MATEMATIKA I - vybrané úlohy ze zkoušek v letech 2008–2011
doplněné o další úlohy

V porovnání s podobným souborem loňským je zhruba polovina úloh tohoto souboru zařazena poprvé, to se týká především úloh ze zkoušek úrovně "B". Nově jsou zařazeny výsledky některých úloh. Text i výsledky byly kontrolovány, přesto mohlo dojít k pochybení při přepisu. Případné nesrovnalosti ve výsledcích, jakož i připomínky k tomuto souboru sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

1. část LINEÁRNÍ ALGEBRA

Další části (diferenciální a integrální počet) budou vydány v listopadu

Některé úlohy jsou převzaty z textů [1] a [2].

[1] J. Neustupa: **Matematika I.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2010 (též 2008,...).

[2] J.Neustupa, S.Kračmar: **Vybrané příklady** ze skript Sbírka příkladů z Matematiky I. Firma Copia a webové stránky Ústavu technické matematiky pod odkazem Matematika I.

Následující výčet nelze chápat jako jednoznačné zařazení uvedené úlohy do zkoušky úrovně A (alfa), resp. úrovně B, ale jako **orientační** rozlišení. Zaměřením a náročností odpovídají požadavkům zkoušky úrovně B např. úlohy 1 až 3, 5, 8, 9, 10, 11 a, b, 13, 15, 16, 17, 21 až 23. Požadavkům zkoušky úrovně A odpovídají např. úlohy 2, 4, 6, 7, 10, 11, 12, 14, 16, 18 až 21, 23 až 25.

Další doporučené úlohy k samostatnému počítání, a to ze sbírky [2] jsou uvedeny na webu ÚTM pod odkazem Matematika I v souboru Základní informace (v části "Cvičení").

1. a) Definujte pojem *lineární závislost* skupiny vektorů $\vec{u_1}, ..., \vec{u_n}$.

   b) Rozhodněte, zda vektory $\vec{u} = (1; 2; 3)$, $\vec{v} = (0; 1; 1)$ a $\vec{w} = (3; 2; 1)$ jsou lineárně nezávislé.

   c) Pokud lze, vyjádřete vektor $\vec{a} = (1; 2; 1)$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ (tzn. určete koeficienty a lineární kombinaci napište). Proveďte kontrolu výsledku !

   [Výsl.: Jsou LN, což ověříme podle definice nebo výpočtem $h(A) = 3$, kde matice A je sestavena z daných vektorů (po sloupcích nebo po řádcích) nebo výpočtem det $A \neq 0$. Je tedy matice A regulární ..., $\vec{a} = -\frac{1}{2}\,\vec{u} + 2\,\vec{v} + \frac{1}{2}\,\vec{w}$]

2. a) Napište definici pojmů *lineární závislost* a *lineární nezávislost* skupiny vektorů $\vec{u_1}, ..., \vec{u_n}$.

   b) Vyšetřete, zda vektory $\vec{u} = (3, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 2)$ a $\vec{w} = (1, 1, 3)$ jsou lineárně nezávislé.

   c) Je-li možné vyjádřit vektor $\vec{a} = (5, 1, -1)$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$, najděte koeficienty a příslušnou lineární kombinaci napište. Ověřte správnost výsledku.

   [Výsl.: b) Jsou LZ, což ověříme podle definice nebo výpočtem $h(A) = 2$, kde matice A je sestavena ... nebo výpočtem det $A = 0$. Je tedy matice A singulární.... Vyjádření existuje, a to nekonečně mnoha způsoby, např. $\alpha = 3 + p$, $\beta = -2 - 2p$, $\gamma = p$, $p \in \mathbb{R}$, konkrétní kombinace je např. $\vec{a} = 3\vec{u} - 2\,\vec{v}$]

3. a) Jsou dány vektory $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 5)$, $\mathbf{w} = (2, 0, -3)$. Vyšetřete, zda tvoří skupinu lineárně nezávislou nebo lineárně závislou.

   b) Tvoří tyto vektory bázi ve vektorovém prostoru $V(\mathbb{E}_3)$? Odpověď zdůvodněte !

   c) Určete, pro které hodnoty parametrů p, q jsou vektory $\mathbf{a} = (2, -1, p + q)$, $\mathbf{b} = (6, p, -9)$ lineárně závislé.

