
České vysoké učení technické v Praze
Fakulta strojní
Ústav technické matematiky

APLIKOVANÁ GEOMETRIE



Ivana Linkeová

Praha 2023

Obsah

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Geometrické transformace | 5 |
| 1.1 | Euklidovský prostor a jeho projektivní rozšíření | 5 |
| 1.2 | Poloha útvaru v prostoru | 6 |
| 1.3 | Pohyb útvaru po trajektorii | 7 |
| 1.4 | Druhy pohybu | 8 |
| 1.4.1 | Obecný pohyb | 8 |
| 1.4.2 | Šroubový pohyb | 9 |
| 1.4.3 | Rotační pohyb | 10 |
| 1.4.4 | Translační pohyb | 11 |
| 2 | Promítací metody | 13 |
| 2.1 | Středové promítání | 13 |
| 2.2 | Rovnoběžné promítání | 14 |
| 2.2.1 | Kosoúhlé promítání | 16 |
| 2.2.2 | Axonometrie | 17 |
| | Isometrie | 22 |
| | Technická isometrie | 23 |
| 2.3 | Mongeovo promítání | 26 |
| 3 | Analytická geometrie v rovině | 29 |
| 3.1 | Bod a vektor | 29 |
| 3.2 | Přímka | 30 |
| 3.2.1 | Vektorová rovnice přímky | 30 |
| 3.2.2 | Parametrické rovnice přímky | 31 |
| 3.2.3 | Obecná rovnice přímky | 31 |
| 3.2.4 | Směrnicová rovnice přímky | 31 |
| 3.2.5 | Úseková rovnice přímky | 31 |
| 3.3 | Kuželosečky | 32 |
| 3.3.1 | Kružnice | 33 |
| 3.3.2 | Elipsa | 33 |
| 3.3.3 | Hyperbola | 33 |
| 3.3.4 | Parabola | 34 |
| 3.4 | Přehled kuželoseček | 34 |
| 4 | Analytická geometrie v prostoru | 41 |
| 4.1 | Bod a vektor | 41 |
| 4.2 | Přímka | 42 |
| 4.2.1 | Vektorová rovnice přímky | 42 |
| 4.2.2 | Parametrické rovnice přímky | 42 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.3 | Rovina | 43 |
| 4.3.1 | Vektorová rovnice roviny | 43 |
| 4.3.2 | Parametrické rovnice roviny | 43 |
| 4.3.3 | Úseková rovnice roviny | 43 |
| 4.3.4 | Obecná rovnice roviny | 43 |
| 4.4 | Kvadratické plochy | 44 |
| 4.4.1 | Kulová plocha | 44 |
| 4.4.2 | Elipsoid | 45 |
| 4.4.3 | Hyperboloid | 46 |
| 4.4.4 | Paraboloid | 48 |
| 4.5 | Přehled kvadratických ploch | 50 |
| 5 | Rotační plochy | 55 |
| 5.1 | Rotační válcová plocha | 58 |
| 5.2 | Rotační kuželová plocha | 59 |
| 5.3 | Rotační jednodílný hyperboloid | 60 |
| 5.4 | Kulová plocha | 62 |
| 5.5 | Anuloid | 63 |
| 6 | Šroubové plochy | 67 |
| 6.1 | Přímkové šroubové plochy | 69 |
| 6.1.1 | Uzavřená pravoúhlá šroubová plocha | 69 |
| 6.1.2 | Uzavřená kosoúhlá šroubová plocha | 69 |
| 6.1.3 | Otevřená pravoúhlá šroubová plocha | 72 |
| 6.1.4 | Otevřená kosoúhlá šroubová plocha | 74 |
| 6.2 | Cyklické šroubové plochy | 76 |
| 6.2.1 | Osová cyklická šroubová plocha | 76 |
| 6.2.2 | Vinutý sloupek | 77 |
| 6.2.3 | Archimédova serpentina | 80 |
| 7 | Obalové plochy | 85 |
| 7.1 | Obalové plochy generované pohybem roviny | 86 |
| 7.1.1 | Obalová plocha generovaná rotací roviny | 86 |
| 7.1.2 | Obalová plocha generovaná šroubovým pohybem roviny | 87 |
| 7.2 | Obalové plochy generované pohybem kulové plochy | 89 |
| 7.2.1 | Obalová plocha generovaná přímočarým pohybem kulové plochy | 89 |
| 7.2.2 | Obalová plocha generovaná rotačním pohybem kulové plochy | 89 |
| 7.2.3 | Obalová plocha generovaná šroubovým pohybem kulové plochy | 89 |
| 8 | Rozvinutelné plochy a rozvinutelné přechodové plochy | 93 |
| 8.1 | Rozvinutí části válcové plochy | 94 |
| 8.1.1 | Rozvinutí části obecné válcové plochy | 95 |
| 8.1.2 | Rozvinutí části rotační válcové plochy | 96 |
| 8.1.3 | Rozvinutí části kosé válcové plochy | 96 |
| 8.2 | Rozvinutí části kuželové plochy | 97 |
| 8.2.1 | Rozvinutí části obecné kuželové plochy | 98 |
| 8.2.2 | Rozvinutí části rotační kuželové plochy | 98 |
| 8.2.3 | Rozvinutí části kosé kuželové plochy | 99 |

