

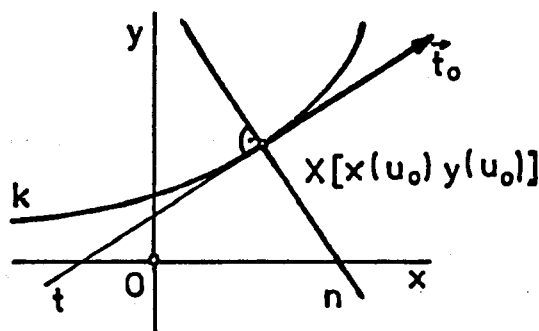
7. KINEMATICKÁ GEOMETRIE V ROVINĚ

7.1 Rovinné křivky

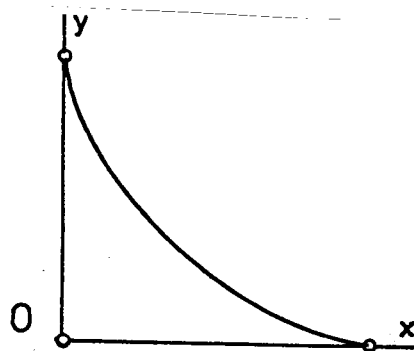
Křivka v E_2 je jednoparametrická množina bodů $\{X(u)\}$, jejichž souřadnice $[x, y]$ jsou dány diferencovatelnými funkcemi $x = x(u), y = y(u)$ na otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$. Předpokládáme, že **tečný vektor** $\vec{t} = (dx/du, dy/du)$ je nenulový pro všechna $u \in J$.

Tečna t křivky k je určena bodem dotyku X a tečným vektorem \vec{t}_0 v něm.

Normála n křivky k je kolmice k tečně t v bodě dotyku X , obr. 7.1 a.



Obr.7.1a



Obr.7.1b

Příklad. Oblouk asteroidy je dán parametrickými rovnicemi

$x = \cos^3 u, y = \sin^3 u, u \in \langle 0, \pi/2 \rangle$, tečný vektor $\vec{t} = 3 \cos u \sin u (-\cos u, \sin u)$, viz obrázek 7.1 b.

Z hlediska technické praxe může být křivka daná různými způsoby. Uvedeme několik příkladů.

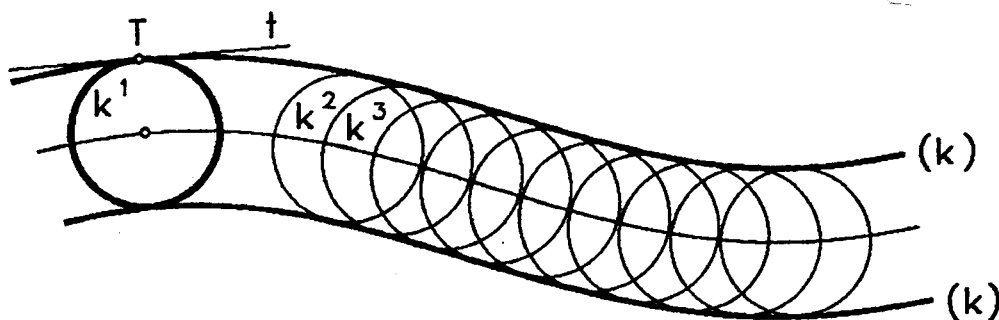
Křivka jako trajektorie bodu

Jestliže chápeme parametr u jako čas, potom jednoparametrická množina $\{X[x(u), y(u)]\}$, $u \in J$ je trajektorií pohybujícího se bodu v rovině (x, y) . Takto pojatými křivkami se budeme zabývat v kinematické geometrii.

Křivka jako obálka

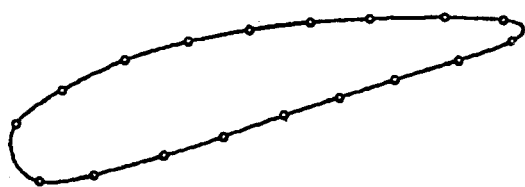
jednoparametrické soustavy křivek $k(p)$, $p \in \mathbb{R}$, kde p je parametr. Na obrázku 7.2 jsou znázorněny křivky $k(i) = k^i$ pro $i = 1, 2, 3, \dots, 11$. Obálku označíme (k) .

Obálka (k) má s každou polohou křivky k společnou tečnu t v bodě dotyku T .

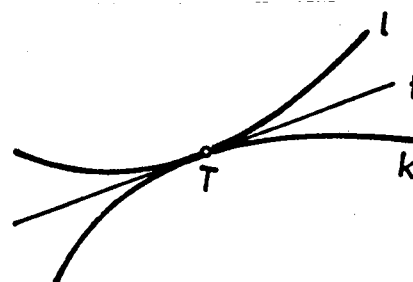


Obr.7.2

V praxi se často setkáváme s křivkami, které nelze popsat výše uvedenými způsoby. Jsou to křivky, které jsou dány jednotlivými body, říká se jim grafické, empirické, nebo v počítačové geometrii tvarově složité (free form curves) křivky.
Příklad. Vrtule letadla se obrábí řádkováním jednotlivých rovinných řezů, viz obrázek 7.3. Každý řez je dán opěrnými body, kterými je třeba proložit interpolační křivku.



Obr.7.3

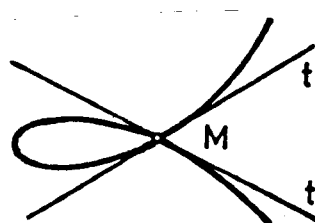


Obr.7.4

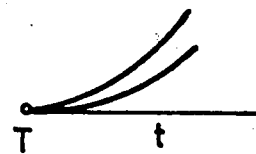
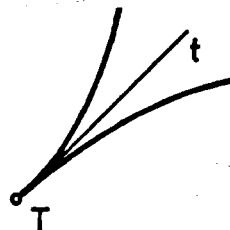
Dotyk dvou křivek.

Dvě křivky k , l se dotýkají ve společném bodě T , jestliže mají v tomto bodě společnou tečnu t , viz obrázek 7.4.

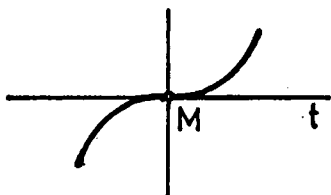
7.1.1 Speciální body křivek, viz obrázek 7.5.



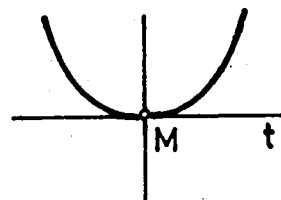
uzlový bod M



bod vratu T



inflexní bod M



plochý bod M

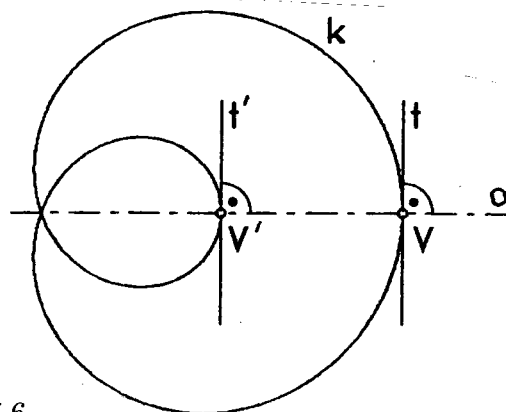
Obr.7.5

Poznámka. Následující dvě křivky dávají příklad inflexního a plochého bodu M , $y = x^3$, $M[0, 0]$, $y = x^4$, $M[0, 0]$.

Bod V je **vrcholem** křivky k , jestliže

a) je průsečíkem křivky s její osou souměrnosti o a současně

b) tečna t v bodě V je kolmá k ose souměrnosti o křivky k , viz obrázek 7.6.

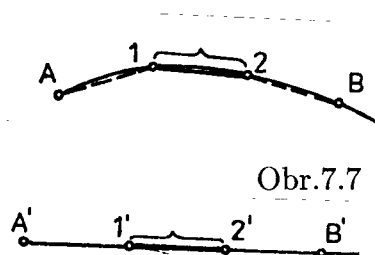


Obr.7.6

7.1.2 Rektifikace oblouku

je konstruktivní určení délky oblouku křivky k . Provádí se přibližně, křivku nahradíme lomenou čarou, na obr.7.7 s vrcholy $A, 1, 2, B$. Délka oblouku \overline{AB} se

pak přibližně rovná délce úsečky $A'B'$.

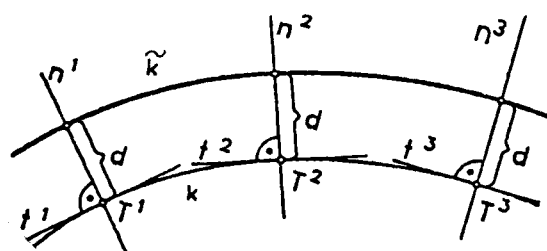


Obr.7.7

7.1.3 Technické křivky

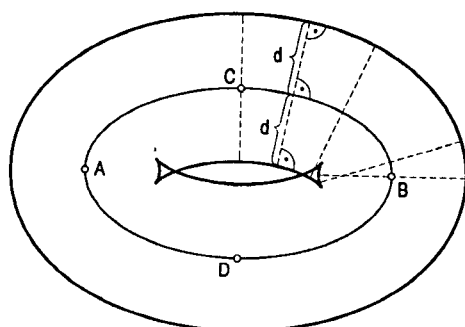
Ekvidistanta

Mějme vzdálenost d a křivku k , která má v každém bodě T tečnu t , normálu n , viz obrázek 7.8. Naneseme-li na normálu danou vzdálenost d na stejnou stranu od bodů T^i křivky k , dostaneme křivku \tilde{k} . Tato křivka \tilde{k} se nazývá ekvidistanta (paralelní křivka, offset curve) k dané křivce k .

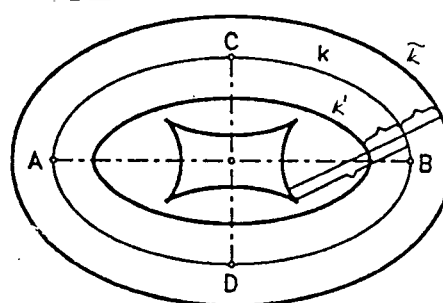


Obr.7.8

Příklad. Ekvidistanty k dané elipse $k(AB, CD)$ jsou zobrazeny na obr.7.9 a 7.10.

