bodem $B = [1, 3]$. [$19/2$]

b) Určete potenciál φ vektorového pole $\vec{f} = (x + 3y, 3x)$. Pomocí potenciálu vypočítejte práci z úlohy a). [potenciál $\varphi(x, y) = x^2/2 + 3xy + konst$, $19/2$]

23. a) Pomocí křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (y^2, 2xy)$ působením po křivce C , což je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $A = [0, 0]$ a koncovým bodem $B = [2, 4]$.

b) Ověřte, že vektorové pole $\vec{f} = (y^2, 2xy)$ je potenciální v E_2 . Určete potenciál φ tohoto pole a pomocí něho vypočítejte práci z úlohy a). [a) 32 , b) potenciál $\varphi(x, y) = xy^2 + konst$]

24. a) Zjistěte, zda vektorové pole $\vec{f} = (2x - y^2, 3 - 2xy)$ je potenciální v E_2 . Pokud ano, vypočítejte potenciál φ tohoto pole \vec{f} .

b) Vypočítejte křivkový integrál této vektorové funkce \vec{f} po části paraboly $C_1 : x = -y^2 - 1$ od bodu $[-1; 0]$ do bodu $[-5; -2]$.

c) Určete cirkulaci tohoto pole \vec{f} podél kladně orientované křivky $C_2 : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$. [a) potenciál $\varphi(x, y) = x^2 - xy^2 + 3y + konst$, b) 38 , c) nula]

25. a) Pomocí křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla $\vec{f} = (-x, y)$ působením po orientované křivce C , která je částí kružnice se středem v počátku, a to od bodu $A = [2, 0]$ do bodu $B = [0, 2]$.

b) Ověřte, že vektorové pole $\vec{f} = (-x, y)$ je potenciální v E_2 . Určete potenciál φ tohoto pole \vec{f} a pomocí potenciálu pak vypočítejte práci z úlohy a). [a) 4 , b) potenciál $\varphi(x, y) = -x^2/2 + y^2/2 + konst$]

26. a) Vysvětlete, co to znamená, že integrál $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$ nezávisí v oblasti $\Omega \subset E_2$ na integrační cestě.

b) Zdůvodněte, zda $\int_C (y \sin x, y - \cos x) \cdot \vec{ds}$ nezávisí v E_2 na integrační cestě.

c) Existuje-li potenciál pole $\vec{f} = (y \sin x, y - \cos x)$ v E_2 , najděte jej a vypočítejte křivkový integrál tohoto pole po křivce C s poč. bodem $A = [0, 0]$ a konc. bodem $B = [0, \pi]$.

[b) ověřte splnění postačující podmínky c) potenciál $\varphi(x, y) = y^2/2 - y \cos x + konst$, $\pi^2/2 - \pi$]

27. a) Zjistěte, zda funkce $\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + z^2$ je potenciálem vektorového pole

$$\vec{f}(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}, 2z \right)$$

v oblasti $G = \{[x, y, z] \in E_3; x^2 + y^2 > 0\}$.

b) Vypočítejte křivkový integrál $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$, kde C křivka v G s počátečním bodem $[1, 0, 0]$ a koncovým bodem $[0, 1, 1]$. [a) ano, b) 1]

28. Funkce $\psi = xy + xz + yz$ je potenciálem nějakého vektorového pole \vec{f} .
- Určete největší oblast v E_3 , ve které má ψ spojité parciální derivace a vyjádřete v této oblasti pole \vec{f} .
 - Je-li ještě nějaká jiná funkce potenciálem \vec{f} v této oblasti, pak ji uveďte.
 - Vypočítejte $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$, kde C je křivka daná parametricky rovnicemi $x = -1 + t$, $y = 2 + t/2$, $z = -\cos(t\pi/4)$ pro $t \in \langle 0, 4 \rangle$. [a) $\vec{f} = (y + z, x + z, x + y)$ b) funkce $\psi + konst$, c) 22]

V následujících třech úlohách je dáno vektorové pole \vec{f} .

