MATEMATIKA I - vybrané úlohy ze zkoušek v letech 2008–2011
doplněné o další úlohy

2. část DIFERENCIÁLNÍ POČET funkcí jedné proměnné

Další část (integrální počet) bude vydána na konci listopadu

Případné nesrovnalosti ve výsledcích, jakož i připomínky k tomuto souboru sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Některé úlohy jsou převzaty z textů [1], [2] a [3].

[1] J. Neustupa: **Matematika I.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2010 (též 2008,...).

[2] J.Neustupa, S.Kračmar: **Vybrané příklady** ze skript Sbírka příkladů z Matematiky I. Firma Copia a webové stránky Ústavu technické matematiky pod odkazem Matematika I.

[3] E.Brožíková, M.Kittlerová: **Diferenciální počet funkcí jedné proměnné.** Řešené příklady. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2004.

Následující výčet nelze chápat jako jednoznačné zařazení uvedené úlohy do zkoušky úrovně A (alfa), resp. úrovně B, ale jako **orientační** rozlišení. Zaměřením a náročností odpovídají požadavkům zkoušky úrovně B např. úlohy 1, 2, 5, 8, 9, 10, 11 a1, a3, 12, 14, 16, 17, 20. Požadavkům zkoušky úrovně A odpovídají např. úlohy 3 až 7, 9 až 11, 13, 15, 18, 19, 21.

Další doporučené úlohy k samostatnému počítání, a to ze sbírky [2] jsou uvedeny na webu ÚTM pod odkazem Matematika I v souboru Základní informace (v části "Cvičení").

---

1. a) Definujte, kdy posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme *rostoucí*, resp. *klesající.*

   b) Napište prvních pět členů posloupnosti $\left\{\dfrac{n-1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Je tato posloupnost rostoucí nebo klesající ? Odpověď zdůvodněte podle definice. [Výsl.: rostoucí]

   c) Vypočítejte $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-3)(1-2n)}{5n^2-2n-1}$. [Výsl.: $-4/5$]

2. a) Vypočítejte limitu posloupnosti $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n-1}{4n^2-(2n+1)^2}$. [Výsl.: $-3/4$]

   b) Užitím l'Hospitalova pravidla vypočítejte limitu funkce $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-3x}{\ln(2x-5)}$. [Výsl.: $3/2$]

Varianty předchozí úlohy:
a) výpočet limity posloupnosti, b) výpočet limity funkce pomocí l'Hospitalova pravidla):

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2-1}-n\right)$ [Výsl.: 0] **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{2x}}{x^3+\sin 3x}$ [Výsl.: $-2/3$]

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^2-7n+2}{(3n-2)^2-9n^2}$ [Výsl.: $-\infty$] **b)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{3x}-3}{9-x^2}$ [Výsl.: $-1/12$]

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(10-5n)(2n+5)}{2n^3-10n^2-15}$ [Výsl.: 0] **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x}{2}-3x^2}{2x-\sin(3x)}$ [Výsl.: $-1/2$]

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^3-\frac{x}{3}}{e^{3x}-\cos x}$ [Výsl.: $-1/9$]

3. a) Vypočítejte limitu posloupnosti $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n^2-3n+2}-n)$ [Výsl.: $-3/2$]

   b) Uveďte větu o limitě vybrané posloupnosti.

   c) Sestavte posloupnost, která nemá limitu. Zdůvodněte !

4. a) Vypočítejte limitu posloupnosti $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+\cos(n!)}{2n-1}$. [Výsl.: $1/2$]

   b) Definujte co to znamená, že posloupnost $\{a_n\}$ je klesající.

   c) Sestavte klesající posloupnost, která má limitu rovnou 2. Ověřte, že tato posloupnost má zmíněné vlastnosti.

5. a) Definujte pojem *limita posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

   b) Vypočítejte limitu posloupnosti $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2n-1)^2-(2n^2+1)}{6n^2-(2n-1)(3n+1)}$.

   c) Vyšetřete, zda posloupnost $\left\{\dfrac{100n+1}{n^2}\right\}$ je rostoucí nebo klesající.