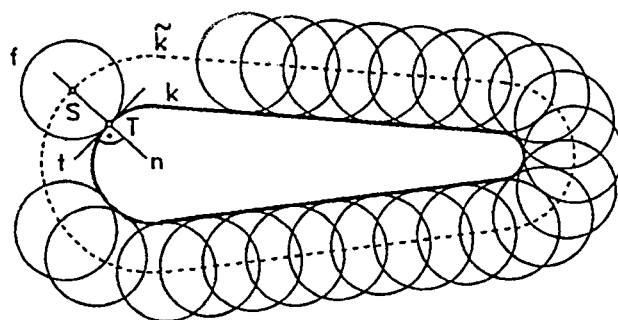


Obr.7.9



Obr.7.10

Užití. Při obrábění se střed kruhové frézy f pohybuje po ekvidistantě \tilde{k} obráběného profilu k , viz obrázek 7.11.

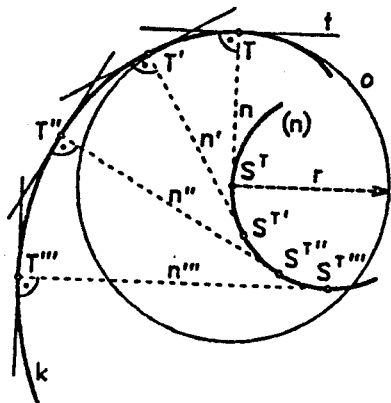


Obr.7.11

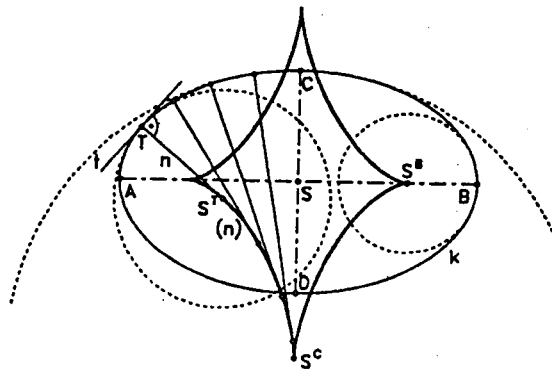
Poznámka. Kruhová fréza f se dotýká obráběného profilu, tzn. má s profilem společnou tečnu t a normálu n v bodě T .

Evoluta, evolventa

Mějme křivku k , která má v každém bodě T tečnu t , normálu n . Potom obálku normál (n) křivky k nazveme evolutou křivky. Mluvíme o dvojici křivek: evoluta (n), evolventa k , viz obr. 7.12.



Obr.7.12



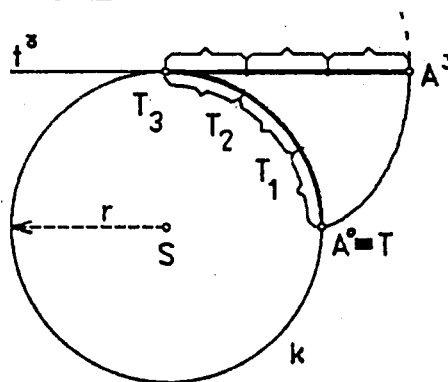
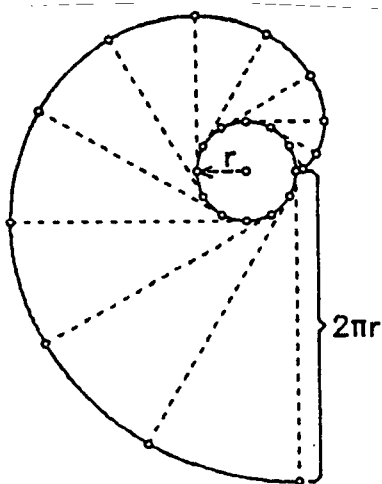
Obr.7.13

Poznámka. Evoluta (n) je množina středů oskulačních kružnic (středů křivosti) křivky k . Na obrázku 7.12 je S^T střed oskulační kružnice $o = (S^T, r = S^T T)$.

Příklad. Evoluta (n) elipsy k je znázorněna na obrázku 7.13. S^B, S^C jsou středy oskulačních kružnic ve vrcholech B, C .

Kruhová evolventa

Nejznámější dvojicí křivek (evoluta, evolventa) je kružnice a kruhová evolventa. Uvažujeme kružnici k a její tečnu t v bodě T , viz obrázek 7.14.

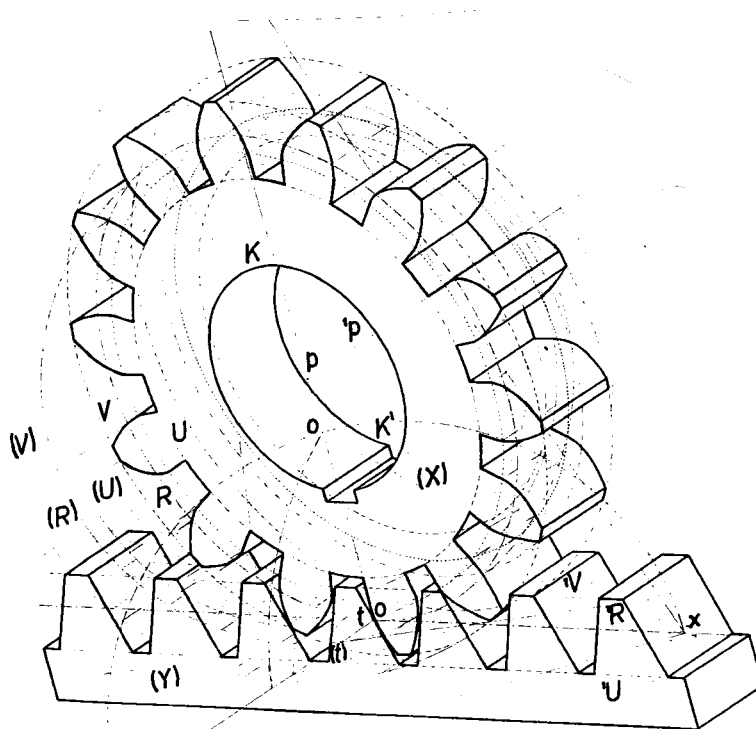
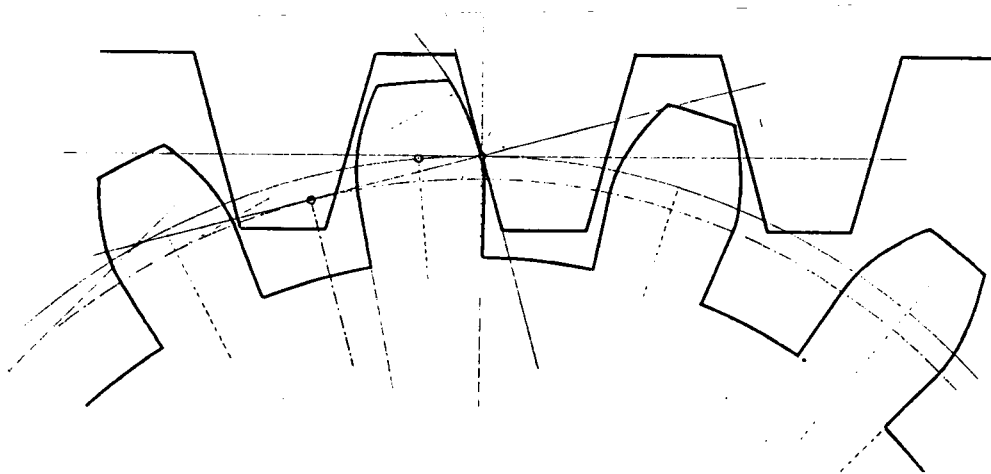


Obr.7.14

Kruhová evolventa vznikne "odvalováním" tečny t po kružnici, to znamená, že při konstrukci dalších poloh bodu A ($A^o \equiv T$) nanášíme délku oblouku na tečnu t kružnice k . Například $T_3 A^3 = \widehat{T_3 A^o}$, viz obr. 7.14. Bližší vysvětlení najde čtenář v dalších částech této kapitoly, které jsou věnovány kinematické geometrii.

Užití

Částí kruhových evolvent se užívá při navrhování evolventního ozubení, viz obrázek 7.15.



Obr.7.15

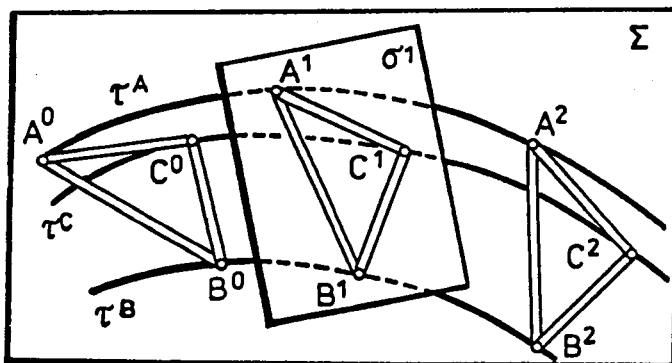
7.2 Kinematická geometrie v rovině

vyšetřuje geometrické vlastnosti rovinného pohybu. Zkoumá trajektorie bodů a obálky křivek a jejich vlastnosti. Nezabývá se způsobem vytvoření pohybu v závislosti na čase. To znamená, že neuvažuje rychlosti a zrychlení pohybujících se útvarů.

