Matematika I A – ukázkový test 1 – pro 2011/2012

1. Je dána soustava rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \\ x + y + 3z &= 1 \\ (2a-1)x + (a+1)y + z &= 1 - a \end{aligned}$$

a) Napište *Frobeniovu větu*.

b) Vyšetřete počet řešení soustavy v závislosti na hodnotě parametru $a \in \mathbb{R}$.

c) Najděte řešení zadané soustavy pro $a = 1$.

2. Je dána matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Definujte pojem *inverzní matice* ke čtvercové matici $\boldsymbol{A}$.

b) Uveďte některou z nutných a postačujících podmínek existence inverzní matice. Ověřte splnění této podmínky pro zadanou matici $\boldsymbol{A}$.

c) Vypočítejte $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\det\boldsymbol{A}$, $\det(\boldsymbol{A}^{-1})$ a $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})$.

3. Je dána funkce $f(x) = x + \sqrt{2x-1}$

a) Vypočítejte 1. a 2. derivaci této funkce. Stanovte definiční obory funkcí f, f' a f''.

b) Napište rovnice tečny a normály ke grafu dané funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 1$.

c) Napište Taylorův polynom $T_2(x)$ druhého stupně se středem $x_0 = 1$ dané funkce f.

d) Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_3(x)$. Jeho pomocí odhadněte velikost chyby aproximace hodnoty funkce f v bodě $x = 3/2$ při použití Taylorova polynomu $T_2(x)$ z úlohy b).

4. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

a) Určete definiční obor funkce $f(x)$ a vypočítejte limity v jeho krajních bodech.

b) Určete intervaly monotonie a lokální extrémy této funkce.

c) Nalezněte asymptoty grafu funkce $f(x)$. Graf načrtněte.

5. Vypočítejte následující integrály. Nezapomeňte na intervaly jejich existence.

a) $\displaystyle\int (x^2+2)\sin x \,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int (\sin^2 x + \sin^3 x)\,\mathrm{d}x$

V úloze a) ověřte derivováním správnost výsledku.

6. a) Najděte primitivní funkci (též interval existence) k funkci $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$.

b) Vypočítejte obsah obrazce, který je ohraničen osou x a křivkami $y = \dfrac{1}{4+x^2}$, $x = 0$, $x = 2$.

c) Vypočítejte nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Matematika I B – ukázkový test 1 – pro 2011/2012

1a) Definujte pojem *lineární závislost* skupiny vektorů $\vec{u_1}, ..., \vec{u_n}$.

b) Rozhodněte, zda vektory $\vec{u} = (1;2;3)$, $\vec{v} = (0;1;1)$ a $\vec{w} = (3;2;1)$ jsou lineárně nezávislé.

c) Je-li to možné, vyjádřete vektor $\vec{a} = (1;2;1)$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ (tzn. určete koeficienty této lineární kombinace).

2. Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Zdůvodněte existenci a určete inverzní matici A^{-1}.

b) Z rovnice $A \cdot X = B$ vypočítejte neznámou matici X.

c) Vypočítejte matici $Y = B \cdot A$.

3. Je dána funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x-4}$.

a) Vypočítejte derivace $f'(x)$, $f''(x)$.

b) Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 2$.

c) Určete hodnotu druhé derivace $f''(2)$.
Napište Taylorův polynom 2. stupně $T_2(x)$ funkce f se středem $x_0 = 2$.

d) Na základě znalosti hodnot $f(2), f'(2), f''(2)$ načrtněte graf zadané funkce v okolí bodu $x_0 = 2$.

4. Dána funkce $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

a) Určete její definiční obor. Je funkce f sudá nebo lichá? (Odpověď zdůvodněte.)

b) Vypočítejte derivaci funkce f a určete intervaly monotónie.

c) Vypočítejte limity funkce f pro $x \to -\infty$ a $x \to +\infty$. Načrtněte graf.

5. Vypočítejte následující integrály. Nezapomeňte na intervaly jejich existence.

a) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$

V úloze a) ověřte derivováním správnost výsledku.

6. a) Vypočítejte integrál (uveďte též interval existence) $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$

b) Vypočítejte obsah obrazce, který je pro $x \in \langle 0, \pi/2\rangle$ ohraničen osou x a křivkou $y = x\cos x$.