[Výsl. b) $+\infty$, c) klesající]

6. a) Vypočítejte limitu posloupnosti $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(n-\sqrt{n^2+4}\right)$. [Výsl.: -2]

b) Vypočítejte limitu funkce $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)}$.

Pokud se rozhodnete pro l'Hospitalovo pravidlo, ověřte, zda ho lze použít. [Výsl.: 1/2]

Další varianty předchozí úlohy:
a) výpočet limity posloupnosti, b) výpočet limity funkce s pomocí l'Hospitalova pravidla (pokud lze):

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+4)^2-8n}{4n^2-(2n+1)^2}$. [Výsl.: $-\infty$] **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\frac{x^3}{3}-1)\sin 2x}{\operatorname{tg} x}$. [Výsl.: -2]

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n-\sqrt{n(n-1)}$. [Výsl.: 1/2] **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \cos x}{\cos x - 1}$. [Výsl.: -2]

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$ [Výsl.: 1] **b)** $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$. [Výsl.: 1/2]

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cos 2x}{\sqrt{3x+4}-2}$. [Výsl.: 4/3]

7. a) Určete definiční obor $D(f)$ funkce $f: f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3x}}$. Je funkce sudá, resp. lichá ? (Odpověď zdůvodněte.)

b) Vypočítejte limity $f(x)$ pro $x\to+\infty$ a pro $x\to-\infty$. Vyšetřete jednostranné limity v bodě $x_0=0$.

c) Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0=1$.

[Výsl.: $D(f)=(-\infty,-3)\cup(0,+\infty)$, funkce není sudá ani lichá, lim = 1 pro $x\to+\infty$, zatímco pro $x\to-\infty$ je lim = -1 (neboť $\sqrt{x^2}=|x|$), limita pro $x\to 0_-$ neexistuje, limita pro $x\to 0_+$ je rovna 0, oboustranná limita pro $x\to 0$ neexistuje, rovnice tečny: $y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{16}(x-1)$]

8. a) Určete definiční obory a do jednoho obrázku načrtněte grafy funkcí $f_1(x)=\sqrt{x},\ f_2(x)=\sqrt{x+3},\ f_3(x)=\sqrt{x}-2$.

b) Určete definiční obor funkce $f(x)=\ln(4-x^2)$. Je tato funkce sudá, resp. lichá ? (Odpověď zdůvodněte.)

c) Určete průsečíky grafu funkce f s oběma osami.

d) Najděte všechny body x_0, ve kterých je derivace funkce f nulová. Jakou polohu má tečna sestrojená ke grafu funkce f v těchto bodech $[x_0, f(x_0)]$?

[Výsl.: $D(f)=(-2,2)$, funkce je sudá, průsečíky $[0,\ln 4]$, $[-\sqrt{3},0]$, $[\sqrt{3},0]$, derivace nulová pouze v bodě $x=0$, tečna v bodě $[0,\ln 4]$ je rovnoběžná s osou x]

Varianty této úlohy s jinými funkcemi f_1, f_2, f_3 :
a1) $f_1(x)=\ln x,\ f_2(x)=\ln(x-1),\ f_3(x)=\ln x+3$.
a2) $f_1(x)=\ln x,\ f_2(x)=\log_{10} x,\ f_3(x)=\log_{1/2} x$.

9. a) Definujte pojem derivace funkce f v bodě x_0.

b) Vypočítejte derivaci funkce $f: f(x)=(x-3)\sqrt{x}$. Určete definiční obory $D(f)$ a $D(f')$.

c) Napište rovnici tečny a rovnici normály ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0=4$.

d) Pomocí rovnice tečny určete přibližně hodnotu funkce f v bodě $x=3.8$.

