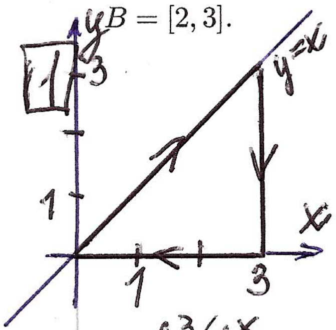
M 2, test č. 6, **verze A** Jméno:

1. [3 body] Křivka K je záporně orientovaný obvod trojúhelníka s vrcholy $[0,0]$, $[3,0]$, $[3,3]$. Načrtněte tuto křivku (včetně dané orientace).
Užitím Greenovy věty určete cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (x^2 + 2y,\, xy^2)$ podél křivky K.

2. [3 body] Vektorové pole $\vec{f} = (3x^2 - y^2,\, 3 - 2xy)$ je potenciální v oblasti $D = \mathbb{E}_2$ (nemusíte ověřovat).
a) Napište dvě podmínky, ze kterých podle definice počítáme potenciál $\varphi(x, y)$. Vypočítejte potenciál daného vektorového pole.
b) Vypočítejte křivkový integrál $\int_C \vec{f} \cdot \vec{ds}$, kde C je křivka s počát. bodem $A = [0,2]$ a konc. bodem $B = [2,3]$.

$\boxed{1}$



$U(x,y) = x^2 + 2y$, $\frac{\partial U}{\partial y} = 2$, $\frac{\partial V}{\partial x} = y^2$ $\quad\Big|\quad \oint_K \vec{f}\cdot\vec{ds} = \pm \iint_{Int K} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) dxdy$

$V(x,y) = xy^2$ spojité PD v E_2

$$\oint_K \vec{f}\cdot\vec{ds} = \ominus \iint_{Int K} (y^2 - 2)\, dxdy = \left\{ \begin{array}{l} \text{elem. obor k ose } x \\ 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le x \end{array} \right\}$$

$$= \ominus \int_0^3 \left(\int_0^x (y^2 - 2)\, dy \right) dx = -\int_0^3 \left[\frac{y^3}{3} - 2y \right]_0^x dx = -\int_0^3 \left(\frac{x^3}{3} - 2x \right) dx =$$

$$= \ominus \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - x^2 \right]_0^3 = -\left[\frac{27}{4} - 9 \right] = +\,9/4$$

<u>NEBO</u> $\left\{ \text{elem. obor vzhl. k } y: 0 \le y \le 3,\ y \le x \le 3 \right\}$ pak $\ominus \int_0^3 \left(\int_y^3 (y^2 - 2)\, dx \right) dy = \ldots\ldots = \oplus\, 9/4$

$\boxed{2}$ a) $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = U = 3x^2 - y^2 \Rightarrow \varphi = \int (3x^2 - y^2)\, dx = x^3 - xy^2 + K(y)$

do (2)

(2) $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = V = 3 - 2xy$

$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \cancel{-2xy} + K'(y) = 3 \cancel{- 2xy}$

$K'(y) = 3 \Rightarrow K(y) = \int 3\, dy = 3y + \text{konst}$

$\varphi(x,y) = x^3 - xy^2 + 3y + \text{konst}.$

b) nezávislost $\int_C \vec{f} \vec{ds}$ na cestě $\Rightarrow$

$$\oint_C (x^2 + 2y,\, xy^2)\cdot\vec{ds} = \varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(2,3) - \varphi(0,2) =$$

$$= (8 - 18 + 9) - 6 = -7$$

<u>Poznámka</u>: Pro <u>každou uzavřenou</u> křivku C v E_2 by pak cirkulace $\oint_C (x^2 + 2y,\, xy^2)\cdot\vec{ds}$ byla nulová.