Uvažujme **pevnou** rovinnou soustavu Σ , po které se pohybuje **hybná** rovinná soustava σ . Předpokládáme, že pohyb je **spojitý** (speciálně to znamená, že σ se nepřeklápí) a že hybná soustava je uvnitř **neproměnná**. To znamená, že jednotlivé polohy pohybujícího se útvaru $U \subset \sigma$ jsou navzájem **shodné**,

$$U^i \cong U^j, i, j \in \mathbb{N}, U^i \subset \sigma^i, U^j \subset \sigma^j,$$

obrázek 7.16. Označíme τ^A trajektorii bodu A , (k) obálku křivky k .



$$\Delta A^0 B^0 C^0 \cong \Delta A^1 B^1 C^1 \cong \Delta A^2 B^2 C^2, U \equiv \Delta ABC$$

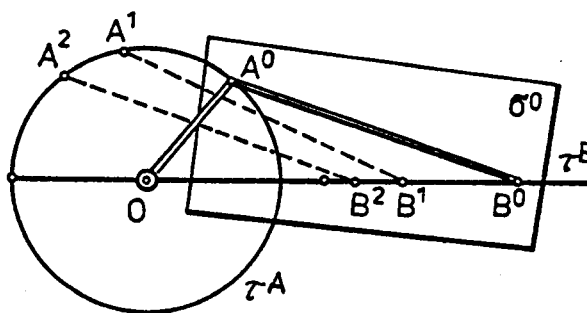
Obr.7.16

Poznámka

V dalším budeme předpokládat, že trajektorie daného pohybu jsou křivky vyhovující definici ze 7.1. Pevnou soustavu Σ ztotožníme s nákresem.

Příklad. Rovinný mechanismus je určen podmínkou, že jeho úsečka AB se pohybuje tak, že bod A se otáčí kolem bodu O a bod B se pohybuje po přímce τ^B . Je zřejmé, že τ^A je kružnice. Mechanismus je znázorněn na obrázku 7.17.

Pevná soustava Σ je určena: τ^A, τ^B, O
 Hybná soustava σ^0 je určena: A^0, B^0
 Platí: $|A^0 B^0| = |A^1 B^1| = |A^2 B^2|$ a podobně pro všechny další polohy hybné soustavy.



Obr.7.17

Poznámka. Pohyb snadno realizujete pomocí průsvitného papíru, který bude hrát roli hybné soustavy. Tímto způsobem si uvědomíte i mezní polohy pohybujících se útvarů.

7.3 Určenost pohybu

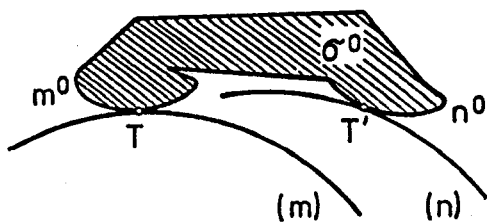
Pohyb útvaru je určen, můžeme-li jednoznačně sestavit jeho další polohy.

Pohyb je určen :

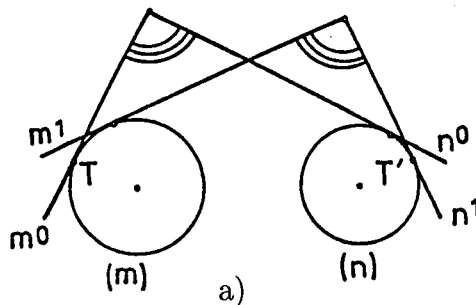
A) Dvěma trajektoriemi τ^A, τ^B bodů $A, B, |AB| = konst.$, viz obrázek 7.17.

B) Dvěma obávkami $(m), (n)$ křivek m, n , viz obrázek 7.18.

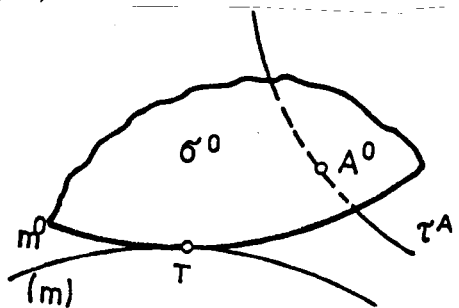
Pokud jsou m, n přímky, pak jejich úhel je při pohybu konstantní, $\angle m n = konst.$, viz obrázek 7.18a.



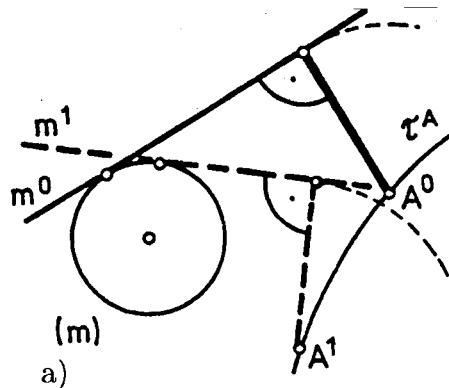
Obr.7.18



C) Obálkou (m) křivky m a trajektorií τ^A bodu A , viz obrázek 7.19.
 Pokud je m přímka, pak vzdálenost bodu A od přímky m je při pohybu konstantní,
 $v(A, m) = konst.$, viz obrázek 7.19a.

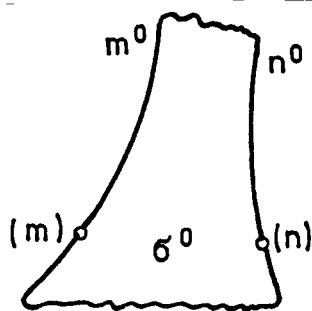


Obr.7.19

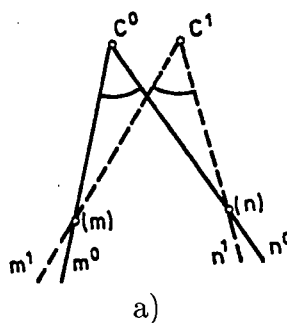


Pohybuje-li se přímka m (resp. křivka) tak, že stále prochází jedním bodem (m) , říkáme, že jej "obaluje" a nazýváme jej **bodovou obálkou** (m) přímky (resp. křivky) m .
 Uvažujeme-li bodové obálky zvlášť, dostaneme další určení pohybu:

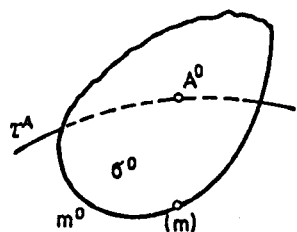
D) Dvěma bodovými obálkami (m) , (n) křivek m, n , viz obrázek 7.20.
 Pokud jsou m, n přímky, pak $\angle m, n = konst.$, viz obrázek 7.20a.



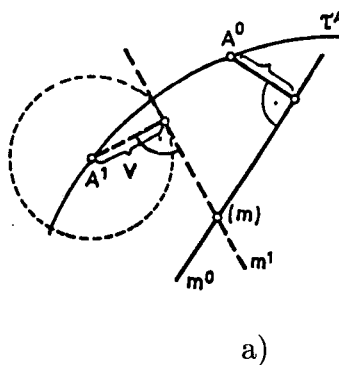
Obr.7.20



E) Bodovou obálkou (m) křivky m a trajektorií τ^A bodu A , viz obr.7.21.
 Pokud je m přímka, pak vzdálenost $v(A, m) = konst.$, viz obrázek 7.21a.



Obr.7.21



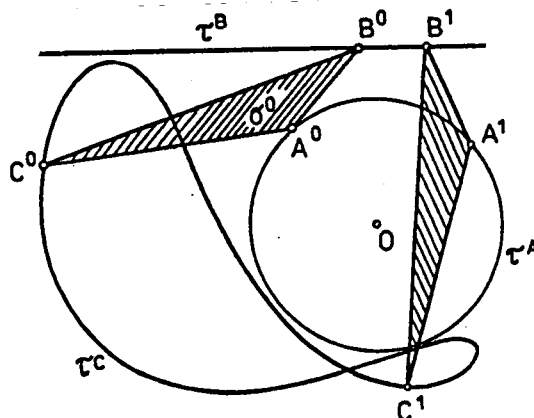
V následujících úlohách se budeme zabývat konstrukcemi trajektorií bodů a obálek přímk (resp.křivek). Přitom uijeme toho, že hybná soustava je uvnitř neproměnná a tudíž jednotlivé polohy pohybujícího se útvaru jsou shodné útvary.

7.3.1 Úloha

Pohyb je dán dvěma trajektoriemi τ^A, τ^B bodů A, B . Sestrojte trajektorii bodu C , viz obr. 7.22.

Řešení

- 1) $\triangle A^0 B^0 C^0$ tvoří hybnou soustavu.
- 2) Zvolíme novou polohu A^1 :
 $A^1 \in \tau^A$.
- 3) Sestrojíme polohu B^1 :
 $B^1 \in \tau^B, |A^0 B^0| = |A^1 B^1|$.
- 4) C^1 : $\triangle A^0 B^0 C^0 \cong \triangle A^1 B^1 C^1$.



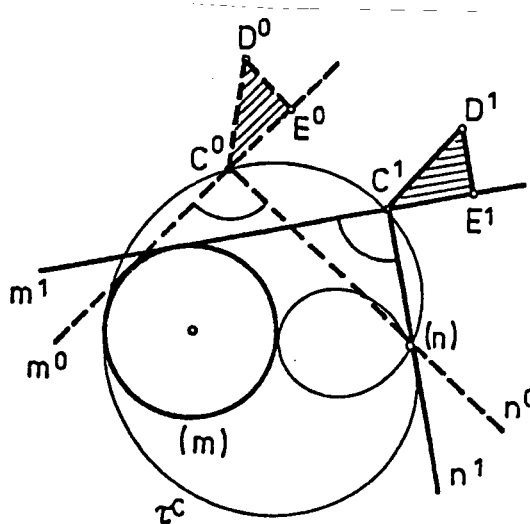
Obr.7.22

7.3.2 Úloha

Pohyb je dán obálkou (m) přímkou m a bodovou obálkou (n) přímkou n . Sestrojte trajektorii bodu C a další polohy bodu D , viz obrázek 7.23.

Řešení

- 1) E^0 : $E^0 \in m^0, E^0 D^0 \perp m^0$,
 E^0 je pomocný bod.
- 2) Hybná soustava obsahuje:
 m^0, n^0, C^0, D^0, E^0 .
- 3) Zvolíme tečnu m^1 obálky (m) .
- 4) Určíme n^1 : $\angle m^0 n^0 = \angle m^1 n^1$,
 n^1 je tečna obálky (n) .
- 5) $C^1 \equiv m^1 \cap n^1$.
- 6) D^1 : $\triangle C^0 D^0 E^0 \cong \triangle C^1 D^1 E^1$.



