

Opakovací kurs středoškolské matematiky (vybrané partie)– září 2011

František Mráz

Ústav technické matematiky, Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz

I. Mocniny, odmocniny, algebraické výrazy

Upravte (zjednodušte), případně určete číselnou hodnotu. U výrazů udejte, kdy mají smysl.

1. $4n^2 \cdot 3(-n^3)(-2n^4)$
2. $((-2)^{-1})^{-6}$
3. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-14} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$
4. $\left(\frac{2ab}{25x^2y^2}\right)^{-3} : \left(\frac{4a}{5xy^2}\right)^{-2}$
5. $\frac{ax+bx}{ax-bx}$
6. $\frac{x-1}{x^2-x}$
7. $8m - [6m - (2n + 4m)] + 4n$
8. $3x - 4y - (-5y - 6x) - (7x + 8y)$
9. $(2x + 2)x - (x^2 + 2x + 4)$
10. $4n^2 - (2n - 3)^2$
11. $\frac{15x + 4y}{12} - \frac{3y - 22x}{9}$
12. $\left(\frac{1}{b+1} - \frac{2b}{b^2-1}\right) : \frac{b}{1-b}$
13. $(p+q) : \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$
14. $\left(\frac{x-1}{x-2} - \frac{x}{x-1}\right) \left(x - \frac{3x}{x+1}\right)$
15. $\frac{\frac{15}{32}}{-\frac{6}{8}}$
16. $\frac{\frac{6x}{yz}}{\frac{8xz}{y}}$
17. $\frac{b-1+\frac{6}{b-6}}{b-2+\frac{3}{b-6}}$
18. $\left(\frac{-16}{5}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{\frac{64}{25}}{2 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}}$

Výsledky kapitoly I

1. $24n^9$
2. 64
3. $\left(\frac{4}{3}\right)^4$
4. $\frac{1250x^4y^2}{ab^3}$, $abxy \neq 0$
5. $\frac{a+b}{a-b}$, $x \neq 0, a-b \neq 0$
6. $\frac{1}{x}$, $x \neq 0, x \neq 1$
7. $6m + 6n$
8. $2x - 7y$
9. $x^2 - 4$
10. $12n - 9$
11. $\frac{133x}{36}$
12. $\frac{1}{b}$, $b \neq 0, b \neq \pm 1$
13. pq , $p \neq 0, q \neq 0, p+q \neq 0$
14. $\frac{x}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1, x \neq 2$
15. $-\frac{5}{8}$
16. $\frac{3}{4z^2}$, $xyz \neq 0$
17. $\frac{b-4}{b-5}$, $b \neq 3, b \neq 5, b \neq 6$
18. 0, (zkouška př. 91)

II. Rovnice lineární, kvadratické, kubické, s absolutní hodnotou

V množině reálných čísel řešte dané rovnice a proveďte zkoušku.

19. $3(4-x) - 6(3-2x) = 2x - 27$
20. $\frac{t}{2} - \frac{t+5}{3} = \frac{t-3}{2} - \frac{t-2}{3}$
21. $\frac{y+5}{10} - \frac{y-4}{8} = 1$
22. $\frac{25x+6}{15} - (x-1) = \frac{2x}{3} + \frac{7}{5}$
23. $5 + \frac{3}{3u-12} = \frac{5-u}{u-4}$
24. $|2x-7| + |2-x| = 3$

Řešte dané rovnice a proveďte zkoušku:

25. $x^2 + 5x = 0$
26. $(3x+1)(x-\sqrt{5}) = 0$
27. $(3-\lambda)^2 + 4 = 0$
28. $(2x+3)x - (x^2+3x+9) = 0$
29. $3x^2 \cdot x - (x^3+16) = 0$
30. $(1-\lambda)(-1-\lambda) + 5 = 0$
31. $x^3 - 4x^2 + 5x = 0$

Výsledky kapitoly II

19. $x = -3$
20. Nemá řešení
21. $y = 0$
22. $x \in \mathbb{R}$
23. Nemá řešení, neboť $4 \notin D$
24. $x_1 = 2, x_2 = 4$
25. $x_1 = 0, x_2 = -5$
26. $x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = \sqrt{5}$
27. $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$
28. $x_{1,2} = \pm 3$
29. $x = 2$
30. $\lambda_{1,2} = \pm 2i$
31. $x_1 = 0, x_{2,3} = 2 \pm i$

III. Nerovnice lineární, kvadratické, s absolutní hodnotou

V množině reálných čísel řešte dané nerovnice:

32. $2 - 3x \geq 4$ 33. $\frac{4x-3}{5} < \frac{3x-4}{2} - \frac{2x-5}{3}$ 34. $x^3 - 1 > 0$
35. $x^2 - 4 \geq 0$ 36. $x^2 + \frac{7}{2}x - 2 \geq 0$ 37. $2x^2 + 5x < 0$
38. $x^2 - 2x + 5 < 0$ 39. $x^2 + 1 > 0$ 40. $|x - 3| < 2$
41. $|x - 3| < 0$ 42. $|3x + 2| \geq 1$ 43. $|x - 1| < |x - 3|$
44. $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| \leq 1$ 45. $\frac{3}{x-3} < 0$ 46. $\frac{x+2}{2x-1} \leq 1$