Kapitola 1

Geometrické transformace

V této kapitole se nejprve zaměříme na analytické vyjádření *bodů* jakožto základního 0-rozměrného (0-parametrického) útvaru v trojrozměrném euklidovském prostoru a v jeho projektivním rozšíření. Analytické reprezentace vícerozměrných útvarů potřebných při studiu aplikované geometrie získáme pohybem tvořícího útvaru nižší dimenze - pohybem bodu vznikne křivka (jednorozměrný neboli jednoparametrický útvar), pohybem křivky vznikne plocha (dvourozměrný neboli dvouparametrický útvar), pohybem plochy vznikne těleso (trojrozměrný neboli trojparametrický útvar) a časovou posloupností 0 až trojrozměrných útvarů vznikne animace. K analytickému vyjádření polohy tvořícího útvaru v prostoru i jeho pohybu použijeme transformační matice. Pohyb a pohybující se útvary budeme zkoumat z hlediska kinematické geometrie, tj. nebudeme uvažovat síly, které pohyb způsobily.

1.1 Euklidovský prostor a jeho projektivní rozšíření

Dříve než přistoupíme k popisu pohybu útvaru v prostoru, zmíníme se o trojrozměrném euklidovském prostoru E^3 a jeho projektivním rozšíření E_∞^3 .

V trojrozměrném euklidovském prostoru E^3 je dána kartézská souřadnicová soustava

$$(O, x, y, z).$$

Každému bodu \mathbf{P} z prostoru E^3 je jednoznačně přiřazena uspořádaná trojice reálných čísel – *kartézské souřadnice* $(x_{\mathbf{P}}, y_{\mathbf{P}}, z_{\mathbf{P}})$, které vyjadřují vzdálenosti bodu \mathbf{P} od souřadnicových rovin (y, z) , (x, z) a (x, y) v daném pořadí. Bod \mathbf{P} v prostoru E^3 je tedy jednoznačně určen kartézskými souřadnicemi

$$\mathbf{P} = (x_{\mathbf{P}}, y_{\mathbf{P}}, z_{\mathbf{P}}).$$

Doplněním prostoru E^3 o nevlastní prvky vznikne projektivní rozšíření trojrozměrného euklidovského prostoru E_∞^3 , ve kterém je bod \mathbf{P} popsán *homogenními souřadnicemi* (x_h, y_h, z_h, w) .

Uspořádanou čtveřici reálných čísel (x_h, y_h, z_h, w) , $w \neq 0$, nazýváme *pravoúhlými homogenními souřadnicemi* bodu \mathbf{P} v projektivním rozšíření euklidovského prostoru E_∞^3 , jestliže platí

$$x_{\mathbf{P}} = \frac{x_h}{w}, \quad y_{\mathbf{P}} = \frac{y_h}{w}, \quad z_{\mathbf{P}} = \frac{z_h}{w},$$

kde reálná čísla $x_{\mathbf{P}}$, $y_{\mathbf{P}}$, $z_{\mathbf{P}}$ jsou kartézské souřadnice bodu $\mathbf{P} = (x_{\mathbf{P}}, y_{\mathbf{P}}, z_{\mathbf{P}})$ v trojrozměrném euklidovském prostoru E^3 . Bod \mathbf{P} v prostoru E_∞^3 je tedy jednoznačně určen homogenními souřadnicemi

$$\mathbf{P} = (x_h, y_h, z_h, w).$$

Body v prostoru E_∞^3 , pro které $w = 0$, odpovídají vektorům a nazývají se *nevlastní body*. Jestliže $w = 1$, říkáme, že homogenní souřadnice bodu \mathbf{P} jsou v *základním tvaru*. V takovém případě platí

$$x_{\mathbf{P}} = x_h, \quad y_{\mathbf{P}} = y_h, \quad z_{\mathbf{P}} = z_h$$

a bod \mathbf{P} v prostoru E_∞^3 je jednoznačně určen homogenními souřadnicemi v základním tvaru

$$\mathbf{P} = (x_{\mathbf{P}}, y_{\mathbf{P}}, z_{\mathbf{P}}, 1).$$

Zavedení homogenních souřadnic umožní maticový zápis geometrických transformací, které použijeme k nalezení analytické reprezentace polohy útvaru v prostoru i útvaru, který vzniká pohybem jiného útvaru.