[Výsl.: $D(f)=\langle 0,+\infty)$, $D(f')=(0,+\infty)$, $f'(x)=\sqrt{x}+(x-3)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, tečna: $y=2+\frac{9}{4}(x-4)$ normála: $y=2-\frac{4}{9}(x-4)$, $f(3.8)\doteq 31/20=1,55$]

Varianty této úlohy s jinými funkcemi f a body x_0. Pro funkce z úloh b1) a b2) určete též průsečíky grafu s oběma osami.

b1) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+1}$ c) $x_0=-1$ d) $f(x=-0,8)$ [Výsl.: $D(f)=D(f')=(-\infty,+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{2-6x-2x^2}{(x^2+1)^2}$, tečna: $y=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(x+1)$ normála: $y=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}(x+1)$, $f(-0.8)\doteq 4/5=0.8$, průsečíky: $[0,3], [-3/2,0]$]

b2) $f(x)=\sqrt{2x+3}-x$ c) $x_0=3$ d) $f(x=3,2)$

[Výsl.: $D(f)=\langle -3/2,+\infty)$, $D(f')=(-3/2,+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}-1$, tečna: $y=-\frac{2}{3}(x-3)$, normála: $y=\frac{3}{2}(x-3)$, $f(3.2)\doteq -2/15$, průsečíky: $[0,\sqrt{3}]$, $[3,0]$, ale bod $[-1,0]$ NE !]

10. a) Vypočítejte derivaci funkce $f: f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{x^2}{2}$. Určete definiční obory $D(f)$, $D(f')$.
b) Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0=1$.
c) Vypočítejte derivace $f''(x)$, $f''(1)$. Do jednoho obrázku načrtněte tečnu a tvar grafu dané funkce v okolí bodu $[1, f(1)]$.
d) Popište chování dané funkce v okolí bodu x_0, tj. rostoucí nebo klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny), tvar grafu.

[Výsl.: $D(f)=\langle 0,+\infty), D(f')=(0,+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+x$, tečna: $y=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}(x-1)$, (normála: $y=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}(x-1)$), $f''(x)=1-\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$, $f''(1)=\frac{3}{4}$, v okolí daného bodu je funkce rostoucí, konvexní, tečna svírá s kladným směrem osy x úhel přibližně 55^o.]

Další varianty této úlohy si sestavte sami s jinými funkcemi f a body x_0, např. s funkcemi b), b1) a b2) z předchozí úlohy.

11. a) Vypočítejte derivaci funkce f: $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\sqrt{5-x^2}$. Určete definiční obory $D(f)$ a $D(f')$.
b) Napište rovnici tečny ke grafu této funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0=-1$.
Výsledku použijte pro výpočet přibližné hodnoty funkce f v bodě $x=-1,2$.
c) Zdůvodněte existenci absolutních extrémů funkce f na intervalu $I=\langle -2,2\rangle$. Tyto absolutní extrémy určete (tj. stanovte jejich polohu a hodnotu).

[Výsl.: $D(f)=\langle -\sqrt{5},\sqrt{5}\rangle, D(f')=(-\sqrt{5},\sqrt{5})$, $f'(x)=x-\dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}}$, tečna: $y=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}(x+1)$, abs. extrémy: Max=3 v bodech $x=\pm 2$, Min=$\sqrt{5}$ v bodě $x=0$].

Varianty této úlohy s jinými funkcemi f, body x_0 a intervaly I.

a1) $f(x)=(x-2)\,\mathrm{e}^x$ b) $x_0=0$ c) $I=\langle 0,2\rangle$ [Výsl.: $D(f)=D(f')=\mathbb{R}$, $f'(x)=(x-1)\,\mathrm{e}^x$, tečna: $y=-2-x$, (normála $y=-2+x$), abs. extrémy: Max=0 v bodě $x=2$, Min=$-\mathrm{e}$ v bodě $x=1$]

a2) $f(x)=\mathrm{tg}\,x-x$ b) $x_0=\pi$ c) $I=\langle -\pi/4,\pi/4\rangle$ [Výsl.: $D(f)=D(f')=\bigcup(-\dfrac{\pi}{2}+k\,\pi,+\dfrac{\pi}{2}+k\,\pi)$, $k\in Z$, $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1$; $f'(\pi)=0$, proto tečna: $y=-\pi$, (normála $x=\pi$), $f'(x)\geq 0$ pro každé $x\in I$, proto abs. extrémy: Max=$1-\pi/4$ v bodě $x=\pi/4$, Min=$-1+\pi/4$ v bodě $x=-\pi/4$].