Výsledky kapitoly III

32. $x \in (-\infty, -2/3)$ 33. $x \in (-8, +\infty)$ 34. $x \in (1, +\infty)$ 35. $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
36. $x \in (-\infty, -4) \cup (1/2, +\infty)$ 37. $x \in (-5/2, 0)$ 38. $\emptyset$ 39. $x \in \mathbb{R}$ 40. $x \in (1, 5)$
41. $\emptyset$ 42. $x \in (-1, -1/3)$ 43. $x \in (-\infty, 2)$ 44. $x \in (-\infty, 0)$ 45. $x \in (-\infty, 3)$
46. $x \in (-\infty, 1/2) \cup (3, +\infty)$

IV. Funkce

Předpokládá se znalost definičního oboru, grafu a základních vlastností "elementárních" funkcí (především funkce lineární, kvadratická, absolutní hodnota, lineární lomená, odmocnina, exponenciální, logaritmická, goniometrické)

Určete definiční obor dané funkce $y = f(x)$:

47. $y = 3x - 5$ 48. $y = 4x^7 - 5x^3 + \frac{3}{2}x - 8$ 49. $y = \frac{x^3 - 8}{x}$
50. $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ 51. $y = \frac{2x - 3}{x^2 + 2x - 3}$ 52. $y = \sqrt{5 - 3x}$
53. $y = \frac{x - 2}{\sqrt{x + 5}}$ 54. $y = \frac{3x}{\sqrt{2 - x^2}}$ 55. $y = e^{100x - 7}$
56. $y = (x + 2)e^{1/x}$ 57. $y = \sqrt{1 - |x|}$ 58. $y = \sqrt{\sin x}$
59. $y = \ln(x^2 - 1)$ 60. $y = \ln(x^2 + 2x + 3)$ 61. $y = \frac{x}{\ln x}$

Určete hodnoty logaritmické funkce:

62. $\ln 1$ 63. $\ln 0$ 64. $\ln e$ 65. $\ln \sqrt[3]{e}$ 66. $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$ 67. $\ln(-2)$

Výsledky kapitoly IV

47. $x \in \mathbb{R}$ 48. $x \in \mathbb{R}$ 49. $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ 50. $x \in \mathbb{R}$ 51. $x \in \mathbb{R} - \{1, -3\}$
52. $x \in (-\infty, 5/3)$ 53. $x \in (-5, +\infty)$ 54. $x \in (-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$ 55. $x \in \mathbb{R}$
56. $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ 57. $x \in (-1, 1)$ 58. sjednocení intervalů $\langle 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$
59. $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 60. $x \in \mathbb{R}$ 61. $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$
62. 0 63. není definován 64. 1 65. $1/3$ 66. -2 67. není definován

V. Rovnice a nerovnice exponenciální, logaritmické, s odmocninami

V množině reálných čísel řešte dané rovnice. Proved'te zkoušku.

68. $3^x = 81$ 69. $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 16$ 70. $2^x = -8$ 71. $2011^x = 1$ 72. $e^x = \frac{1}{e}$
73. $\sqrt{128} = 8^x$ 74. $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{8}{27}$ 75. $5^{x^2-2} \cdot 5^{3x+4} = 1$ 76. $x^2 e^x + 3x e^x - 4e^x = 0$
77. $(5x-1)e^x + 5e^x = 0$ 78. $e^{\frac{1}{x}} + x e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$
79. $\ln x = 0$ 80. $\ln x = 1$ 81. $\ln x = 3$ 82. $\ln x + 1 = 0$ 83. $\ln(\sqrt{x}) = -2$
84. $\ln(x+1) = 0$ 85. $2 \ln x - 1 = 0$ 86. $2x + 3x \ln x = 0$ 87. $\ln(x^2 - 3) = 0$
88. $\frac{\sqrt{x}}{2} - 1 = 0$ 89. $\sqrt{3x+4} = x$ 90. $x - \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} = 0$
91. $2x \cdot \sqrt{x+2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x+2}} = 0$

Řešte dané nerovnice:

92. $5^x \leq 625$ 93. $\left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{125}{27}$ 94. $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 8$ 95. $e^x + x e^x > 0$
96. $\ln x < 0$ 97. $\ln x \geq 1$ 98. $\ln(x+4) \leq 0$ 99. $x \ln x + 2x \geq 0$

Výsledky kapitoly V

68. $x = 4$ 69. $x = -2$ 70. nemá řešení 71. $x = 0$ 72. $x = -1$ 73. $x = 7/6$
74. $x = -3$ 75. $x_1 = -1, x_2 = -2$ 76. $x_1 = 1, x_2 = -4$ 77. $x = -\frac{4}{5}$ 78. $x = 1$
79. $x = 1$ 80. $x = e$ 81. $x = e^3$ 82. $x = e^{-1} = 1/e$ 83. $x = \frac{1}{e^4}$ 84. $x = 0$
85. $x = \sqrt{e}$ 86. $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ 87. $x = \pm 2$ 88. $x = 4$ 89. $x = 4, (x = -1 \text{ nevyhovuje})$
90. $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 2$ 91. $x_1 = 0, x_2 = -8/5$ 92. $x \in (-\infty, 4)$ 93. $x \in (-3, +\infty)$
94. $x \in (-\infty, -3)$ 95. $x \in (-1, +\infty)$ 96. $x \in (0, 1)$ 97. $x \in \langle e, +\infty \rangle$ 98. $x \in (-4, -3)$
99. $x \in \langle 1/e^2, +\infty \rangle$