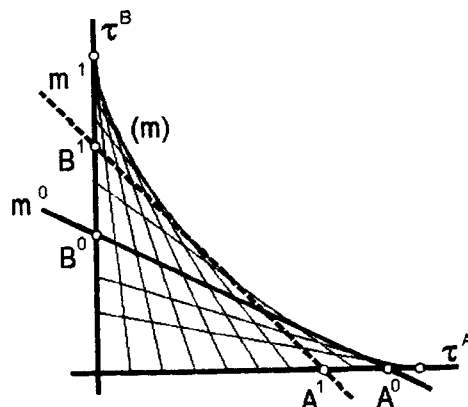
Obr.7.23

7.3.3 Úloha

Pohyb je dán dvěma přímkovými trajektoriemi τ^A, τ^B bodů A, B . Sestrojte obálku přímkou AB , viz obrázek 7.24, $m = AB$.

Řešení

- 1) Hybná soustava obsahuje :
 A^0, B^0, m^0 .
- 2) Zvolíme $A^1 \in \tau^A$.
- 3) Sestrojíme polohu B^1 :
 $B^1 \in \tau^B, |A^0 B^0| = |A^1 B^1|$
- 4) $m^1 = A^1 B^1$ je tečnou obálky (m) .

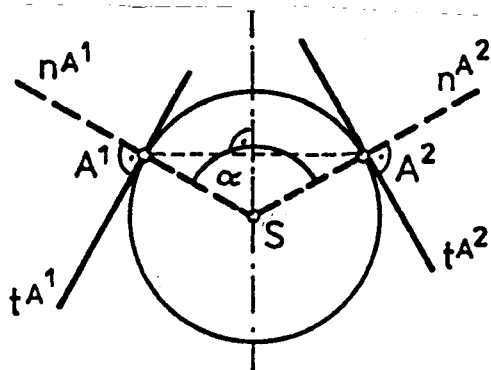


Obr.7.24

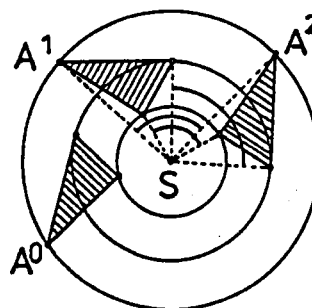
7.4 Elementární pohyby v rovině

Elementárními pohyby v rovině nazýváme otáčení a posunutí.

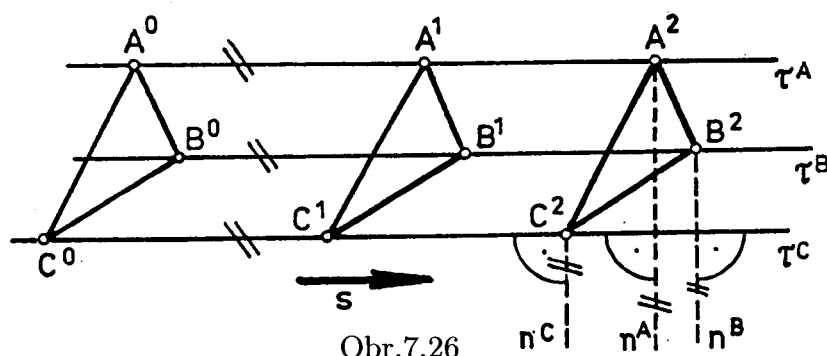
Otáčení je dáno středem S . Trajektorie bodů A ($A \neq S$) v rovině jsou kružnice se středem S . **Normály trajektorií** procházejí středem S , obrázek 7.25a. Otočí-li se útvar U^i do polohy U^j , pak všechny body útvaru U se otočí o tentýž úhel α a $U^i \cong U^j$, viz obr. 7.25b.



Obr.7.25a

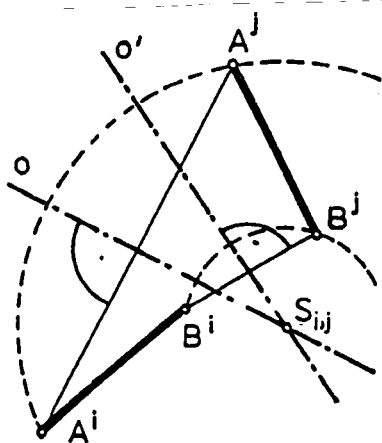


Obr.7.25b

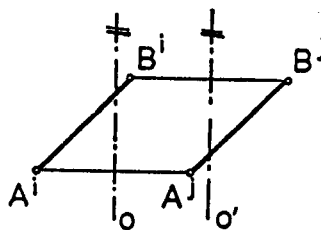


Obr.7.26

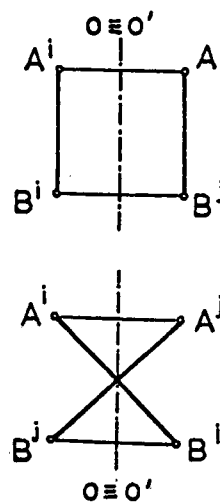
Posunutí je dáno směrem s , trajektorie všech bodů v rovině jsou přímky rovnoběžné se směrem s . Normály trajektorií jsou navzájem rovnoběžné, jsou kolmé ke směru posunutí s , obr. 7.26.



Obr.7.27 a)



b)



c)

7.4.1 Vlastnosti elementárního pohybu

Jsou dány dvě shodné úsečky $A^i B^i, A^j B^j$ v rovině ($A^i \neq A^j, B^i \neq B^j$). Ukažte, že existuje elementární pohyb, který úsečku $A^i B^i$ převádí do úsečky $A^j B^j$, viz obr.7.27.

Důkaz k 7.4.1.

1) o je osa úsečky $A^i A^j$.

2) o' je osa úsečky $B^i B^j$.

3) Uvážíme tři případy elementárního pohybu.

3 a) $o \cap o' \equiv S$, hledaný pohyb je otočení se středem $S \equiv S_{i,j}$.

Z vlastností shodnosti plyne, $\angle A^i S A^j = \angle B^i S B^j$.

3 b) $o \parallel o'$ hledaný pohyb je posunutí ve směru $A^i A^j$.

3 c) $o \equiv o'$ hledaný pohyb je otočení ($A^i B^i \parallel A^j B^j$) nebo posunutí. Všechny tři případy jsou znázorněny na obrázku 7.27.

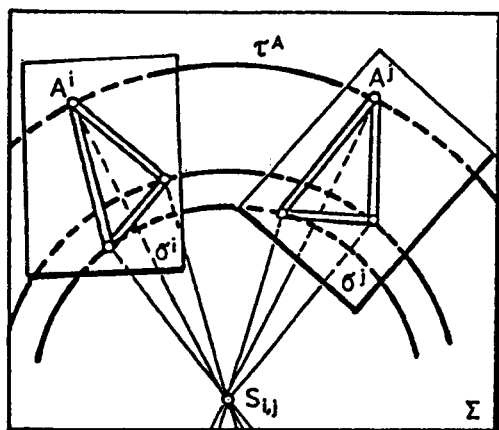
Poznámka. Z vlastností 7.4.1 a z vlastností shodnosti vyplývá, že ke dvěma přímo shodným trojúhelníkům existuje elementární pohyb převádějící jeden trojúhelník do druhého.

7.5 Okamžité otáčení, okamžitý střed otáčení, pól pohybu

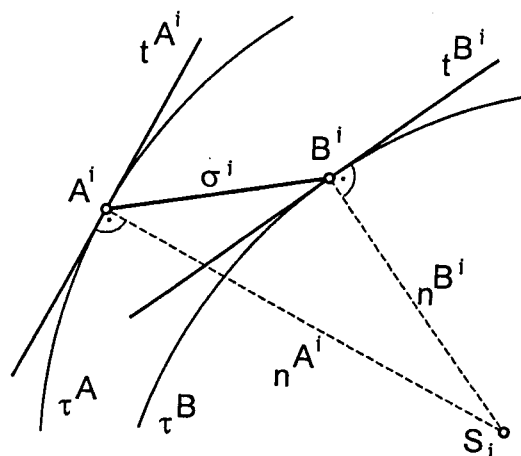
Z vlastností 7.4.1 vyplývá následující věta.

7.5.1 Věta. Jsou dány dvě polohy σ^i, σ^j hybné soustavy σ . Existuje elementární pohyb, který σ^i převádí do polohy σ^j , viz obr. 7.28.

V takovém případě mluvíme o náhradním otáčení, které nahrazuje pohyb mezi dvěma polohami σ^i, σ^j hybné soustavy.



Obr.7.28



Obr.7.29

7.5.2 Okamžité otáčení

Jestliže ponecháme soustavu σ^i na místě a pohybujeme soustavou σ^j "dostatečně" blízko k poloze σ^i , pak uijeme-li označení z 7.4.1, dostaneme, obr. 7.29:

$\sigma^j \rightarrow \sigma^i$ (j - tý okamžik se blíží i - tému okamžiku),

$A^i A^j \rightarrow t^{A^i}, \quad B^i B^j \rightarrow t^{B^i},$

$o \rightarrow n^{A^i}, \quad o' \rightarrow n^{B^i},$

$S_{i,j} \rightarrow S_i$; S_i se nazývá okamžitý střed otáčení, $S_i = n^{A^i} \cap n^{B^i}$.

Náhradní otáčení mezi dvěma polohami hybné soustavy přejde do **okamžitého otáčení**, které nahradí pohyb v blízkosti polohy σ^i (i - tého okamžiku). Střed okamžitého otáčení nazveme **okamžitý střed otáčení** nebo **pól pohybu**.

7.5.3 Věta

Pól S_1 daného pohybu (okamžitý střed otáčení) je průsečík všech normál trajektorií bodů a obálek křivek v i -té poloze (= v i -tém okamžiku).

Důkaz věty vyplývá z předcházejících úvah. Větu 7.5.3 použijeme při konstrukci tečen trajektorií a bodů dotyku obálky

7.5.4 Úloha

Pohyb je dán trajektoriemi τ^A, τ^B bodů A, B . Sestrojte pól pohybu pro danou polohu a tečnu trajektorie bodu C , obr. 7.30.

Řešení.