- Napište postačující podmínky pro to, aby vektorové pole $\vec{f} = (U, V)$ bylo potenciální v oblasti $D \subset \mathbb{E}_2$.
 - Ověřte, že postačující podmínky splněny pro dané vektorové pole \vec{f} a danou oblast D (není-li oblast D dána, uveďte největší možnou),
 - Určete potenciál a užití jej k výpočtu křivkového integrálu vektorové funkce \vec{f} po dané křivce C .
29. $\vec{f} = (\frac{y^2}{\sqrt{x}}, 4y\sqrt{x})$, uveďte největší možnou oblast D , C je křivka s počátečním bodem $A = [1, 2]$ a koncovým bodem $B = [4; -2]$. [b) $D = \{ [x, y] \in \mathbb{E}_2; x > 0 \}$, c) potenciál $\varphi(x, y) = 2y^2\sqrt{x} + konst$; 8]
30. $\vec{f} = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$, $D = \{ [x, y] \in \mathbb{E}_2; x > 0, y > 0 \}$, C_1 je úsečka AB s počátečním bodem $A = [2, 4]$ a koncovým bodem $B = [1, 2]$, C_2 je kladně orientovaná kružnice $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4}$. [c) potenciál $\varphi(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + konst$; $-\ln 2$ pro C_1 , nula pro C_2]
31. $\vec{f} = (\frac{y^2}{x} + x^2, 2y \ln x - \cos 2y)$, uveďte největší možnou oblast D , C je křivka s počátečním bodem $A = [1, \pi/4]$ a koncovým bodem $B = [2; 0]$. [potenciál $\varphi(x, y) = x^3/3 + y^2 \ln x - \sin 2y/2 + konst$, 17/6]

Plošný integrál skalární funkce, plošný obsah

32. Je dána plocha $Q = \{ [x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0 \}$.
- Načrtněte plochu Q a její průmět do roviny $z = 0$. Navrhněte vhodnou parametrizaci plochy Q , napište vektor kolmý k dané ploše a určete jeho délku (při této parametrizaci).
 - Určete hmotnost plochy Q , je-li její plošná hustota $\varrho(x, y, z) = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$.
Návod: Při parametrizaci $z = g(x, y)$, $[x, y] \in B$ je $m = \iint_Q \varrho(x, y, z) dp = \iint_B \varrho(x, y, g(x, y)) \|P_x \times P_y\| dx dy$.
[a) Q je část paraboloidu s vrcholem v bodě $[0, 0, 4]$,
b) např. při parametrizaci $z = 4 - x^2 - y^2$, $[x, y] \in B : x^2 + y^2 \leq 4$ je kolmý vektor $\vec{n} = P_x \times P_y = (2x, 2y, 1)$, jeho délka je $\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$ c) 36π]
33. Je dána plocha Q (hyperbolický paraboloid): $Q = \{ [x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : z = xy, x^2 + y^2 \leq 3 \}$.
- Do tří samostatných obrázků načrtněte křivky, které vzniknou v řezech grafu funkce $z = xy$ rovinou $z = 1$, rovinou $x - y = 0$ a rovinou $x + y = 0$.
 - Navrhněte vhodnou parametrizaci plochy Q . Napište vektor kolmý k ploše Q a vypočítejte jeho délku (při této parametrizaci).
 - Určete plošný obsah plochy Q .
[a) hyperbola $xy = 1$, parabola $z = x^2$ v rovině $y = x$, parabola $z = -x^2$ v rovině $y = -x$,
b) např. při parametrizaci $z = xy$, $[x, y] \in B : x^2 + y^2 \leq 3$ je $\vec{n} = P_x \times P_y = (-y, -x, 1)$, c) $14\pi/3$]
34. a) Vypočítejte $\iint_Q xyz dp$, kde plocha $Q = \{ [x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \in \langle 0, 3 \rangle \}$.
- Vypočítejte $\iint_Q xyz dp$, je-li $Q = \{ [x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 + y^2 = 4, z \in \langle 0, 3 \rangle \}$.
 - Co by mohl vyjadřovat integrál z úlohy a) ?
[a) 18, b) nula, c) hmotnost dané plochy, je-li plošná hustota $\varrho(x, y, z) = xyz$, statický moment M_{xy} (vzhledem k rovině xy), je-li $\varrho(x, y, z) = xy$, též cyklicky M_{xz} a M_{yz} .]

V následujících pěti úlohách je dána plocha $Q \subset E_3$.

- Načrtněte danou plochu Q a navrhněte její parametrizaci. Vypočítejte délku vektoru kolmého k ploše Q (při navržené parametrizaci).
- Určete plošný obsah dané plochy.