VI. Goniometrické funkce

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, x \neq k\pi$$

$$\text{Pro každé } x \in \mathbb{R}: \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Upravte (zjednodušte) dané výrazy. Určete, pro jaká x mají smysl.

100. $\frac{\cos^2 x}{1 + \sin x}$ 101. $\operatorname{cotg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ 102. $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}$

Najděte řešení daných goniometrických rovnic:

103. $\sin^2 x - \sin x = 0$ 104. $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$ 105. $\sin 2x = \operatorname{cotg} x$

Výsledky kapitoly VI

100. $1 - \sin x, x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 101. $\frac{1}{\sin x}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 102. $1, x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
103. $x = k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 104. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 105. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

VII. Komplexní čísla

(imaginární jednotka, algebraický tvar, goniometrický tvar, aritmetické operace, číslo komplexně sdružené, absolutní hodnota, Moivreova věta)

Upravte, případně určete hodnotu:

106. i^3 107. i^4 108. $i^5 - i^6$ 109. $(3 + 7i)i$ 110. $(2 + 3i)(3 - 4i)$
111. $(3 - 2i)^2$ 112. $(-2 + 3i)(-2 - 3i)$ 113. $(2 - 3i)(1 + 4i) - (2 + 3i)(1 - 4i)$

Určete absolutní hodnotu (velikost) komplexního čísla:

114. $z = 3 + 4i$ 115. $z = 4 - 3i$ 116. $z = -3i$ 117. $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
118. $z = -1 + \frac{1}{2}i$ 119. $z = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}i$ 120. $z = \cos x + i \sin x, x \in \mathbb{R}$

Výsledky kapitoly VII

106. $-i$ 107. 1 108. $i + 1$ 109. $3i - 7$ 110. $18 + i$ 111. $5 - 12i$ 112. 13 113. $10i$
114. $|z| = 5$ 115. $|z| = 5$ 116. $|z| = 3$ 117. $|z| = 1$ 118. $z = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 119. $|z| = 1$ 120. $|z| = 1$

VIII. Analytická geometrie v rovině

(body, vektory, hlavně však přímky, kuželosečky a množiny v rovině ohraničené těmito křivkami)

121. Napište parametrický, obecný a směrnicový tvar rovnice přímky, která prochází body $A = [5, 2]$, $B = [9, 4]$. Načrtněte si obrázek.

Určete a načrtněte kuželosečky, které jsou dány následujícími rovnicemi.

122. $x = y^2 - 3$ 123. $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 2 = 0$
124. $x^2 + y^2 + 6y - 3 = 0$ 125. $x^2 - 4y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$

Načrtněte rovinný obrazec D , který je omezen danými křivkami nebo je zadán nerovnicemi:

126. $x + y \leq 1, x + 1 \geq y \geq 0$ 127. $y \geq 0, y \leq 2 - x, x \geq y^2$
128. $2x + 2y = 5, xy = 1$ 129. $x^2 + y^2 \leq 4x, y \geq 0$

Výsledky kapitoly VIII

121. $x = 5 + 4t, y = 2 + 2t, t \in \mathbb{R}; x - 2y - 1 = 0; y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
122. parabola, osa v ose x , vrchol $V = [-3, 0]$, otevřená doprava 123. elipsa $S = [2, -1]$, $a = 2, b = \sqrt{2}$
124. kružnice $S = [0, -3]$, $r = \sqrt{12}$ 125. hyperbola $S = [3, 1]$, $a = 4, b = 2$
126. rovnoramenný trojúhelník nad osou x , souměrný podle osy y
127. "křivočarý" trojúhelník v prvním kvadrantu ohraničený dvěma úsečkami a částí paraboly
128. obrazec ohraničen v prvním kvadrantu úsečkou a rovnoosou hyperbolou
129. posunutý půlkruh v prvním kvadrantu, $S = [2, 0]$

Literatura:

- [1] J. Černý a kolektiv: **Matematika - přijímací zkoušky na ČVUT**. Nakladatelství ČVUT Praha, 2007
- [2] F.Jirásek a kol.: **Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ**. SPN, Praha 1986
- [3] J.Neustupa: **Matematika I**. Skriptum Strojní fakulty. Nakladatelství ČVUT, Praha 2010 (též starší vydání 2008,...)
- [4] L.Samková: **Sbírka příkladů z matematiky**. Fak. architektury, Nakladatelství ČVUT, Praha 2002
- [5] F.Vejšada, F.Talafous: **Sbírka úloh z matematiky pro SVVŠ**. SPN, Praha 1969