Matematika I A – ukázkový test 2 – pro 2011/2012

1. Je dána matice
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Napište definici pojmů *vlastní číslo* a *vlastní vektor* matice.

b) Napište *charakteristický polynom* zadané matice $\boldsymbol{A}$. Ověřte, že čísla $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ a $\lambda_3 = 3$ jsou kořeny příslušné charakteristické rovnice.

c) Nalezněte *vlastní vektory* této matice příslušné vlastnímu číslu λ_1.

2. Je dána matice
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & -1 \\ 2 & 2 & b & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

a) Definujte pojmy *regulární* a *singulární matice.*

b) Vypočítejte determinant matice $\boldsymbol{A}$.

c) Pro které hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ má homogenní soustava $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{0}$ pouze nulové řešení ? Odpověď zdůvodněte.

3. a) Definujte pojem *limita posloupnosti* reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

a) Uveďte příklad posloupnosti, která nemá limitu. Odpověď zdůvodněte.

b) Vypočítejte limitu posloupnosti: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1})$.

4. Je dána funkce $f(x) = \mathrm{e}^{2x^2+4x}$.

a) Určete intervaly monotónie a intervaly, na kterých je funkce konvexní, resp. konkávní.

b) Určete lokální extrémy. Najděte průsečíky grafu dané funkce s osami x, y.

c) Vypočítejte limity pro $x \to -\infty$, $x \to +\infty$ a načrtněte graf.

5. Vypočítejte následující integrály. Nezapomeňte na intervaly jejich existence.
Ověřte derivováním správnost výsledku (stačí u jednoho integrálu).

a) $\displaystyle\int \ln^2 x \,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^4}} \,\mathrm{d}x$

6. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x}$.

a) Vypočítejte integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Určete intervaly existence.

b) Vypočítejte integrál $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Výpočtem rozhodněte, zda konvergují nevlastní integrály $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_3^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.

Matematika I B – ukázkový test 2 – pro 2011/2012

1. Dána soustava rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= 0 \\ 4x - 3y + az &= 0 \\ 3x - y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

a) Napište matici soustavy a spočítejte její determinant.

b) Určete, pro které hodnoty parametru a je tato matice regulární.

c) Najděte řešení zadané soustavy rovnic pro $a = 2$. Proveďte zkoušku.

2. Je dána matice
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Nalezněte vlastní čísla této matice. Pro jedno z nich určete vlastní vektory.

b) Zdůvodněte, zda k dané matici $\boldsymbol{A}$ existuje matice inverzní $\boldsymbol{A}^{-1}$.
Pokud ano, vypočítejte ji. Ověřte správnost výsledku.

3. a) Definujte, kdy posloupnost reálných čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme *klesající.*

b) Uveďte příklad klesající posloupnosti, která má limitu rovnou 1. Správnost odpovědi ověřte.

c) Vypočítejte limitu posloupnosti: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(5n+3)(1-2n)}{6n^2+n-1}$.

4. Je dána funkce $f(x) = \sqrt{2x-3} - x$.

a) Určete $D(f)$, vypočítejte derivaci a stanovte její definiční obor.

b) Určete intervaly, na nichž je funkce f rostoucí, resp. klesající.

c) Určete lokální extrémy funkce f a načrtněte její graf na intervalu $\langle 3/2; 6\rangle$.

5. Vypočítejte následující integrály. Nezapomeňte na intervaly jejich existence.
Ověřte derivováním správnost výsledku (stačí u jednoho integrálu).

a) $\displaystyle\int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \sin(2-3x)\,\mathrm{d}x$

6. Je dána funkce $f(x) = \sin^2 x \cos x$.

a) Najděte neurčitý integrál funkce f (včetně intervalu existence).

b) Vypočítejte určitý integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Určete střední hodnotu funkce f na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$,
tj. hodnotu $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Matematika I A – ukázkový test 3 – pro 2011/2012

1. a) Vypočítejte determinant matice soustavy (a je reálný parametr):

$$\begin{aligned} x - 3y - \ \ z &= 8 \\ x + 2y + \ az &= 0 \\ 3x - ay + \ 2z &= 13, \end{aligned}$$

b) Vysvělete Cramerovo pravidlo. Pro jaké hodnoty parametru a nelze při řešení zadané soustavy toto pravidlo použít?

c) Zdůvodněte zda je možné Cramerovo pravidlo použít k řešení soustavy pro $a = 1$. Pokud ano, vypočítejte neznámou z.