   [Výsl.: Jsou LN, což ověříme podle definice nebo výpočtem $h(A) = 3$, kde matice A je sestavena ...viz př. 1. Též proto, že det $A = 3 \neq 0$... c) LZ jsou právě tehdy, když $p = -3$ a $q = 0$]

4. a) Jestliže ze skupiny lineárně závislých vektorů odebereme jeden vektor, pak nová skupina je lineárně závislá, nebo lineárně nezávislá, nebo máme málo informací pro jednoznačnou odpověď ? Svoji odpověď zdůvodněte !
   Ze stejné nabídky vyberte odpověď v případě, kdy ke skupině lineárně závislých vektorů jeden vektor přidáme.

   b) Zjistěte, pro které hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$ jsou vektory $\vec{u} = (-1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, p)$, $\vec{w} = (2, p, p)$ lineárně závislé. Jaká je v těchto případech dimenze vektorového podprostoru, který je danými vektory generován? Které z daných tří vektorů v něm tvoří bázi ?

   c) Napište, pro které hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$ jsou dané vektory lineárně nezávislé.

   [Výsl.: b) LZ pro $p = 2$ nebo $p = -1$, v obou případech je dim=2. LN pro $p \neq 2$ a $p \neq -1$, tj. $p \in \mathbb{R} - \{2, -1\}$.]

5. a) Definujte pojmy *dimenze* a *báze* vektorového prostoru V.

   b) Rozhodněte, zda vektory $\vec{x} = (4, 2, 0)$, $\vec{y} = (1, 2, -1)$ a $\vec{z} = (7, 8, 1)$ tvoří bázi ve vektorovém prostoru $V(\mathbb{E}_3)$.

   c) Je-li možné vyjádřit vektor $\vec{u} = (21, 18, 3)$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, pak určete koeficienty této kombinace a vyjádření vektoru $\vec{u}$ napište. [Výsl.: LN, $\vec{u} = 2\vec{x} - \vec{y} + 2\vec{z}$]

6. a) Skupina $n - 1$ libovolných vektorů ve vektorovém prostoru V dimenze n je lineárně závislá, nebo lineárně nezávislá, nebo máme málo informací pro jednoznačnou odpověď ? Svoji odpověď zdůvodněte !
   Ze stejné nabídky vyberte odpověď v případě, že skupina obsahuje $n + 1$ libovolných vektorů.

   b) Určete, pro které hodnoty parametru p tvoří vektory $\mathbf{u} = (1; 0; 0)$, $\mathbf{v} = (p; 0; p + 3)$ a $\mathbf{w} = (0; p - 1; p)$ bázi vektorového prostoru $V(\mathbb{E}_3)$.

c) Zdůvodněte, zda pro hodnotu $p = 2$ lze vyjádřit vektor $\mathbf{b} = (3; -2; 2)$ ve tvaru lineární kombinace vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Pokud ano, najděte koeficienty a odpovídající lineární kombinaci napište.

[Výsl.: Vhodným postupem je výpočet hodnosti matice A sestavené z daných vektorů (po sloupcích nebo po řádcích) nebo výpočet det A. Zde např. det $A = (p + 3)(1 - p)$. Dané vektory tvoří bázi ve $V(\mathbb{E}_3)$ právě tehdy, když $p \in \mathbb{R} - \{1, -3\}$ (zdůvodněte). c) Pro $p = 2$ je $\mathbf{b} = \frac{3}{5}\,\mathbf{u} + \frac{6}{5}\,\mathbf{v} - 2\,\mathbf{w}$]

7. a) Definujte pojmy *hodnost matice* a *regulární matice*.

b) Vypočítejte determinant matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \alpha - 1 \\ 0 & 2 & \alpha - 2 \end{pmatrix}$

c) Určete hodnost této matice (v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$). Zdůvodněte, zda pro hodnotu parametru $\alpha = 1$ je matice A regulární.

d) Pro jaké hodnoty parametru α má homogenní soustava lineárních rovnic s touto maticí pouze nulové řešení ? Zdůvodněte.

[Výsl.: det $A = 6 - 4\alpha$. Je-li $\alpha = 3/2$, pak $h(A) = 2$, je-li $\alpha \neq 3/2$, pak $h(A) = 3$. c) Ano, je regulární, neboť ... d) Pro každé $\alpha \neq 3/2$, neboť ...]

8. Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Zdůvodněte existenci a určete inverzní matici A^{-1}. Proveďte kontrolu výsledku !

b) Z rovnice $A \cdot X = B$ vypočítejte neznámou matici X.

c) Vypočítejte matici $Y = B \cdot A$.

[Výsl.: a) Např. det $A = 4 \neq 0$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, *b)* $X = A^{-1}\,B = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/2 \\ 3/2 & -2 \end{pmatrix}$, *c)* $Y = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$]

9. a) Napište a zdůvodněte, ke kterým z daných matic existuje inverzní matice:

$$B = \begin{pmatrix} -1, & 2, & 1/3 \\ 1/2, & -4, & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 1, & -1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} -3, & 2 \\ 9, & -6 \end{pmatrix}.$$

b) Vypočítejte inverzní matice (ty, které existují) k maticím z předchozího bodu. Ověřte správnost výsledku.

c) Vypočítejte matici $X = D \cdot B$.

[Výsl.: a) K maticím B a D inverzní matice neexistují, neboť ..., matice C^{-1} existuje... b) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3, & 2/3 \\ 1/3, & -1/3 \end{pmatrix}$, *c)* $X = \begin{pmatrix} 4, & -14, & -1 \\ -12, & 42, & 3 \end{pmatrix}$]

10. a) Definujte pojem *inverzní matice* ke čtvercové matici A.

b) Uveďte některou z nutných a postačujících podmínek pro existenci inverzní matice.

Ověřte splnění této podmínky pro matici $A = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 0 \\ 2, & 3, & 0 \\ 0, & 2, & 2 \end{pmatrix}$.

c) Vypočítejte matici A^{-1}. Ověřte správnost výsledku.

d) Vypočítejte determinanty det$A$, detA^{-1} a det$(A\,A^{-1})$.

[Výsl.: b) Např. det $A = -2 \neq 0$, c) A^{-1} (po řádcích)= $(-3, 2, 0;\ 2, -1, 0;\ -2, 1, 1/2)$, d) det$A = -2$, det$A^{-1} = -1/2$ a det$(A\,A^{-1}) = 1$.]

11. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 3, & 1 \\ 5, & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -2, & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2, & 2 \\ 2, & -1 \end{pmatrix}$.

a) Zdůvodněte, zda existuje matice A^{-1}. Pokud ano, pak ji určete a ověřte správnost výsledku.

b) Vypočítejte matici X, pro kterou platí $A \cdot X = C$.

c) Vypočítejte matici Y, pro kterou platí $A \cdot Y \cdot B = C$.

[Výsl.: a) Ano, neboť např. det $A = 1 \neq 0$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2, & -1 \\ -5, & 3 \end{pmatrix}$, b) $X = \begin{pmatrix} 2, & 5 \\ -4, & -13 \end{pmatrix}$, c) $Y = \begin{pmatrix} 8, & -1 \\ -19, & 2 \end{pmatrix}$]

12. Je dány matice $A = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 2, & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2, & 0, & -1 \\ -3, & 2, & 1 \\ 1, & -2, & 4 \end{pmatrix}$.

a) Vypočítejte matici $C = A^2$ $(= A \cdot A)$.

b) Definujte pojem *regulární matice*. Rozhodněte, zda je daná matice A regulární.

c) Pokud existuje inverzní matice k matici A, vypočítejte ji.

d) Vypočítejte matici X, pro kterou platí $X \cdot A = B$.

[Výsl.: a) C (po řádcích)= $(1, 1, 1;\ 0, 2, 1;\ 0, 2, 3)$, b) Ano, je regulární, neboť např. det $A = -2 \neq 0$, c) A^{-1} (po řádcích)= $(1, 1/2, -1/2;\ 0, -1/2, 1/2;\ 0, 1, 0)$, c) X (po řádcích)= $(2, 0, -1;\ -3, -3/2, 5/2;\ 1, 11/2, -3/2)$]

13. a) Napište, jaká je souvislost mezi determinantem čtvercové matice A a lineární nezávislostí jejích řádků (sloupců).

b) Vypočítejte determinant matice $A = \begin{pmatrix} p, & 1 \\ 2, & p+1 \end{pmatrix}$. Pro jaké hodnoty parametru p jsou řádky matice A lineárně závislé ? Pro jaké hodnoty p tvoří sloupce matice A bázi v prostoru $\mathbb{R}^2$?

c) Zvolte $p = 2$ a vyjádřete vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ve tvaru lineární kombinace sloupců matice A.