a3) $f(x)=\dfrac{x+10}{\sqrt{x+4}}$ b) $x_0=0$ c) $I=\langle -3,12\rangle$ [Výsl.: $D(f)=D(f')=(-4,+\infty)$, $f'(x)=\dfrac{x-2}{2(x+4)\sqrt{x+4}}$ (po úpravě), tečna: $y=5-\frac{1}{8}x$, (normála $y=5+8x$), abs. extrémy: Max=7 v bodech $x=-3$, Min=$2\sqrt{6}$ v bodě $x=2$].

V následujících čtyřech úlohách
a) Definujte absolutní extrémy funkce f na intervalu I. Popište stručně postup při jejich výpočtu.
b) Zdůvodněte existenci absolutních extrémů dané funkce f na daném intervalu I.
c) Absolutní extrémy určete (tj. jejich polohu a hodnotu.)

12. $f(x)=x^4-2x^2+5$, $I=\langle 0,2\rangle$ [Výsl.: Max=$f(2)=13$, Min=$f(1)=4$]

13. $f(x)=x+3\sqrt[3]{x^2}$, $I=\langle -1,1\rangle$ [Výsl.: Max=$f(1)=4$, Min=$f(0)=0$]

14. $f(x)=2\sqrt{x-1}-x+2$, $I=\langle 1,5\rangle$ [Výsl.: Max=$f(2)=2$, Min=$f(1)=f(5)=1$]

15. $f(x)=x^2+\dfrac{16}{x}-16$, $I=\langle 1,4\rangle$ [Výsl.: Max=$f(4)=4$, Min=$f(2)=-4$]

16. Je dána funkce $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$.
a) Určete definiční obor $D(f)$ a vypočítejte limity v jeho krajních bodech.
b) Vypočítejte $f'(x)$ a určete $D(f')$. Najděte body, ve kterých je derivace nulová.
c) Určete lokální extrémy a intervaly monotonie (tj. funkce rostoucí, resp. klesající).
d) Načrtněte graf dané funkce f.

[Výsl.: $D(f)=(-\infty,\infty)$, daná funkce je lichá, obě limity, tj. pro $x\to+\infty$ i pro $x\to-\infty$ jsou rovny nule, $f'(x)=\dfrac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$, $f'(x)=0$ pro $x=\pm 2$, funkce je klesající v intervalu $(-\infty,-2\rangle$, rostoucí v $\langle -2,2\rangle$, klesající v intervalu $\langle 2,\infty)$, ostré lokální minimum (navíc i absolutní) v bodě $x=-2, f(-2)=-1/4$, ostré lokální maximum (navíc i absolutní) v bodě $x=2, f(2)=1/4$.]

Varianty této úlohy s jinými funkcemi f.

a1) $f(x) = \dfrac{x^4+3}{3x}$ na zúženém definičním oboru $D(f) = (0, \infty)$

[Výsl.: Obě limity, tj. pro $x \to +\infty$ i pro $x \to 0_+$ jsou rovny $+\infty$, $f'(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2}$, $f'(x) = 0$ pro $x = \pm 1$, funkce je klesající v intervalu $(0, 1\rangle$, rostoucí v $\langle 1, \infty)$, ostré lokální minimum (navíc i absolutní) v bodě $x = 1, f(1) = 4/3$.]

