Test č.4, Rozšířené zadání, verze A

1. Je dána funkce $f(x) = \sqrt{1-2x} + \dfrac{x}{2}$. a) Vypočítejte 1. a 2. derivaci, určete $D(f)$ a $D(f')$. Napište rovnici tečny ke grafu dané funkce v bodě $[x_0 = 0,\ ?]$.

b) Napište Taylorův polynom 2. stupně $T_2(x)$ funkce f se středem v bodě $x_0 = 0$. Pomocí $T_2(x)$ vypočítejte přibližně funkční hodnotu $f(1/4)$, výsledek uveďte ve tvaru zlomku.

c) Napište zbytek $R_3(x)$ v Lagrangeově tvaru (pro tuto úlohu). Pomocí něho odhadněte shora chybu (nepřesnost) aproximace hodnoty $f(1/4)$ z úlohy b).

Výsledky. a) Derivace $f'(x) = (-1)\,(1-2x)^{-1/2} + \dfrac{1}{2}$, $D(f) = (-\infty,\ 1/2\rangle, D(f') = (-\infty,\ 1/2)$,
$f(0) = 1$, $f'(0) = -1/2$, tečna: $y = 1 - \dfrac{1}{2}\,x$,

b) $f''(x) = (-1)\,(1-2x)^{-3/2}$, $f''(0) = -1$, $T_2(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\,x - \dfrac{1}{2}\,x^2$, $f(1/4) \doteq T_2(1/4) = 27/32$,

c) $f'''(x) = (-3)\,(1-2x)^{-5/2}$, $R_3(x) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{-3}{\sqrt{(1-2\xi)^5}}\,x^3$, kde ξ leží mezi $x_0 = 0$ a x,

$R_3(1/4) = \dfrac{-1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{(1-2\xi)^5}} \cdot \dfrac{1}{64}$, kde $\xi \in (0, 1/4)$. Existence bodu ξ je zaručena mezi daným středem $x_0 = 0$ a daným bodem $x_1 = 1/4$, ale přesnou polohu neznáme. Funkce $g(\xi) = \sqrt{(1-2\xi)^5}$ je kladná a klesající na intervalu $\langle 0,\ 1/4\rangle$, proto převrácená hodnota $\dfrac{1}{g(\xi)} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-2\xi)^5}}$ je na tomto intervalu rostoucí.
Odhad shora pro $|R_3(1/4)|$ tedy získáme dosazením pravého krajního bodu $\xi = 1/4$ do výrazu $|R_3(1/4)|$, což vede k výsledku $|R_3(1/4)| = |f(1/4) - T_2(1/4)| \leq \sqrt{2}/32$.
Poznámka: Při odhadu $\sqrt{2} \doteq 14/10$ získáme, že $\sqrt{2}/32 \doteq 7/160$.

2. Je dána funkce $f(x) = x\,\mathrm{e}^{1/x}$. a) Určete definiční obor $D(f)$.

b) Najděte intervaly, na nichž je funkce rostoucí, resp. klesající, určete lokální extrémy.

c) Najděte intervaly, na nichž je funkce ryze konvexní (konkávní), rozhodněte o inflexních bodech.

d) Vypočítejte limity funkce f v krajních bodech def. oboru $D(f)$. Vyšetřete asymptoty. Načrtněte graf zadané funkce f.

Výsledky. a) $D(f) = (-\infty,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$, v každém z těchto intervalů je daná funkce spojitá.

b) $f'(x) = \mathrm{e}^{1/x}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$, $D(f') = D(f)$, funkce f je rostoucí na intervalu $(-\infty,\ 0)$, je klesající na $(0, 1\rangle$, rostoucí na $\langle 1,\ +\infty)$. V bodě $x = 1$ má daná funkce ostré lokální minimum, $f(1) = \mathrm{e}$.

c) $f''(x) = \dfrac{1}{x^3} \cdot \mathrm{e}^{1/x}$, funkce f je konkávní na intervalu $(-\infty,\ 0)$, funkce je konvexní na $(0,\ +\infty)$. Daná funkce nemá inflexní bod.

d) Limity: $\lim_{x\to 0_+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0_-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
Asymptoty: Přímka $x = 0$ je svislá asymptota v bodě $x = 0$.
Přímka $y = x + 1$ je šikmá asymptota pro $x \to +\infty$ i pro $x \to -\infty$.
Graf je v textu ze cvičení 20.

Test č.4, Rozšířené zadání, verze B

1. Je dána funkce $f(x) = \ln(4x-3)$. a) Vypočítejte 1. a 2. derivaci, určete $D(f)$ a $D(f')$. Napište rovnici tečny ke grafu dané funkce v bodě $[x_0 = 1,\ ?]$.

b) Napište Taylorův polynom 3. stupně $T_3(x)$ funkce f se středem v bodě $x_0 = 1$. Pomocí $T_3(x)$ vypočítejte přibližně hodnotu $f(7/8)$, výsledek uveďte ve tvaru zlomku.

c) Napište zbytek $R_4(x)$ v Lagrangeově tvaru (pro tuto úlohu). Pomocí něho odhadněte shora chybu (nepřesnost) aproximace hodnoty $f(7/8)$ z úlohy b).