[Výsl.: b) det $A = p^2 + p - 2$, řádky (a též sloupce) dané matice jsou LZ právě tehdy, když $p = 1$ nebo $p = -2$, sloupce (a též řádky) tvoří bázi právě tehdy, když $p \neq 1$ a $p \neq -2$, c) koeficienty lineární kombinace jsou $\alpha = 7/4$, $\beta = -3/2$]

14. Je dána matice A s parametry $a, b \in \mathbb{R}$: $A = \begin{pmatrix} 1, & 0, & -1, & -1 \\ 0, & -1, & -1, & 1 \\ a, & b, & 0, & 0 \\ -1, & -1, & 1, & 0 \end{pmatrix}$.

a) Definujte pojmy *regulární* a *singulární matice.*

b) Vypočítejte determinant matice A.

c) Určete hodnost dané matice A, je-li $a = -2$, $b = 3$.

d) Pro které hodnoty a, b má homogenní soustava rovnic $AX = O$ nenulové řešení ? Zdůvodněte !

[Výsl.: det $A = 3a - b$, c) $h(A) = 4$, neboť pro dané a, b je matice A regulární - viz např. det $A = -9 \neq 0$, d) právě tehdy, když det $A = 3a - b = 0$, tj. $b = 3a$.]

15. a) Vysvětlete, jak souvisí hodnost matice soustavy a hodnost matice rozšířené s existencí a počtem řešení soustavy lineárních rovnic $AX = B$.

b) Je dána soustava rovnic
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 2x + 2y - 2z &= 1 \\ x + 6y + 3z &= 4. \end{aligned}$$

Určete hodnost matice A této soustavy a hodnost matice rozšířené. Co z toho plyne pro počet řešení zadané soustavy ?

c) Najděte řešení dané soustavy. Proveďte zkoušku.

[Výsl.: a) Odpověď najdete ve Frobeniově větě, b) $h(A) = h(A|B) = 3$, soustava má jediné řešení, c) $x = -2$, $y = 3/2$, $z = -1$.]

16. Dána soustava rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= 0 \\ 4x - 3y + az &= 0 \\ 3x - y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

a) Napište matici soustavy a vypočítejte její determinant.

b) Určete, pro které hodnoty parametru a je tato matice regulární.

c) Najděte řešení zadané soustavy rovnic pro $a = 3$.

[Výsl.: det$A = 15 - 5a$, b) $a \neq 3$, c) nekonečně mnoho řešení, např. $x = -3t$, $y = -3t$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.]

17. Je dána soustava lineárních rovnic
$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 2x + y &= -4 \\ 5x + y - 3z &= -13 \end{aligned}$$

a) Napište matici této soustavy a vypočítejte její determinant.

b) Vysvětlete *Cramerovo pravidlo* pro řešení soustavy lineárních rovnic $A \cdot X = B$. Za jakých předpokladů je lze použít? Ověřte splnění těchto předpokladů pro danou soustavu.

c) Vypočítejte hodnotu neznámé y.

[Výsl.: a) det$A = -3$, b) Cramerovo pravidlo lze použít, c) det $A_y = 6$, $y = -2$]

18. a) Vypočítejte determinant matice soustavy s parametrem $a \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} x + 2y + \ az &= 0 \\ x - 3y - \ az &= 8 \\ 3x - \ y + \ 2z &= 13. \end{aligned}$$

b) Vysvětlete Cramerovo pravidlo. Určete hodnoty parametru, pro něž je možné použít Cramerovo pravidlo k řešení dané soustavy. (Odpověď zdůvodněte.)

c) Pro tyto hodnoty a vypočítejte neznámou y v závislosti na parametru a.

[Výsl.: a) det$A = a - 10$ b) Lze použít pro $a \neq 10$, c) $y = \dfrac{2a + 16}{a - 10}$]

19. a) Vypočítejte determinant matice soustavy s neznámými x, y, z, w a parametrem $a \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} -x + y \quad &= -2 \\ x - y + az &= 2 \\ 3x + ay - z &= 6 \\ w &= 1. \end{aligned}$$

b) Vysvětlete Cramerovo pravidlo. Určete hodnoty parametru a, pro které nelze při řešení zadané soustavy toto pravidlo použít.

c) Vypočítejte neznámou x v závislosti na parametru a.

[Výsl.: $\det A = 3a + a^2$, b) nelze pro $a = 0$, pro $a = -3$, $x = \dfrac{6a + 2a^2}{3a + a^2} = 2$.]