1.2 Poloha útvaru v prostoru

Abychom vyjádřili obecnou polohu útvaru (bod, křivka, těleso) v prostoru E_∞^3 vzhledem ke *globálnímu souřadnicovému systému* s počátkem O a osami x, y, z se souřadnicovými vektory

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1, 0)$$

v daném pořadí, zavedeme *lokální kartézský souřadnicový systém* s počátkem Ω a osami ξ, η, ζ , který pevně spojíme s uvažovaným útvarem. *Základní polohu útvaru*, kdy je lokální souřadnicový systém útvaru totožný s globálním souřadnicovým systémem, označíme \mathbf{U}_0 . *Obecnou polohu útvaru*, kdy lokální souřadnicový systém není totožný s globálním souřadnicovým systémem, označíme \mathbf{U} .

K tomu, abychom útvar přemístili ze základní polohy \mathbf{U}_0 do obecné polohy \mathbf{U} , potřebujeme znát souřadnice počátku $\Omega = (x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega, 1)$ lokálního souřadnicového systému útvaru v globálním souřadnicovém systému a úhly, které svírají osy ξ, η, ζ s osami x, y, z . Analytickou reprezentací tohoto přemístění (transformace souřadnic) je *transformační matice*

$$\mathbb{G} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z & 0 \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z & 0 \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z & 0 \\ x_\Omega & y_\Omega & z_\Omega & 1 \end{pmatrix},$$

jejíž prvky ξ_x, ξ_y, ξ_z , resp. η_x, η_y, η_z , resp. $\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z$, jsou cosiny úhlů, které svírá osa ξ s osami x, y, z , resp. osa η s osami x, y, z , resp. osa ζ s osami x, y, z .

Analytickou reprezentací útvaru v obecné poloze je součin

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 \cdot \mathbb{G}.$$

Útvar v obecné poloze má stejný rozměr a tvar jako původní útvar v základní poloze (např. přemístěná křivka je stále jednoparametrická množina bodů).

Je-li matice \mathbb{G} jednotková, je útvar v obecné poloze totožný s útvarem v základní poloze a jedná se o *identitu*.

1.3 Pohyb útvaru po trajektorii

Pokud uvažujeme spojitý pohyb útvaru po trajektorii

$$\mathbf{T}(t) = (x(t), y(t), z(t), 1),$$

nebude poloha počátku Ω ani úhly, které svírají osy lokálního souřadnicového systému útvaru s osami globálního souřadnicového systému konstantní, ale budou závislé na parametru t . Analytickou reprezentací pohybu po trajektorii $\mathbf{T}(t)$ je potom transformační matice

$$\mathbb{G}(t) = \begin{pmatrix} \xi_x(t) & \xi_y(t) & \xi_z(t) & 0 \\ \eta_x(t) & \eta_y(t) & \eta_z(t) & 0 \\ \zeta_x(t) & \zeta_y(t) & \zeta_z(t) & 0 \\ x(t) & y(t) & z(t) & 1 \end{pmatrix}.$$

Předpokládáme, že $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ jsou reálné funkce proměnné t , které jsou definované, spojitě a alespoň jedenkrát diferencovatelné.

Jestliže se útvar na počátku pohybu nacházel v základní poloze, je analytickou reprezentací útvaru, který vznikne jeho pohybem po trajektorii $\mathbf{T}(t)$ součin

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_0 \cdot \mathbb{G}(t).$$

Útvar se ale nemusí na počátku pohybu nacházet v základní poloze. Může zaujímat obecnou polohu vůči svému lokálnímu souřadnicovému systému, kterou nazveme *počáteční poloha útvaru* a útvar v počáteční poloze označíme $\tilde{\mathbf{U}}$. Lokální souřadnicový systém útvaru v počáteční poloze označíme $(\tilde{\Omega}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta})$. Počáteční poloha útvaru je popsána souřadnicemi počátku v počáteční poloze $\tilde{\Omega} = (\xi_{\tilde{\Omega}}, \eta_{\tilde{\Omega}}, \zeta_{\tilde{\Omega}}, 1)$ a úhly natočení os $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\zeta}$ lokálního souřadnicového systému útvaru v počáteční poloze vůči osám ξ , η , ζ lokálního souřadnicového systému útvaru v základní poloze. Analytickou reprezentací přemístění útvaru ze základní polohy do polohy počáteční je transformační matice