a2) $f(x) = \dfrac{1}{9-x^2}$ na zúženém definičním oboru $D(f) = (-3, 3)$

[Výsl.: Daná funkce je sudá, obě limity, tj. pro $x \to 3_-$ i pro $x \to 3_+$ jsou rovny $+\infty$, $f'(x) = \dfrac{2x}{(9-x^2)^2}$, $f'(x) = 0$ pro $x = 0$, funkce je klesající v intervalu $(-3, 0\rangle$, rostoucí v $\langle 0, 3)$, ostré lokální minimum (navíc i absolutní) v bodě $x = 0, f(0) = 1/9$.]

a3) $f(x) = \dfrac{x^3-2}{x}$ na zúženém definičním oboru $D(f) = (-\infty, 0)$

Další varianty této úlohy lze nalézt v [2], a to např. úlohy č. 1144, 1211, 1293 (pro zkoušku B bez konvexnosti).

17. Je dána funkce $f(x) = (x-2)\,\mathrm{e}^x$.

a) Určete definiční obor $D(f)$. Vypočítejte derivaci a stanovte její definiční obor $D(f')$.

b) Určete intervaly monotonie a lokální extrémy.

c) Určetete intervaly, na nichž je tato funkce konvexní, resp. konkávní. Najděte inflexní body.

d) Určete průsečíky grafu s osami x, y. Vypočítejte funkční hodnoty ve významných bodech (lokální extrémy, inflexní body). Načrtněte graf dané funkce f v intervalu $\langle -1, 2 \rangle$.

[Výsl.: $f'(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^x$, $D(f) = D(f') = (-\infty, \infty)$, $f'(x) = 0$ pro $x = 1$, funkce je klesající v intervalu $(-\infty, 1\rangle$, rostoucí v $\langle 1, \infty)$, ostré lokální minimum (navíc i absolutní) v bodě $x = 1$, $f''(x) = x\,\mathrm{e}^x$, $f''(x) = 0$ pro $x = 0$, funkce je konkávní v intervalu $(-\infty, 0\rangle$, konvexní v $\langle 0, \infty)$, inflexní bod $x = 0$, $f(-1) = -3/\mathrm{e} \doteq -1.1$, $f(0) = -2$, $f(1) = -\mathrm{e}$, průsečíky $[0, -2]$, $[2, 0]$.]

Varianty této úlohy s jinými funkcemi f.

a1) $f(x) = \sqrt{2x-3} - x$, graf v intervalu $\langle 3/2, 6\rangle$, bez konvexnosti, bez průsečíků [Výsl.: Derivace $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}} - 1$, $D(f) = \langle 3/2, \infty)$, $D(f') = (3/2, \infty)$, $f'(x) = 0$ pro $x = 2$, funkce je rostoucí v $\langle 3/2, 2\rangle$, klesající v $\langle 2, \infty)$, ostré lokální maximum (navíc i absolutní) v bodě $x = 2$, $f(3/2) = -3/2$, $f(2) = -1$, $f(6) = -3$.]

a2) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+2x}$, graf v intervalu $\langle -2, 0\rangle$, bez konvexnosti. [Výsl.: Derivace $f'(x) = \mathrm{e}^{x^2+2x}\,(2x+2)$, $D(f) = D(f') = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $f'(x) = 0$ pro $x = -1$, funkce je klesající v $(-\infty, -1\rangle$, rostoucí v $\langle -1, \infty)$, ostré lokální minimum (navíc i absolutní) v bodě $x = -1$, $f(-2) = 1$, $f(-1) = 1/\mathrm{e}$, $f(0) = 1$, průsečík $[0, 1]$, průsečík s osou x není.]

18. Je dána funkce $f(x) = x \ln x$.

a) Určete definiční obor $D(f)$ a vypočítejte limity v jeho krajních bodech.

b) Určete lokální extrémy a intervaly monotonie (tj. funkce rostoucí, resp. klesající).

c) Určetete intervaly, na nichž je tato funkce konvexní, resp. konkávní. Najděte inflexní body.

d) Určete průsečíky grafu s osou x. Načrtněte graf dané funkce f.