2. a) Vypočítejte limitu funkce $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \cos x}{\cos x - 1}$.

Pokud se rozhodnete pro l'Hospitalovo pravidlo, ověřte, zda ho lze použít.

b) Vypočítejte limitu posloupnosti $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+3)^2 - 6n}{4n^2 - (2n+1)^2}$.

3. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \sqrt{10 - x^2}$.

a) Vypočítejte derivaci $f'(x)$ a určete definiční obory $D(f)$, $D(f')$.
Napište rovnici tečny ke grafu této funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 1$.
Výsledku použijte pro výpočet přibližné hodnoty funkce f v bodě $x_0 = 0,8$.

b) Zdůvodněte existenci a nalezněte absolutní extrémy funkce f na intervalu $I = \langle -2, 2\rangle$ (stanovte polohu extrémů a jejich hodnotu).

4. Dána funkce $f(x) = x\, e^{1/x}$

a) Na největším možném definičním oboru najděte intervaly, na nichž je funkce f rostoucí, resp. klesající. Určete lokální extrémy.

b) Určete intervaly, na nichž je funkce f konvexní, resp. konkávní.

c) Vypočítejte limity funkce f pro $x \to 0_+$ a $x \to +\infty$. Načrtněte graf zadané funkce na zúženém definičním oboru $D(f) = (0, +\infty)$.

5. Vypočítejte integrály a) $\displaystyle\int \left(\ln x + \sqrt{\ln x}\right) \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int (3x - 2) \cos 5x\, \mathrm{d}x$.
Nezapomeňte na intervaly existence integrálů.
Ověřte derivováním správnost výsledku (stačí u jednoho integrálu).

6. a) Určete definiční obor a načrtněte graf funkce $y = \sqrt{x - 1}$.

b) Načrtněte obrazec ohraničený křivkami $y = \sqrt{x-1}$, $x = 0$, $y = 0$ a $y = 1$ a vypočítejte jeho plošný obsah.

c) Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem **osy** y.

Matematika I B – ukázkový test 3 – pro 2011/2012

1. Je dána soustava rovnic

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 5 \\ 2x + \ \ y + \ \ z &= 9 \\ 6x + 3y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

a) Napište matici této soustavy a spočítejte její determinant.

b) Vysvětlete *Cramerovo pravidlo* pro řešení soustavy lineárních rovnic $A \cdot X = B$ Uveďte předpoklady, kdy lze toto pravidlo použít. Ověřte splnění těchto předpokladů pro zadanou soustavu.

c) Vypočítejte hodnotu neznámé x.

2. a) Vypočítejte limitu posloupnosti $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+5}{9n^2 - (3n-2)^2}$.

b) Užitím l'Hospitalova pravidla vypočítejte limitu funkce $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x \cos x}{\mathrm{e}^{3x} - 1}$.

3. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 1}$.

a) Najděte průsečíky grafu funkce f s osami x a y.

b) Vypočítejte derivaci této funkce a stanovte její definiční obor.

c) Napište rovnici tečny ke grafu této funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, kde $x_0 = 3$.
Pomocí rovnice tečny vypočítejte přibližně hodnotu funkce f v bodě $x = 2,8$.

4. Je dána funkce $f(x) = (x - 2)\, \mathrm{e}^{\mathrm{x}}$.

a) Určete intervaly, na kterých je daná funkce rostoucí, případně klesající.

b) Určetete intervaly, na nichž je tato funkce konvexní, případně konkávní.

c) Určete průsečíky grafu s osami. Vypočítejte funkční hodnoty ve významných bodech (lokální extrémy, inflexní body) a načrtněte graf v intervalu $\langle -1, 2\rangle$.

5. Vypočítejte integrály a) $\displaystyle\int_0^1 (3x + 1)\, \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3 + 27}\, \mathrm{d}x$.
Uveďte interval existence druhého integrálu.

6. a) Načrtněte obrázek plochy mezi grafy funkcí $y = \sqrt{x}$ a $y = x$ na intervalu $x \in < 0, 1 >$ a vypočítejte její obsah.

b) Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací této plochy kolem osy x.