

Úlohy z diferenciálního počtu

Průběh funkce (příp. jenom část této úlohy) - doporučené příklady ze Sbírky z Matematiky I (upřesnění a doplnění informace ze cvičení).

$$557. f(x) = e^{x^2+2x}$$

$$629. f(x) = \ln x + \frac{1}{2x-2}$$

$$630. f(x) = (x+2)e^{1/x}$$

$$633. f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$636. 2x - \operatorname{tg} x, \quad \text{na zúženém def. oboru } (-\pi/2, \pi/2)$$

Dále pak

$$576. f(x) = x + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

$$580. f(x) = 4 - x - \frac{4}{x^2}$$

$$583. f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$589. f(x) = \sqrt{x} \ln x$$

$$607. f(x) = e^{1/x}$$

$$612. f(x) = x \operatorname{arctg} x$$

Taylorův polynom

$$650. f(x) = e^{2x-x^2}, \quad n=2, \quad x_0=0$$

$$658. f(x) = \sqrt{6-3x}, \quad n=2, \quad x_0=-1$$

$$664. f(x) = \frac{1}{x}, \quad n=4, \quad x_0=1$$

Další úlohy

1. Limita posloupnosti $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{3n+1}}{3n-2} = 1/3$.

Nápověda: Polynomy pod odmocninami v čitateli mají různé nejvyšší mocniny. Proto není nutné doplňovat na rozdíl čtverců $a^2 - b^2$. Stačí vytknout nejvyšší mocninu, čímž odstraníme neurčitost typu " $\infty - \infty$ ". Pak ve zlomku krátíme a tím odstraníme neurčitost typu " ∞/∞ ".

2. Načrtněte možný tvar grafu funkce v okolí bodu x_0 , jestliže víte, že $\lim_{x \rightarrow x_{0-}} f(x) = -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow x_{0+}} f(x) = 0$. Načrtněte alespoň dvě různé situace.

3. Je dána funkce $f(x) = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$.

a) Napište Taylorův polynom $T_3(x)$ stupně 3 o středu $x_0 = 0$ této funkce f .

b) Má funkce f v bodě $x_0 = 0$ inflexní bod? Odpověď zdůvodněte.

4. Načrtněte graf funkce $f(x) = |x^2 - x - 2|$.

Zdůvodněte existenci absolutních extrémů této funkce na níže uvedených intervalech. Tyto absolutní extrémy pak určete (stačí z grafu), tj. jejich polohu, typ a hodnotu.

a) na intervalu $\langle -2, 2 \rangle$, b) na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$.

5. Zdůvodněte, zda se rovnají dané dvě funkce.

a) $f(x) = \ln(x^4)$, $g(x) = 4 \ln x$,

b) $f(x) = \ln(x^3)$, $g(x) = 3 \ln x$.

6. Vypočítejte limitu funkce $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{e^{x^2} - 1} = 1/3$

7. (Př. 618, Sbírka z Matematiky I)

Vyšetřete, zda a jaké asymptoty má funkce $f(x) = \frac{x e^x}{e^x - 1}$.

8. (Př. 593, Sbírka z Matematiky I)

Pro jakou hodnotu parametru a má funkce $f(x) = x \ln x + ax$ extrém v bodě $x_0 = e^{-2}$?

Je to maximum či minimum a čemu se rovná?