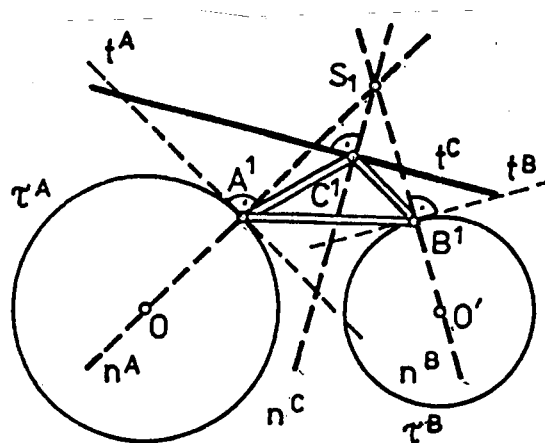
- 1) t^A tečna trajektorie τ^A v bodě A^1 .
- 2) n^A normála trajektorie τ^A v bodě A^1 ,
 $n^A \perp t^A, A^1 \in n^A$
- 3) Obdobně $n^B : B^1 \in n^B, n^B \perp t^B$.
- 4) $S_1 \equiv n^A \cap n^B$.

S_1 je pól pohybu pro polohu σ^1 .

- 5) $n^C = C^1 S_1 \dots$ normála τ^C v bodě C^1 .

- 6) $t^C : C^1 \in t^C, t^C \perp n^C$,

t^C je tečna trajektorie τ^C v bodě C .



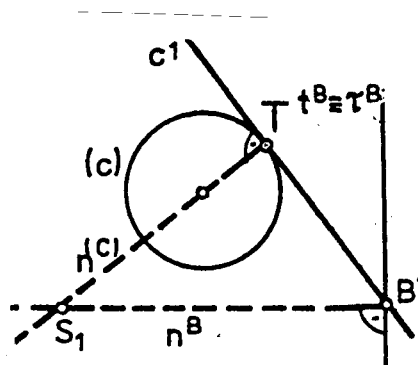
Obr.7.30

7.5.5 Úloha

Pohyb je dán trajektorií τ^B bodu B a obálkou (c) přímky c . Sestrojte pól pohybu pro danou polohu, obr. 7.31.

Řešení

- 1) $t^B \equiv \tau^B$,
(tečna k přímkové trajektorii je s ní totožná).
- 2) $n^B : B^1 \in n^B, n^B \perp t^B$.
- 3) c^1 se dotýká obálky (c) v bodě T .
- 4) $n^{(c)} : T \in n^{(c)}, n^{(c)} \perp c^1$.
- 5) $S_1 \equiv n^B \cap n^{(c)}$.



Obr.7.31

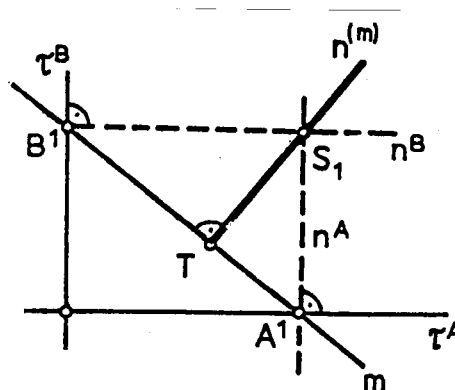
7.5.6 Úloha

Pohyb je dán trajektoriemi τ^A, τ^B bodů A, B . Sestrojte bod dotyku T obálky přímky $m = AB$, obr. 7.32, viz též úlohu 7.3.3.

Řešení

- 1) $n^B : B^1 \in n^B, n^B \perp \tau^B$.
- 2) $n^A : A^1 \in n^A, n^A \perp \tau^A$.
- 3) $S_1 \equiv n^A \cap n^B$,
 S_1 je pól pohybu pro polohu (1).
- 4) $n^{(m)} : S_1 \in n^{(m)}, n^{(m)} \perp A^1 B^1$,
 $n^{(m)}$ je normála k obálce (m).
- 5) $T \equiv n^{(m)} \cap A^1 B^1$.

T je bod dotyku obálky (m). Obr.7.32



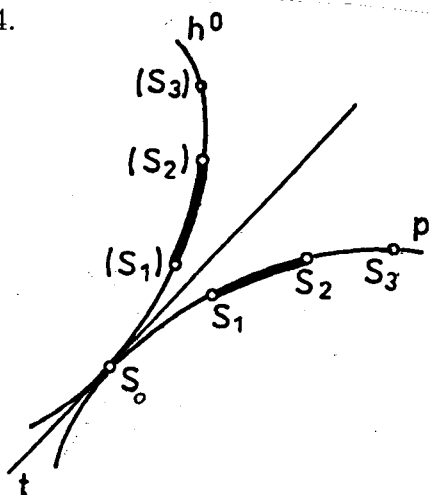
7.6 Polodie pohybu

7.6.1 Odvalování (kotálení) křivek

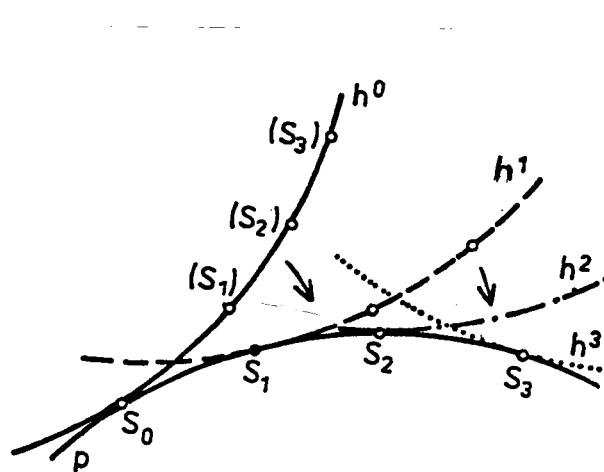
Mějme křivky p , h^0 dotýkající se ve společném bodě S_0 , obrázek 7.33. Zvolme posloupnost bodů na křivce p a označme je po řadě $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$. Sestrojíme body $(S_1), (S_2), (S_3), \dots, (S_k)$ na křivce h^0 tak, aby pro délky oblouků platilo:

$$\widehat{S_i S_{i+1}} = \widehat{(S_i) (S_{i+1})}, i = 0, 1, 2, \dots, k-1.$$

Říkáme, že křivka h se **odvaluje** (kotálí) po křivce p , jestliže se pohybuje tak, že křivky p , h^i se dotýkají, přičemž body $(S_i) \in h$ přecházejí do bodů $S_i \in p$, obrázek 7.34.



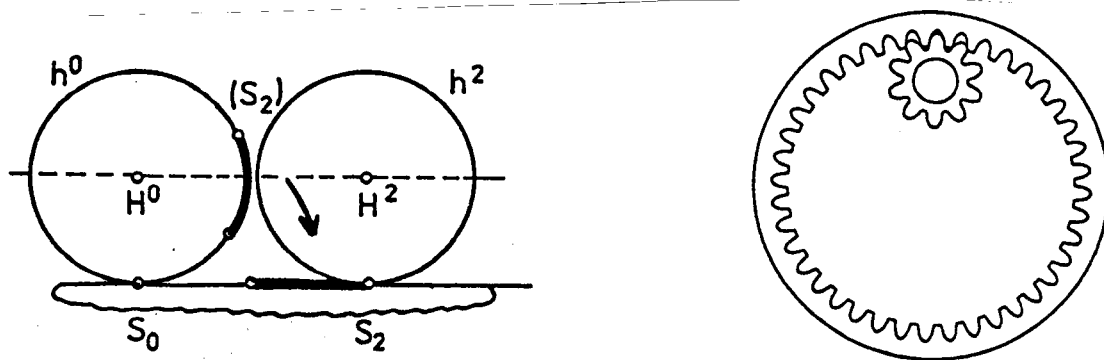
Obr. 7.33



Obr. 7.34

Poznámka. Tato definice je poněkud nepřesná, ale doufám, čtenáři srozumitelná. Stala by se zcela přesnou, kdybychom předpokládali, že nahoře uvedená vlastnost je splněná pro libovolný výběr bodů $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$ na křivce p .

V praxi se odvalování křivky po křivce vyskytuje kupříkladu při pohybu ozubených kol, kolo při jízdě po silnici se rovněž odvaluje, viz obrázek 7.35.



Obr. 7.35

7.6.2 Definice

Pevná polodie p je množina pólů pohybu. Hybná polodie h^i je množina bodů v hybné soustavě σ^i , které se pohybem postupně stanou póly pohybu.

Poznámka. Hybná polodie h^i je tedy množina "budoucích" pólů.

7.6.3 Věta

A) Hybná polodie h^i se odvaluje po pevné polodii p , polodie se dotýkají v pólu S_i .

B) Pohyb v rovině lze převést na odvalování křivky po křivce, tj. hybné polodie h^i po pevné polodii p . Výjimkou jsou pohyby, které mají pouze jeden pól (jsou to otáčení), nebo nemají žádné póly (jsou to posunutí podél křivky).

7.6.4. Úloha

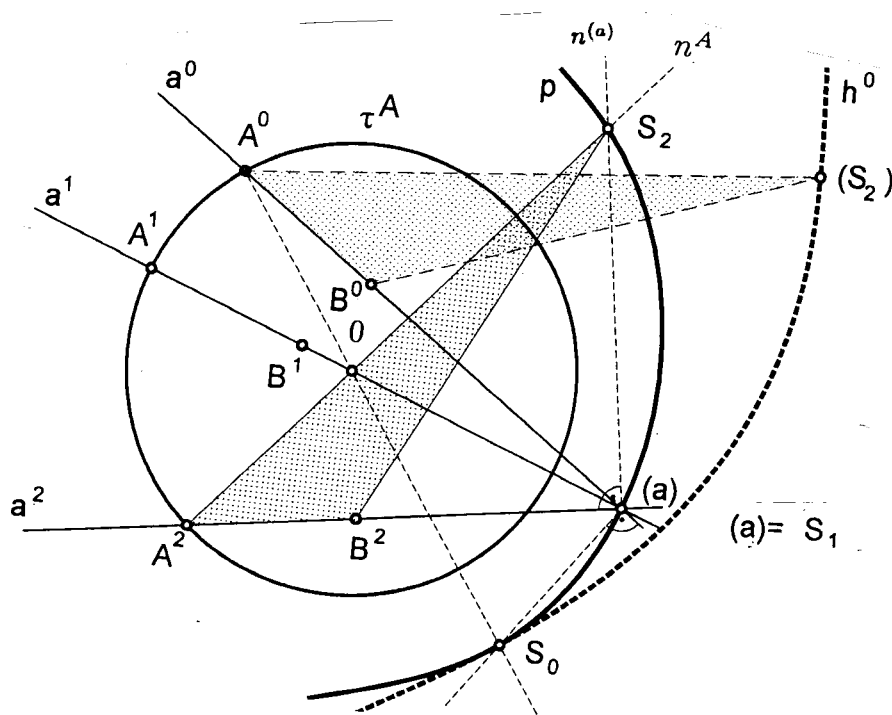
Pohyb je dán přímkovou trajektorií τ^A bodu A a bodovou obálkou (a) přímky a , $A \in a$. Sestrojte polodie pohybu. Konstrukce a výsledek jsou znázorněny na obrázku 7.36.