[Výsl.: $D(f) = (0, \infty)$, limita pro $x \to 0_+$ je rovna nule, limita pro $x \to +\infty$ je $+\infty$, $f'(x) = \ln x + 1$, $f'(x) = 0$ pro $x = 1/\mathrm{e}$, funkce je klesající v intervalu $(0, 1/\mathrm{e}\rangle$, rostoucí v $\langle 1/\mathrm{e}, +\infty)$, ostré lokální minimum (navíc i absolutní) v bodě $x = 1/\mathrm{e}, \mathrm{f}(1/\mathrm{e}) = -1/\mathrm{e}$, $f''(x) = 1/x$, f je konvexní v $D(f)$, průsečík je $[1, 0]$.]

Varianty této úlohy s jinými funkcemi f lze nalézt ve sbírce [2], kde jsou uvedeny s výsledky např. úlohy č. 1282. $f(x) = x^4 - 2x^2$, 1292. $f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{1/x}$, 1293. $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$, 1308. $f(x) = \mathrm{e}^{2x-x^2}$

19. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x-3}$.

a), b), c) viz předchozí úloha

d) Určete průsečíky grafu s osami x, y. Vyšetřete asymptoty. Načrtněte graf dané funkce f.

[Výsl.: $D(f) = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$, limity pro $x \to 3_+$ a pro $x \to +\infty$ jsou $+\infty$, limita pro $x \to 3_-$ je rovna $-\infty$ a pro $x \to -\infty$ je rovna nule, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x\,(x-4)}{(x-3)^2}$, $f'(x) = 0$ pro $x = 4$, funkce je klesající v intervalu $(-\infty, 3)$ a v intervalu $(3, 4\rangle$, rostoucí v $\langle 4, +\infty)$, ostré lokální minimum v bodě $x = 4, f(4) = \mathrm{e}^4$, průsečík je $[0, -1/3]$, průsečík s osou x není, svislá asymptota $x = 3$, asymptota $y = 0$ pro $x \to -\infty$]

Varianta této úlohy s jinou funkcí.

a1) $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2+3}$ [Výsl.: $D(f) = (-\infty, \infty)$, obě limity, tj. pro $x \to -\infty$ a pro $x \to +\infty$ jsou rovny nule, derivace $f'(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{(x^2+3)^2}$, $D(f') = D(f)$, $f'(x) = 0$ pro $x = -1$ a pro $x = 3$, funkce je rostoucí v intervalu $(-\infty, -1\rangle$ a v $\langle 3, \infty)$, klesající v $\langle -1, 3\rangle$, ostré lokální maximum (navíc i absolutní) v bodě $x = -1$, $f(-1) = 1/2$, ostré lokální minimum (navíc i absolutní) v bodě $x = 3, f(3) = -1/6$, průsečíky $[0, 1/3], [1, 0]$, asymptota $y = 0$ pro $x \to -\infty$ i pro $x \to \infty$.]

Další varianty této úlohy, příp. jenom její části s jinými funkcemi lze nalézt ve sbírce [2], kde jsou uvedeny s výsledky např. úlohy č. 1241. $f(x) = (x^2+1)\,\mathrm{e}^x$, 1156. $f(x) = x^2 - \ln x^2$, 1209. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ 1260. $f(x) = \ln(1+x^2)$, 1278. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$, 1295. $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$, (bez konvexnosti), 1321. $f(x) = x + \operatorname{arccotg} x$ (oprava výsledků: funkce není lichá, šikmá asymptota pro $x \to -\infty$ je $y = x + \pi$).

20. Je dána funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x-4}$.

a) Vypočítejte derivaci $f'(x)$ a určete definiční obory $D(f)$, $D(f')$.

b) Napište rovnici tečny ke grafu dané funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 2$.

c) Vypočítejte hodnotu $f''(2)$. Napište Taylorův polynom 2. stupně $T_2(x)$ dané funkce se středem v bodě $x_0 = 2$. Pomocí $T_2(x)$ určete přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = 3/2$.