Výsledky. a) Derivace $f'(x) = \dfrac{1}{4x-3} \cdot 4 = 4\,(4x-3)^{-1}$, $D(f) = D(f') = (3/4,\ \infty)$,
$f(1) = \ln 1 = 0$, $f'(1) = 4$, tečna: $y = 4\,(x-1)$,
b) $f''(x) = (-16)\,(4x-3)^{-2}$, $f''(1) = -16$, $f'''(x) = 128\,(4x-3)^{-3}$, $f'''(1) = 128$,
$T_3(x) = 4\,(x-1) - 8\,(x-1)^2 + \dfrac{64}{3}\,(x-1)^3$, $f(7/8) \doteq T_3(7/8) = -2/3$.
Poznámka: Tímto zlomkem je tedy přibližně vyjádřena funkční hodnota $\ln(1/2) = -\ln 2$.
c) $f^{(4)}(x) = 128\,(-3)\,(4x-3)^{-4} \cdot 4 = \dfrac{-128 \cdot 12}{(4x-3)^4}$,
$R_4(x) = \dfrac{-128 \cdot 12}{(4\xi-3)^4} \cdot \dfrac{1}{4!}\,(x-1)^4$, kde ξ leží mezi $x_0 = 1$ a x. V bodě $x_1 = 7/8$ tedy platí

$R_4(7/8) = \dfrac{-64}{(4\xi-3)^4} \cdot \left(-\dfrac{1}{8}\right)^4$, $\xi \in (7/8,\ 1)$. Existence bodu ξ je zaručena, ale přesnou polohu neznáme.
Funkce $g(\xi) = (4\xi-3)^4$ je kladná a rostoucí na intervalu $\langle 7/8,\ +\infty)$, tedy též na intervalu $\langle 7/8,\ 1\rangle$.
Proto převrácená hodnota $\dfrac{1}{g(\xi)} = \dfrac{1}{(4\xi-3)^4}$ je na tomto intervalu klesající.
Odhad shora pro $|R_4(7/8)|$ tedy získáme dosazením levého krajního bodu $\xi = 7/8$ do výrazu $|R_4(7/8)|$,
což vede k výsledku $|R_4(7/8)| = |f(7/8) - T_3(7/8)| \le \dfrac{64}{(1/2)^4} \cdot \left(\dfrac{1}{8}\right)^4 = 1/4$.

2. Je dána funkce $f(x) = x\,\sqrt{6-x}$.

a) Určete def. obory $D(f)$ a $D(f')$. Najděte průsečíky grafu dané funkce s osami.

b) Najděte intervaly, na nichž je funkce rostoucí, resp. klesající, určete lokální extrémy.

c) Najděte intervaly, na nichž je funkce ryze konvexní (konkávní), rozhodněte o inflexních bodech.

d) Vypočítejte funkční hodnoty, resp. limity v krajních bodech $D(f)$ Vyšetřete asymptoty dané funkce v bodech, v nichž to má smysl. Načrtněte graf zadané funkce f.

Výsledky.

a) $D(f) = (-\infty,\ 6\rangle$, v tomto intervalu je daná funkce spojitá. Průsečíky jsou body $[0,\ 0]$ a $[6,\ 0]$.
$f'(x) = \sqrt{6-x} + x \cdot \dfrac{-1}{2 \cdot \sqrt{6-x}} = \dfrac{3\,(4-x)}{2 \cdot \sqrt{6-x}}$. $D(f') = (-\infty,\ 6)$, v tomto intervalu je f' spojitá.

b) Funkce f je rostoucí na intervalu $(-\infty,\ 4\rangle$, je klesající na intervalu $\langle 4,\ 6\rangle$. V bodě $x = 4$ má daná funkce ostré lokální maximum, $f(4) = 4\,\sqrt{2}$.

c) Po úpravě získáme $f''(x) = \dfrac{3\,(x-8)}{4 \cdot (6-x)\,\sqrt{6-x}}$. Pro všechny vnitřní body z $D(f)$, tj. pro $x < 6$ je $f''(x) < 0$. Daná funkce $f$je tedy ryze konkávní v celém def. oboru a nemá inflexní bod.

d) Limity: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $f(6) = 0$.

Asymptoty: Má smysl uvažovat pouze o šikmé asymptotě pro $x \to -\infty$.

Výpočet: $k = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{6-x} = +\infty$. Limita je nevlastní, daná funkce f tedy nemá šikmou asymptotu pro $x \to -\infty$.

Graf je v textu ze cvičení 20.