Konstrukce pevné polodie

Sestrojíme další polohy bodu A , přímky a , pro každou polohu sestrojíme pól pohybu podle (7.5). Pevná polodie $p = \{S_i\}$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$, viz (7.6.2.).

Sestrojení pólu S_2 pohybu pro polohu (2) :

- 1) n^A : $A^2 \in n^A, n^A = OA^2$,
- 2) $n^{(a)}$: $(a) \in n^{(a)}, n^{(a)} \perp a^2$,
- 3) $S_2 = n^A \cap n^{(a)}$.



Obr.7.36

Konstrukce hybné polodie

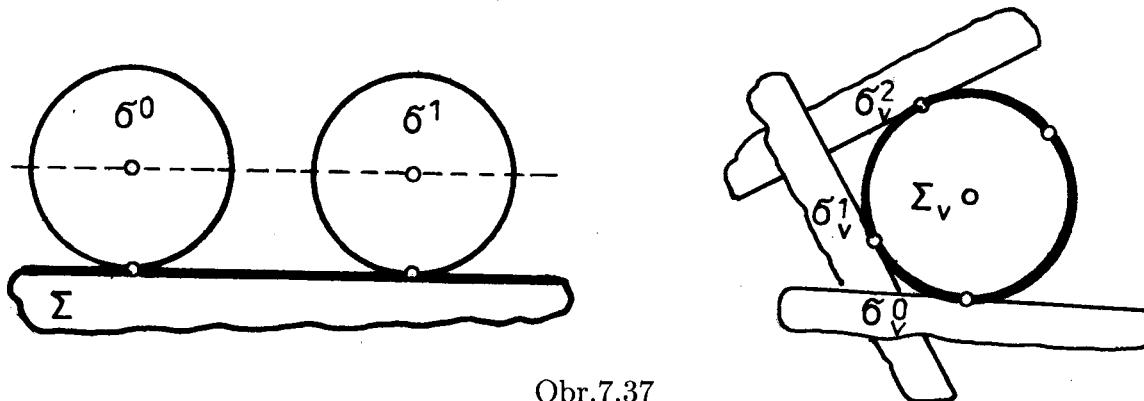
Zvolíme polohu hybné soustavy σ^i a v této poloze hledáme hybnou polodii h^i . Zvolme $i = 0$ a hledáme h^0 . h^0 je množina bodů v 0 – té poloze, které se stanou póly pohybu $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$. Obrátíme tento postup a póly $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$ vrátíme vždy spolu s hybnou soustavou (v našem případě s přímkou a a bodem A) do polohy (0) a dostaneme body $(S_1), (S_2), \dots, (S_k)$ v poloze (0). Na obr.7.36 je vyznačena konstrukce bodu (S_2) .

- 1) Hybná soustava obsahuje bod A , přímku a .
- 2) Uvažujeme $\triangle A^2 B^2 S_2$, kde B^2 je libovolný bod přímky a^2 , přemístíme jej do polohy (0) tak, že
- 3) $\triangle A^2 B^2 S_2 \cong \triangle A^0 B^0 (S_2)$, užitíme větu o shodnosti trojúhelníků.
- 4) $(S_2) \in h^0$ a podobně dostaneme další body hybné polodie h^0 .

7.7 Vratný pohyb

Dosud jsme uvažovali dvě rovinné soustavy Σ , σ . Hybná soustava σ se pohybovala po pevné Σ a vytvářela v ní trajektorie bodů a obálky křivek. Jelikož pohyb závisí na poloze pozorovatele, je relativní, můžeme úlohu soustav zaměnit. Pevná soustava Σ se bude pohybovat a hybná σ zůstane na místě. Dostaneme nový pohyb s pevnou soustavou Σ_v a hybnou σ_v . Platí $\Sigma_v \equiv \sigma^o$, $\sigma_v^o \equiv \Sigma$. Tento nový pohyb nazveme **vratným pohybem** daného pohybu a oba pohyby jsou vratné navzájem.

Příklad. Na obrázku 7.37 je znázorněn pohyb kružnice po přímce a k němu vratný pohyb přímky po kružnici. V obou případech se jedná o odvalování křivky po křivce.



Obr.7.37

7.7.1 Vlastnosti vratného pohybu

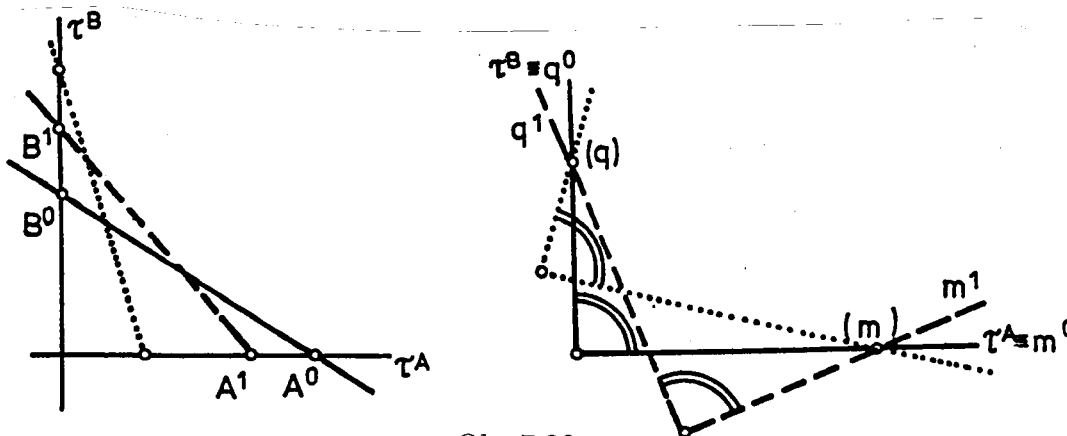
- 1) Jestliže při daném pohybu bod A vytváří trajektorii τ^A , pak se při vratném pohybu pohybuje trajektorie τ^A a to tak, že stále prochází bodem A , obaluje jej.
- 2) Jestliže při daném pohybu křivka k vytváří obálku (k) , pak při vratném pohybu křivka (k) obaluje křivku k .
- 3) Pohyb, který vznikne z daného pohybu záměnou polodií je vratný pohyb.

7.7.2 Příklad vratného pohybu

Pohyb, viz obr. 7.38, je dán dvěma trajektoriemi τ^A, τ^B bodů A, B .

Pevná soustava Σ : τ^A, τ^B , hybná soustava pohybu σ^o : A^o, B^o .

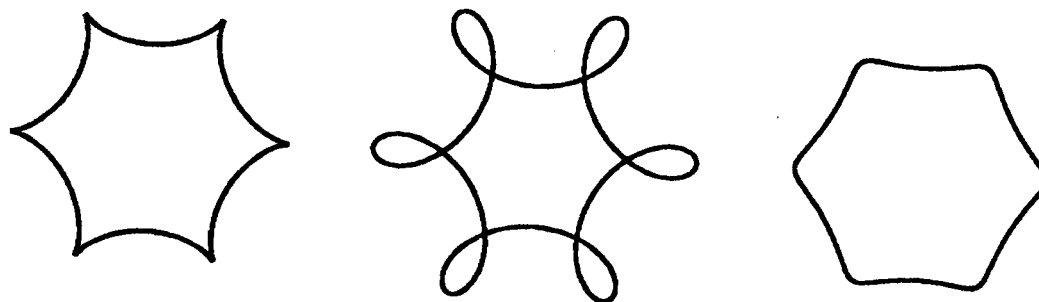
Vratný pohyb má pevnou soustavu Σ_v : A_o, B_o a hybnou soustavu σ_v^o : τ^A, τ^B . Při vratném pohybu se pohybují obě trajektorie tak, že obalují pevné body A^o, B^o . Označíme-li pohybující se přímky $m = \tau^A, q = \tau^B$, pak můžeme říci, že vratný pohyb je dán dvěma bodovými obálkami $(m), (q)$ přímkou m, q ; $\angle m q = konst.$



Obr.7.38

7.8 Cyklické pohyby

Pohyb, jehož polodie jsou kružnice nebo přímky (nikoliv obě současně přímky) se nazývá **cyklický**. Trajektorie bodů při tomto pohybu se nazývají **cyklické křivky** (nebo zkráceně **cykloidy**). Rozeznáváme tři typy cykloid a to a) **prosté** cykloidy s body vratu, b) **prodloužené** cykloidy s uzlovými body a c) **zkrácené** cykloidy s inflexními body (nebo bez nich). Příklady cykloid jednotlivých typů jsou znázorněny na obrázku 7.39.



prostá

prodloužená

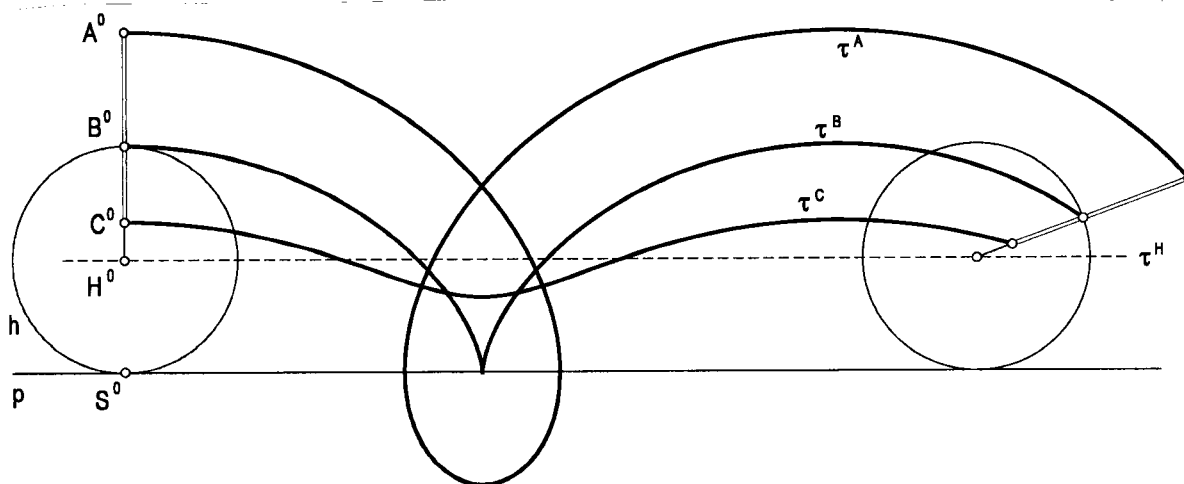
zkrácená

Obr.7.39

Typ cykloidy závisí na poloze pohybujícího se bodu vzhledem k hybné polodii. Body na hybné polodii vytvářejí prosté cykloidy.

