

Neurčitý integrál - doporučené příklady ze Sbírký příkladů z Matematiky I

Případné náměty k textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Za pomoci tabulkových integrálů (po úpravě) vypočítejte integrály

$$710. \int r^2(1-r^2) dr \quad \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5} + C \right]$$

$$714. \int \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}} \right) dx \quad \left[-\frac{1}{2x} - \sqrt{x} + C \right]$$

$$726. \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx \quad [C - \cotg x - \tg x]$$

$$789. \int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx \quad [x - 2\arctg x + C]$$

$$\text{Př. } \int \tg^2 x dx \quad [\tg x - x + C] \quad \text{Př. } \int (\sin^3 \varphi + \sin \varphi \cos^2 \varphi) d\varphi \quad [-\cos \varphi + C]$$

Metoda per-partes

$$739. \int (3-2x) e^{5x} dx \quad \left[\frac{1}{5} (3-2x) e^{5x} + \frac{2}{25} e^{5x} + C \right]$$

$$740. \int \ln(x^2 e^x) dx \quad \left[2(x \ln x - x) + \frac{1}{2} x^2 + C \right] \quad (\text{Při výpočtu nejprve upravte logaritmus součinu.})$$

$$746. \int \ln^2 x dx \quad [x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C] \quad (\text{Integrand napište ve tvaru } 1 \cdot \ln^2 x.)$$

Metoda substituční

$$832. \int \frac{1}{(x+6)^5} dx \quad \left[-\frac{1}{4(x+6)^4} + C \right]$$

$$762. \int \cotg x dx \quad [\ln |\sin x| + C, x \in (k\pi, (k+1)\pi), k \text{ je celé číslo}]$$

$$772. \int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx \quad [3\sqrt[3]{\sin x} + C]$$

$$777. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \arcsin^3 x} dx \quad \left[C - \frac{1}{2(\arcsin^2 x)} \right]$$

$$779. \int \left(\frac{1}{\sqrt{\ln x}} + \frac{1}{1+\ln^2 x} \right) \frac{1}{x} dx \quad [2\sqrt{\ln x} + \arctg(\ln x) + C]$$

$$783. \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx \quad \left[\frac{1}{4} \arcsin x^4 + C \right]$$

$$784. \int \frac{e^x}{e^{2x}+4} dx \quad \left[\frac{1}{2} \arctg \frac{e^x}{2} + C \right] \quad \text{Př. } \int \frac{e^x}{e^x-1} dx \quad [\ln |e^x-1| + C]$$

$$805. \int \frac{\ln x}{x(1-\ln^2 x)} dx \quad \left[C - \frac{1}{2} \ln |1-\ln^2 x| \right]$$

$$807. \int \frac{3x}{\sqrt{2x+1}} dx \quad \left[\frac{1}{2} \sqrt{(1+2x)^3} - \frac{3}{2} \sqrt{1+2x} = 3x\sqrt{1+2x} - \sqrt{(1+2x)^3} + C \right]$$

$$812. \int e^{2x^2+\ln x} dx \quad \left[\frac{1}{4} e^{2x^2} + C \right]$$

$$816^*. \int \frac{\ln \tg x}{\sin x \cos x} dx \quad \left[\frac{1}{2} \ln^2(\tg x) + C \right]$$

$$\text{Př. } \int \frac{x}{(1+x^2) \ln(1+x^2)} dx \quad \left[\frac{1}{2} \ln(\ln(1+x^2)) + C, x \neq 0 \right]$$

$$919. \int \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} dx \quad [2 \left(\sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1}) \right) + C]$$

$$922. \int \frac{\sqrt{x-1}}{x+2} dx \quad [2 \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{x-1}}{3} \right) \right) + C]$$

V následujících příkladech* použijte metodu per-partes. Při volbě funkcí $u'(x)$, $v(x)$ si všimněte, kterou z funkcí zadaného součinu umíme integrovat.

$$743^*. \int \frac{t \cdot \arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad [t - \sqrt{1-t^2} \arcsin t + C]$$

$$748^*. \int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} dx \quad [\operatorname{tg} x \cdot \ln(\cos x) + \operatorname{tg} x - x + C, x \in (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \text{ je celé číslo}]$$

Integrace racionálních funkcí

$$840. \int \frac{x+1}{x^2+6x+9} dx \quad [\ln|x+3| + \frac{2}{x+3} + C, x \in (-\infty, -3), x \in (-3, +\infty)]$$

$$842. \int \frac{s^3-8}{s^2-3s+2} ds \quad [\frac{s^2}{2} + 3s + 7 \ln|s-1| + C]$$

$$856. \int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} dx \quad [\frac{3}{x-2} + \ln \frac{(x-2)^2}{x^2} + C]$$

$$858. \int \frac{3x-2}{x(x^2+1)} dx \quad [3 \operatorname{arctg} x + \ln(x^2+1) - 2 \ln|x| + C, x \in (-\infty, 0), x \in (0, +\infty)]$$

$$870. \int \frac{x^2-x-3}{(x+1)(x^2+4x+5)} dx \quad [\frac{-1}{2} \ln(x+1) + \frac{3}{4} \ln(x^2+4x+5) - \frac{7}{2} \operatorname{arctg}(x+2) + C]$$

$$878. \int \frac{2x^2-8x+14}{(x^2-1)(x-3)} dx \quad [\ln \frac{|(x+1)^3(x-3)|}{(x-1)^2} + C]$$

Integrace goniometrických funkcí, převážně mocnin funkcí sinus a kosinus

$$887. \int \sin^7 x dx \quad [\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{3 \cos^5 x}{5} + \cos^3 x - \cos x + C]$$

$$890. \int \cos^3 2x dx \quad [\frac{\sin 2x}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 2x}{3} \right) + C]$$

$$894. \int \sin^3 x \cos^5 x dx \quad [\frac{\cos^8 x}{8} - \frac{\cos^6 x}{6} + C]$$

$$899. \int \cos^2 2x dx \quad [\frac{4x + \sin 4x}{8} + C]$$

$$907. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx \quad [\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{3 \sin^3(x)} + C]$$

$$911. \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx \quad [\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C]$$

$$912. \int \cotg^3 x dx \quad [-\frac{\cotg^2 x}{2} - \ln|\sin x| + C]$$

Další vhodné úlohy k samostatnému počítání jsou mj. ve zmíněné Sbírce, a to v odstavci V.3 Integrovní počet (kapitola V. Vybrané úlohy ze zkouškových testů). Obsahuje 42 úloh s neurčitým integrálem. Ke zkoušce úrovně Alfa jsou doporučeny např. úlohy 46 až 50, 52 a 53, 56 až 60, 63 až 74, 76 až 80.