M 2, test č.6, **verze B**   Jméno:

1. [3 body] Načrtněte křivku $C = \{[x,y]; x^2+y^2=4\}$, vyznačte na ní zápornou orientaci.
Použijte Greenovu větu k výpočtu cirkulace vektorového pole $\vec{f} = (x-y,\ x^2+y)$ po této orientované křivce, tj. $\oint_C \vec{f}\cdot \vec{ds}$.

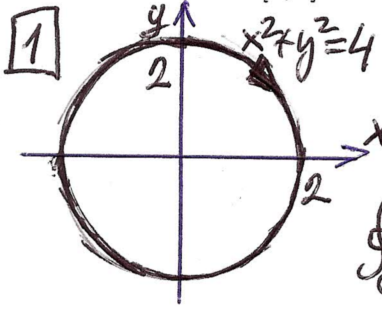
$$\oint_C \vec{f}\cdot d\vec{s} = \pm \iint_{IntC} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) dx\,dy$$

2. [3 body] Vektorové pole $\vec{f} = (3+2xy,\ x^2-3y^2)$ je potenciální v oblasti $D = \mathbb{E}_2$ (nemusíte ověřovat).

a) Napište dvě podmínky, ze kterých podle definice počítáme potenciál $\varphi(x,y)$. Vypočítejte potenciál daného vektorového pole.

b) Vypočítejte křivkový integrál $\int_C \vec{f}\cdot\vec{ds}$, kde C je křivka s počátečním bodem $A=[1,0]$ a koncovým bodem $B=[2,2]$.

$\boxed{1}$



$U(x,y) = x-y$, $\frac{\partial U}{\partial y} = -1$ spojité PD

$V(x,y) = x^2+y$, $\frac{\partial V}{\partial x} = 2x$ v oblasti $D = E_2$

$$\oint_C (x-y,\ x^2+y)\,d\vec{s} = \ominus \iint_{IntC} (2x+1)\,dx\,dy = \left\{\begin{matrix}\text{polární}\\ \text{souřadnice}\end{matrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ J = r \end{matrix} ,\ \begin{matrix}\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle \\ r \in \langle 0; 2\rangle\end{matrix}\right\} = \ominus \int_0^{2\pi}\int_0^2 (2r\cos\varphi + 1)\, r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \ominus \int_0^{2\pi}\int_0^2 (2r^2\cos\varphi + r)\,dr\,d\varphi = \ominus \int_0^{2\pi} \left[2\cdot\frac{r^3}{3}\cos\varphi + \frac{r^2}{2}\right]_0^2 d\varphi =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left(\frac{16}{3}\cos\varphi + 2\right)d\varphi = -\left[\int_0^{2\pi}\frac{16}{3}\cos\varphi\,d\varphi + 2\int_0^{2\pi} 1\cdot d\varphi\right] =$$

$$= \left(-\frac{16}{3}\right)\cdot\left[\sin\varphi\right]_0^{2\pi} - 2\cdot\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = 0 - 2\cdot 2\pi = \underline{\underline{-4\pi}}$$

$\boxed{2}$ a) (1) $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = U = 3+2xy \Rightarrow \varphi = \int (3+2xy)\,dx = 3x + x^2y + K(y)$

do (2)

(2) $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = V = x^2 - 3y^2$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 + \cancel{x^2} + K'(y) = \cancel{x^2} - 3y^2$$

$$K'(y) = -3y^2 \Rightarrow K(y) = -\int 3y^2\,dy = -y^3 + Konst$$

$$\varphi(x,y) = 3x + x^2y - y^3 + Konst$$

b) nezávislost $\int_C \vec{f}\,d\vec{s}$ na cestě v D $\Rightarrow$

$$\int_C (x-y,\ x^2+y)\cdot d\vec{s} = \varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(2,2) - \varphi(1,0) = (6+8-8) - 3 = \underline{\underline{3}}$$

<u>POZNÁMKA</u>: Pro <u>každou uzavřenou</u> křivku C v oblasti D je pak cirkulace $\oint_C (x-y,\ x^2+y)\cdot d\vec{s}$ rovna nule.