7.8.1 Cykloidální pohyb

vzniká odvalováním kružnice h po přímce p . Střed H hybné polodie se pohybuje po přímce τ^H , $\tau^H \parallel p$. Trajektorie bodu A (A^0 leží vně h^0) je prodloužená cykloida, trajektorie bodu C (C^0 leží uvnitř h^0) je zkrácená cykloida. τ^B je prostá (B^0 leží na h^0), obrázek 7.40



Obr.7.40

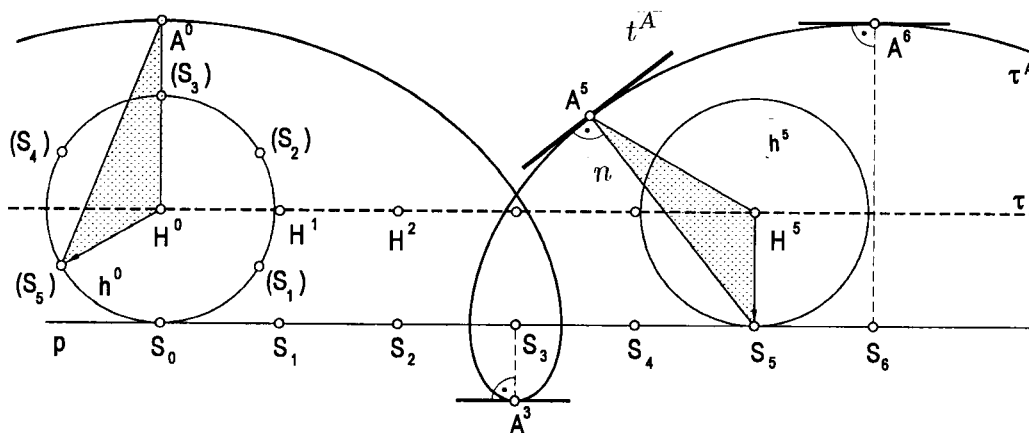
7.8.2 Úloha

Cykloidální pohyb je dán polodiemi p, h . Sestrojte trajektorii τ^A bodu A .

Řešení, viz obrázek 7.41.

Pohyb vzniká odvalováním hybné kružnice h^o po přímce p . Zvolíme póly $S_i \in p$ a sestrojíme "budoucí" póly $(S_i) \in h^o$. Trajektorie τ^H bodu H je přímka, $\tau^H \parallel p$. Sestrojíme další polohy hybné soustavy (h, A, H) tak, že pevná a hybná polodie se dotýkají v pólu pohybu a body A, H jsou pevně spojeny s hybnou polodií, $A^oH^o = A^1H^1 = A^2H^2$ atd. Ukážeme konstrukci 5-té polohy bodu A . Užijeme shodných trojúhelníků: $\triangle A^oH^o(S^5)$ a $\triangle A^5H^5S_5$.

Tečnu t^A trajektorie τ^A v bodě A^5 sestrojíme jako kolmici k k normále n^A , $n^A = S_5A^5$, S_5 je pól pohybu a je to bod dotyku polodií h^5, p .



Obr.7.41

Poznámka. Při odvalování h^o po p rozdělíme h^o např. na 12 stejných dílů a jeden oblouk přibližně rektifikujeme, viz 7.1.2).

7.8.3 Cyklické pohyby,

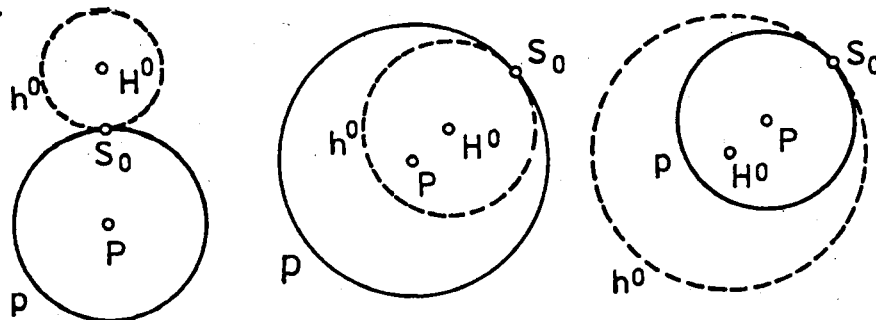
jejichž polodie jsou kružnice, rozdělíme do tří skupin (viz obr. 7.42):

a) **Epicykloidální pohyb** - polodie se dotýkají vně.

b) **Hypocykloidální pohyb** - hybná polodie se odvaluje vnějším obvodem po vnitřním obvodu pevné.

c) **Pericykloidální pohyb** - hybná polodie se odvaluje vnitřním obvodem po vnějším obvodu pevné.

Trajektorie bodů při těchto pohybech se nazývají **epicykloidy, hypocykloidy, pericykloidy**.



Obr.7.42 a)

b)

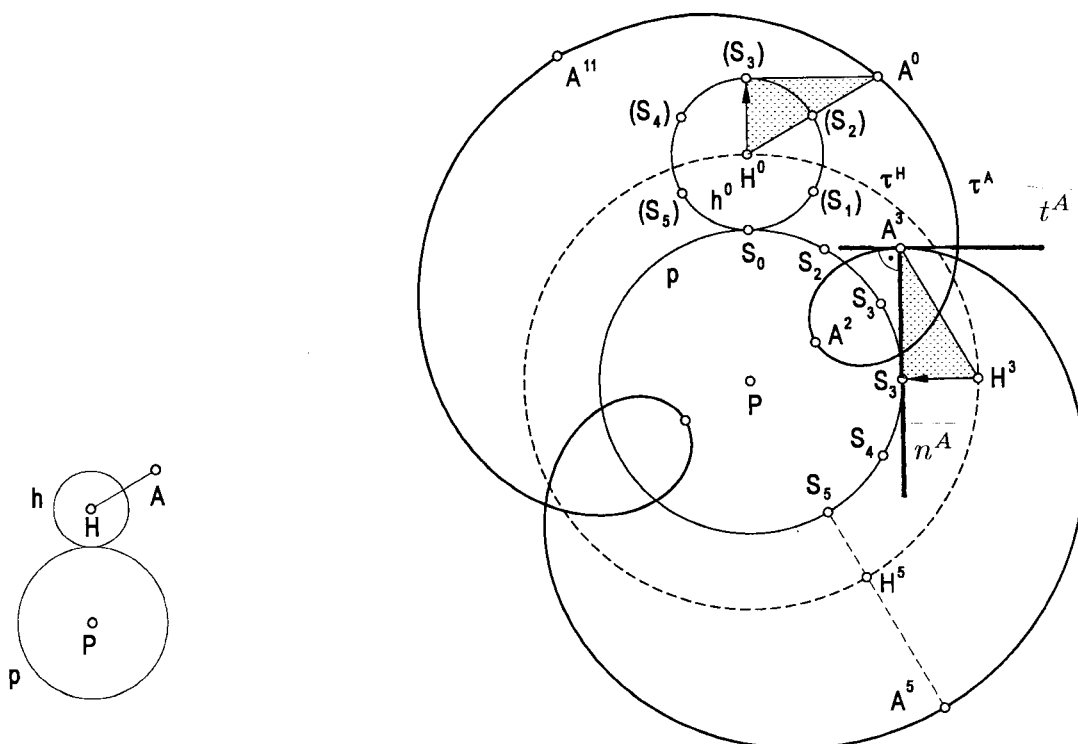
c)

7.8.4 Úloha

Epicykloidální pohyb je dán polodiemi p, h . Sestrojte trajektorii τ^A bodu A a její tečnu v bodě A , řešení i výsledek vidíme na obrázku 7.43.

Řešení

- 1) Zvolíme póly $S_i \in p$, určíme budoucí póly $(S_i) \in h$, $\overline{S_i S_{i+1}} = \overline{(S_i) (S_{i+1})}$.
- 2) Bod A je pevně spojen s hybnou polodií, během pohybu se zachovávají vzdálenosti a úhly v hybné soustavě, trajektorie bodu H je kružnice $\tau^H = (P, PH)$.
- 3) Ukážeme konstrukci třetí polohy A^3 bodu A , užijeme shodné trojúhelníky : $\triangle A^0 H^0 (S^3)$, $\triangle A^3 H^3 S^3$.
- 4) Tečnu trajektorie τ^A v bodě A^3 sestrojíme pomocí její normály $n = A^3 S_3, t^A \perp n$.