35. $Q : 3x + 4y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ [$\frac{\sqrt{26}}{24}$]

36. $Q : x + 2y + z = 6, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ $[3\pi\sqrt{6}]$
37. $Q : z = y^2 - x^2, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ $\left[\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})\right]$
38. $Q : z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1$ $\left[\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1)\right]$
39. $Q : z = \sqrt{12 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq 8$ $[8\pi(3 - \sqrt{3})]$
40. Vypočítejte moment setrvačnosti vzhledem k ose z homogenní plochy Q (hustota $\rho(x, y, z) = konst$), je-li $Q : z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq 2$. $[8k\pi\sqrt{2}]$

Plošný integrál vektorové funkce, tok vektorového pole plochou

V následujících osmi úlohách je dána plocha σ .

- a) Načrtněte danou plochu σ a navrhněte její parametrizaci. Napište vektor kolmý k dané ploše (při této parametrizaci).
- b) Vypočítejte tok zadaného vektorového pole \vec{f} plochou σ při orientaci daným normálovým vektorem \vec{n} .
41. $\vec{f} = (3x, 2y, z)$, σ je část roviny: $\sigma = \{[x, y, z] \in E_3; 2x + 2y + z = 4, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, \vec{n} svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel. $[7]$
42. $\vec{f} = (x, y, 0)$, $\sigma : z = 9 - x^2 - y^2, z \geq 0$, $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ má souřadnici n_3 kladnou. $[81\pi]$
43. $\vec{f} = (z, y, 2x)$, $\sigma = \{[x, y, z] \in E_3; x + 2y + z = 6, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, \vec{n} svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel. $[72]$
44. $\vec{f} = (y, x, z)$, $\sigma = \{[x, y, z] \in E_3; x^2 + y^2 = 16, 0 \leq z \leq 3, x \geq 0, y \geq 0\}$, $\vec{n}(4, 0, 0) = \vec{i}$. $[48]$
45. $\vec{f} = (x, 0, 2z)$, $\sigma = \{[x, y, z] \in E_3; z = x^2 + y^2, z \leq 9\}$, \vec{n} svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ úhel tupý. $[-81\pi/2]$
46. $\vec{f} = (-y, x, z)$, plocha $\sigma = \{[x, y, z] \in E_3; z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq 3, x \geq 0\}$, normálový vektor svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel. $[9\pi]$
47. $\vec{f} = (y, x, 0)$, $\sigma = \{[x, y, z] \in E_3; z = x^2 + y^2, z \leq 4\}$, \vec{n} svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel. $[nula]$
48. $\vec{f} = (z, x^2 + y^2, 1)$, $\sigma : z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 2, y \geq 0$, $\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$. $[-2\pi + 8]$

Gaussova–Ostrogradského věta

V následujících úlohách je dána plocha Q .

- a) Napište Gaussovu–Ostrogradského větu. Ověřte, zda jsou splněny její předpoklady pro výpočet toku zadaného vektorového pole \vec{f} touto plochou Q .
- b) Načrtněte danou plochu. Příslušný tok vypočítejte.
49. $\vec{f} = (x + \cos x, y + e^z, z + z \sin x)$, plocha Q je povrchem tělesa omezeného plochami o rovnicích $z = 4 - x^2 - y^2, z = 0$, plocha je dovnitř orientovaná. $[-24\pi]$
50. $\vec{f} = (x^3, z^2, y^2)$, plocha Q je povrchem tělesa $M = \{[x, y, z] \in E_3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$, plocha Q je vně orientovaná. $[36\pi]$
51. $\vec{f} = (y, x, z^2)$, plocha Q je povrchem tělesa $M = \{[x, y, z] \in E_3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$, plocha Q je orientována vnější normálou. $[8\pi]$
52. $\vec{f} = (x^3, y^3, z^3)$, $Q = Q_1 \cup Q_2$, kde $Q_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0$, $Q_2 : z = 0, x^2 + y^2 \leq 1$, plocha Q je orientována směrem do svého vnitřku. (Daná plocha je povrch polokoule.) $[-6\pi/5]$
53. $\vec{f} = (x^2, y^2, z^2)$, Q je povrch krychle $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ orientovaný směrem vně. $[3a^4]$
54. $\vec{f} = (2x + y^2, 0, 2x - y^2)$, Q je povrch tělesa $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 9$, orientovaný směrem vně. $[486\pi]$
55. $\vec{f} = (x^3, z, y)$, Q je povrch tělesa omezeného plochami $z = x^2 + y^2, z = 4$, vně orientovaný. $[16\pi]$
56. $\vec{f} = (xy^2, yz, x^2z)$, Q je povrch tělesa omezeného plochami $x^2 + y^2 = 4, z = 1, z = 3$, vně orientovaný. $[32\pi]$