[Výsl.: derivace $f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x-4}$, $D(f) = D(f') = (-\infty, \infty)$, $f'(2) = 2$, tečna: $y = 1 + 2(x-2)$, $f''(x) = 4\,\mathrm{e}^{2x-4}$, $f''(2) = 4$, $T_2(x) = 1 + 2(x-2) + 2\,(x-2)^2$, $f(3/2) \doteq T_2(3/2) = 1/2$.]

Varianty této úlohy s jinými funkcemi f a body x_0.

a1) $f(x) = f(x) = \sqrt{6-2x}$, $x_0 = 1$, přibližně $f(1/2)$ [Výsl.:derivace $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{6-2x}}$, $D(f) = (-\infty, 3\rangle$, $D(f') = (-\infty, 3)$, $f'(1) = -1/2$, tečna: $y = 2 - \dfrac{1}{2}\,(x-1)$, $f''(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{(6-2x)^3}}$, $f''(1) = -1/8$, $T_2(x) = 2 - \dfrac{1}{2}\,(x-1) - \dfrac{1}{16}\,(x-1)^2$, $f(1/2) \doteq T_2(1/2) = 143/64 \doteq 2.2$.]

a2) $f(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^x$, $x_0 = 0$, přibližně $f(1/4)$ [Výsl.:derivace $f'(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^x$, $D(f) = D(f') = (-\infty, \infty)$, $f'(0) = 2$, tečna: $y = 1 + 2\,x$, $f''(x) = (x+3)\,\mathrm{e}^x$, $f''(0) = 3$, $T_2(x) = 1 + 2\,x + \frac{3}{2}\,x^2$, $f(1/4) \doteq T_2(1/4) = 51/32 \doteq 1.6$.]

21. Je dána funkce $f(x) = \sqrt{2x+1} - \dfrac{x^2}{2}$

a) Vypočítejte 1. a 2. derivaci této funkce. Stanovte definiční obory funkcí f, f' a f''.

b) Napište Taylorův polynom $T_2(x)$ stupně dva se středem $x_0 = 0$ dané funkce f. Pomocí $T_2(x)$ určete přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = 3/4$.

c) Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_3(x)$. Jeho pomocí odhadněte velikost chyby aproximace hodnoty funkce f v bodě $x = 3/4$ při použití Taylorova polynomu $T_2(x)$ z úlohy b).

[Výsl.:Derivace $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} - x$, $f''(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{(2x+1)^3}} - 1$, $D(f) = \langle -1/2, \infty)$, $D(f') = D(f'') = (-1/2, \infty)$, $T_2(x) = 1 + x - x^2$, $f(3/4) \doteq T_2(3/4) = 19/16 \doteq 1.2$, $f'''(x) = \dfrac{3}{\sqrt{(2x+1)^5}}$, $R_3(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{(2\xi+1)^5}}\,x^3$, $|R_3(3/4)| = |f(3/4) - T_2(3/4)| \leq 27/128$.]

Varianta této úlohy s jinou funkcí f a s jiným bodem x_0.

a1) $f(x) = f(x) = \ln(x+2)$, $x_0 = -1$, přibližně $f(-0.8)$ [Výsl.: Derivace $f'(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $f''(x) = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$, $D(f) = D(f') = D(f'') = (-2, \infty)$, $T_2(x) = (x+1) - \dfrac{1}{2}\,(x+1)^2$, $f(-0.9) \doteq T_2(-0.9) = 0.095$, $f'''(x) = \dfrac{2}{(x+2)^3}$, $R_3(x) = \dfrac{1}{3(\xi+2)^3}\,(x+1)^3$, $|R_3(-0.9)| = |f(-0.9) - T_2(-0.9)| \leq 0.001/3 < 0.00034$.]

Další varianty této úlohy s jinými funkcemi f lze nalézt ve sbírce [2], kde jsou uvedeny s výsledky vybrané úlohy z úloh č. 1330 až 1376 (pro zkoušku "B"bez vyjádření zbytku a bez odhadu chyby).