Obr.7.43

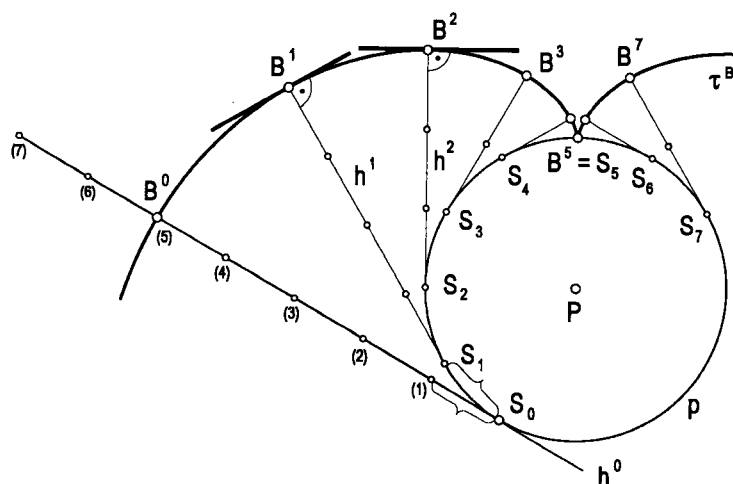
Poznámka. Vrcholy A^5, A^{11} epicykloidy (7.1.1) dostaneme v okamžiku, kdy se bod A^i stane pólem pohybu.

7.8.5 Evolventní pohyb

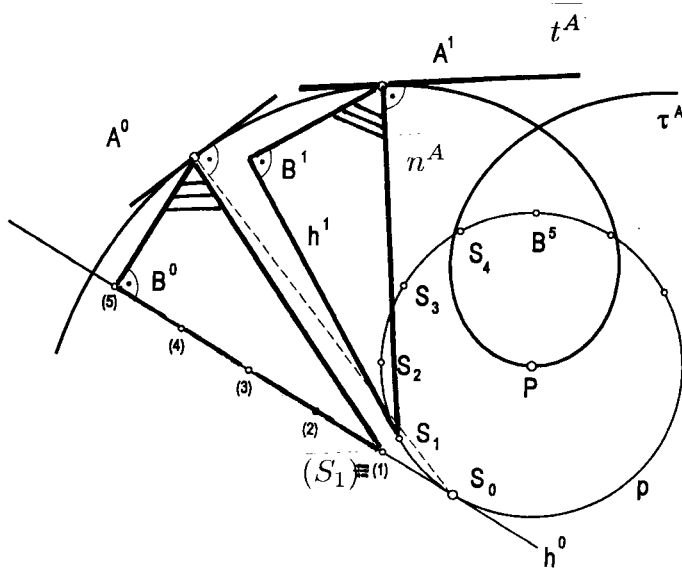
vzniká odvalováním přímky h po kružnici p .

Trajektorie se nazývají evolventy, prostá (obr.7.44), prodloužená (obr 7.45) a zkrácená evolventa.

Konstrukce evolvent je analogická k 7.8.4, plyne z obrázků, všimněte si shodných trojúhelníků $\triangle(\bar{S}_i)B^0 A^0, \triangle S^1 B^1 A^1$, důležitých pro konstrukci τ^A v obr.7.45. V obou obrázcích jsou je zjednodušeno značení, místo (S_1) značíme body pouze (1).



Obr.7.44

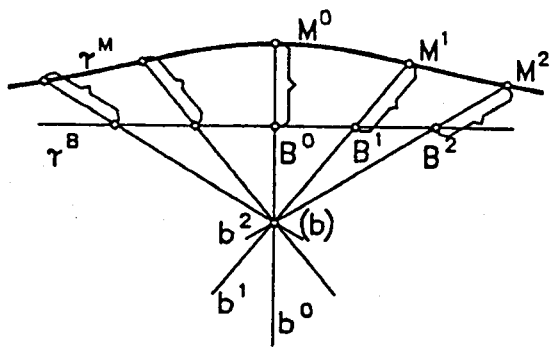


Obr.7.45

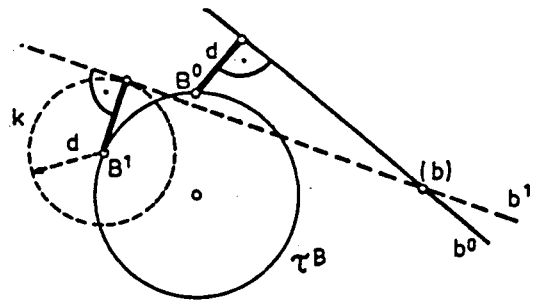
7.9 Konchoidální pohyb

je určen bodovou obálkou (b) přímkou b a trajektorií τ^B bodu B . Trajektorie se nazývají konchoidy. Pokud $B^0 \in b^0$, pak konstrukce dalších poloh a trajektorií τ^M bodu M je zřejmá, viz obrázek 7.46

Pokud $B^0 \notin b^0$, pak při konstrukci dalších poloh užíváme toho, že vzdálenost d bodu B a přímky b je konstantní. Na obrázku 7.47 je pohyb určen kruhovou trajektorií bodu B a bodovou obálkou (b) přímky $b, B^0 \notin b^0$. Další poloha přímky b^1 je tečnou ke kružnici $k = (B^1, d)$, kde B^1 je zvolená poloha bodu B na trajektorii τ^B .



Obr.7.46

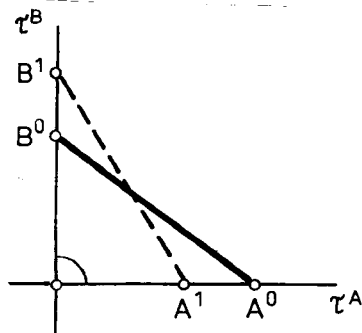


Obr.7.47

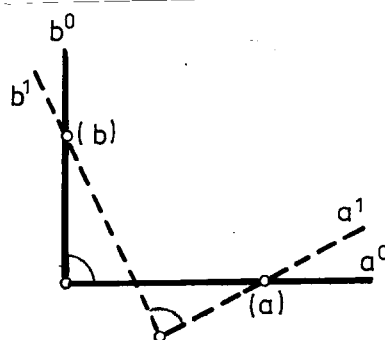
7.10 Eliptický a kardioidický pohyb

Eliptický pohyb je určen dvěma přímkovými trajektoriemi τ^A, τ^B bodů A, B , $|AB| = konst.$, obrázek 7.48.

Kardioidický pohyb je vratný pohyb k eliptickému. Snadno nahlédneme (7.7.2), že je určen dvěma bodovými obálkami $(a), (b)$ přímkou $a, b, \angle ab = konst.$, obrázek 7.49.



Obr.7.48



Obr.7.49

Cvičení, obr.7.50

1) Pohyb je dán dvěma trajektoriemi τ^A, τ^B bodů A, B .

Sestrojte:

- trajektorii τ^C bodu C ,
- tečnu trajektorie τ^C v libovolném bodě,
- bod dotyku obálky přímky AB ,
- obálku přímky AB ,
- pevnou polodii,
- hybnou polodii.

2) Pohyb je dán dvěma obáčkami (a), (b) přímkou a, b .

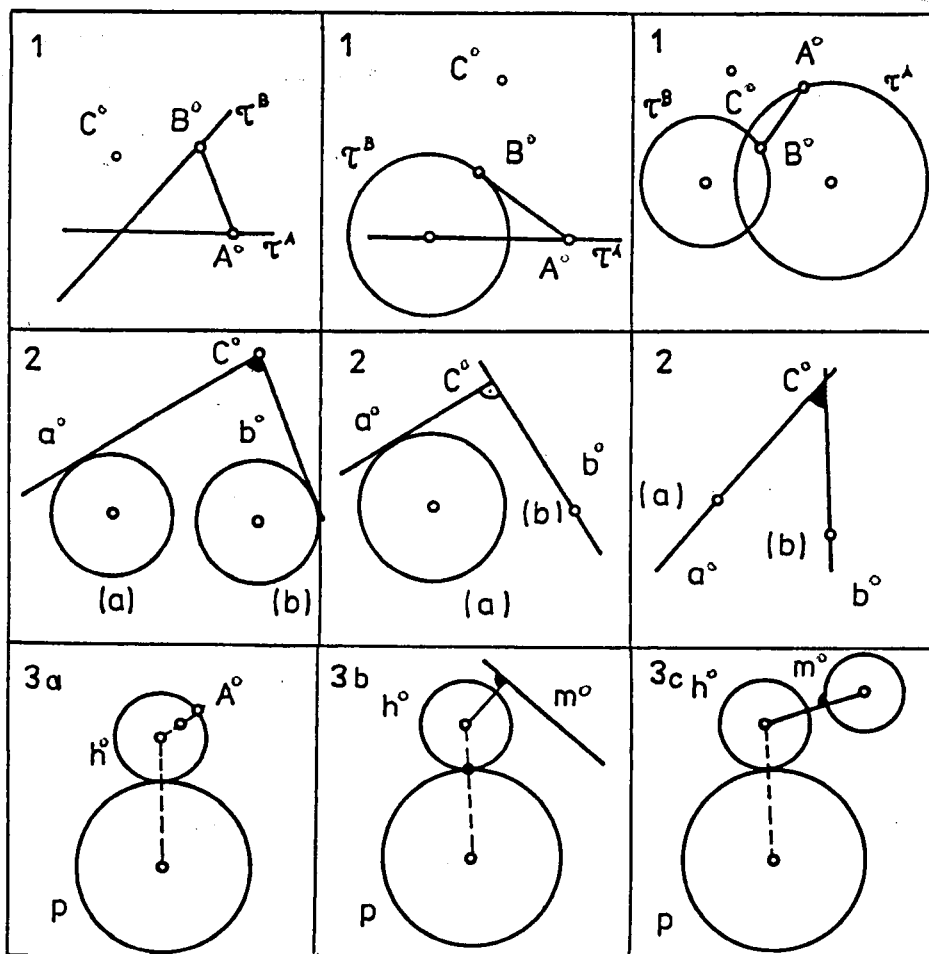
Sestrojte:

- a) trajektorii τ^C bodu C ,
- b) tečnu trajektorie τ^C v libovolném bodě,
- c) pevnou polodii,
- d) hybnou polodii.

3) Je dán cyklický pohyb.

Sestrojte:

- a) trajektorii τ^A bodu A , její tečny a vrcholy,
- b) obálku přímky m a body dotyku obálky přímky m ,
- c) obálku kružnice m .



Obr.7.50