20. a) Napište Frobeniovu větu (existence i počet řešení).

b) Vyšetřete počet řešení této soustavy v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ x + y + 3z &= 1 \\ (2a-1)x + (a+1)y + z &= 1 - a \end{aligned}$$

c) Vypočítejte neznámou y v závislosti na parametru a (v případech, kdy soustava má jediné řešení).

d) Najděte řešení soustavy pro hodnotu parametru $a = 1$.

[Výsl.: $\det A = 4 - 10a$, pro $a \neq 2/5$ má soustava jediné řešení, pro $a = 2/5$ soustava nemá řešení, c) $y = \dfrac{3a-2}{2-5a}$, $a \neq 2/5$,
d) $x = 1/3, y = -1/3, z = 1/3$].

21. Jsou dány roviny $\rho : 2x - 3y + z = 0$, $\sigma : x + 2y - z = 3$ a $\tau : 2x + y + z = 12$. Řešením vhodně sestavených soustav rovnic řešte následující úlohy:

a) Napište parametrické vyjádření přímky p, která je průnikem rovin σ a τ.

b) Vyšetřete vzájemnou polohu rovin ρ, σ a τ. Pokud mají společné body, určete je.

[Výsl.: a) $p : x = 7 - t$, $y = t - 2$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$, b) Roviny se protínají v bodě $M = [2, 3, 5]$.]

22. Je dána matice $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Nalezněte vlastní čísla této matice.

b) Pro jedno z vlatních čísel určete vlastní vektory.

c) Zdůvodněte, zda k zadané matici existuje matice inverzní. Pokud ano, určete ji a ověřte správnost výsledku.

[Výsl.: $\lambda_1 = 1$, pak vlastní vektory jsou $X = p\,(1, -3)^T$, $p \in \mathbb{R}, p \neq 0$, $\lambda_2 = 2$, pak vlastní vektory jsou $X = p\,(0, 1)^T$, $p \in \mathbb{R}, p \neq 0$, c) A^{-1} existuje, neboť matice A je regulaární ($\det A = 2 \neq 0$), $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, ověříme, že $A \cdot A^{-1} = E$]

23. a) Definujte pojmy *vlastní číslo* a *vlastní vektor* čtvercové matice.

b) Určete, pro jaké hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$ má matice A vlastní číslo $\lambda = 0$, je-li

$$A = \begin{pmatrix} 2, & 3 \\ p+1, & p \end{pmatrix}$$

c) Určete vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matice A pro $p = -1$.

[Výsl.: b) $p = -3$, c) $\lambda_1 = 2$, pak vlastní vektory jsou $X = t\,(1, 0)^T$, $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$, $\lambda_2 = -1$, pak vlastní vektory jsou $X = t\,(1, -1)^T$, $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$.]

24. a) Definujte pojmy *vlastní číslo* a *vlastní vektor* čtvercové matice. Podle této definice zdůvodněte vlastnost matice, která je postačující pro existenci nulového vlastního čísla.

b) Určete vlastní čísla matice $A = \begin{pmatrix} 5, & 5, & -2 \\ -1, & 3, & 1 \\ 0, & 0, & 4 \end{pmatrix}$.

c) Určete vlastní vektory odpovídající reálným vlastním číslům.

[Výsl.: $\det(A - \lambda E) = (4 - \lambda)(\lambda^2 - 8\,\lambda + 20)$, reálné vlastní číslo $\lambda_1 = 4$, pak vlastní vektory jsou $X = p\,(3, 1, 4)^T$, dvě komplexní vlastní čísla: $\lambda_2 = 4 + 2i, \lambda_3 = 4 - 2i$.]

25. Je dána matice matice $A = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 2 \end{pmatrix}$.

a) Definujte pojem *regulární matice*. Zdůvodněte, zda daná matice je regulární.

b) Vypočítejte matici $B = A^2$ (tj. matici $A \cdot A$).

c) Vypočítejte vlastní čísla matice A a určete vlastní čísla matice B.

[Výsl.: a) Je singulární, neboť např. $\det A = 0$, A^2 (po řádcích)$= (5, 2, -1;\ 2, 0, -2;\ 1, 2, 3)$, c) $\det(A - \lambda E) = -\lambda\,(2 - \lambda)^2$, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$, vlastní čísla matice A^2 jsou $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4$.]