$$\tilde{\mathbb{G}} = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_\xi & \tilde{\xi}_\eta & \tilde{\xi}_\zeta & 0 \\ \tilde{\eta}_\xi & \tilde{\eta}_\eta & \tilde{\eta}_\zeta & 0 \\ \tilde{\zeta}_\xi & \tilde{\zeta}_\eta & \tilde{\zeta}_\zeta & 0 \\ \xi_{\tilde{\Omega}} & \eta_{\tilde{\Omega}} & \zeta_{\tilde{\Omega}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Analytická reprezentace útvaru v počáteční poloze je součin

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U}_0 \cdot \tilde{\mathbb{G}}.$$

Analytická reprezentace útvaru, který vznikne pohybem útvaru v počáteční poloze po trajektorii $\mathbf{T}(t)$ je potom

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_0 \cdot \tilde{\mathbb{G}} \cdot \mathbb{G}(t).$$

Jestliže je matice $\tilde{\mathbb{G}}$ jednotková, je počáteční poloha útvaru totožná se základní polohou útvaru.

Pohybem vzniká útvar, který má rozměr o 1 větší než měl původní útvar – pohybem bodu vzniká křivka, pohybem křivky vzniká plocha, pohybem plochy vzniká těleso a časovou sekvencí jednotlivých poloh libovolného útvaru po trajektorii získáme animaci.

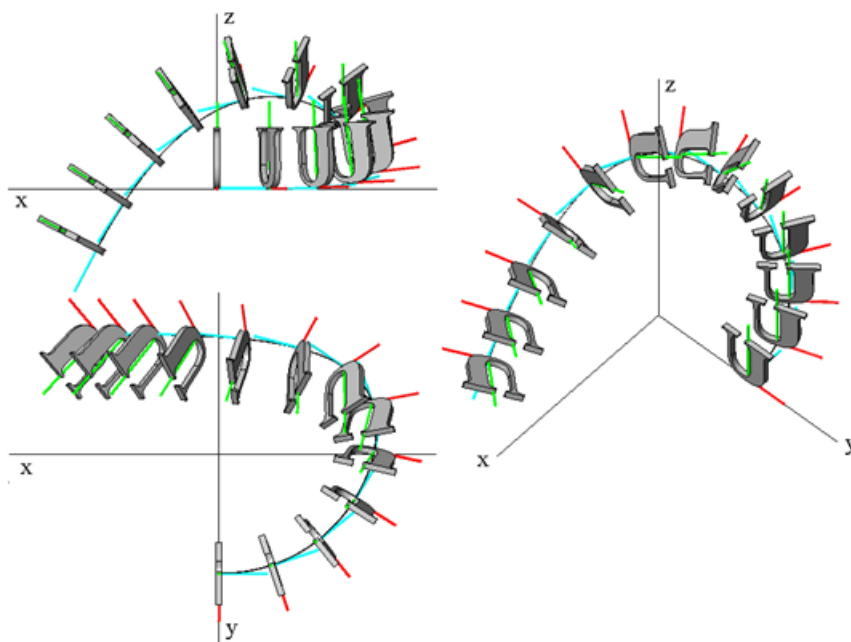
1.4 Druhy pohybu

Abychom mohli zkoumat útvar, který vzniká pohybem jiného útvaru, je nutné polohu pohybujícího se útvaru blíže specifikovat. Je-li trajektorií útvaru křivka obecného tvaru, hovoříme o *křivočarém* pohybu. Pokud pohybující se útvar zachovává při křivočarém pohybu neměnnou orientaci vůči trajektorii, hovoříme o pohybu *obecném*. Jestliže útvar zachovává při křivočarém pohybu neměnnou orientaci vůči globálnímu souřadnicovému systému, hovoříme o pohybu *translačním* neboli posunutí. Je-li trajektorií translačního pohybu přímka, jedná se o pohyb *přímočarý*.

V technické praxi se často setkáme s pohybem *šroubovým*, což je speciální případ obecného pohybu, u kterého se útvar pohybuje po šroubovici. Je-li výška závitu šroubovice nulová, vzniká pohyb *rotační* jako speciální případ šroubového pohybu. V následujících odstavcích odvodíme transformační matice $\mathbb{G}(t)$ pro zmíněné druhy pohybu.

1.4.1 Obecný pohyb

Příklad obecného pohybu je uveden na obr. 1.1, kde je v nárýsu, půdorysu a axnometrickém průmětu zobrazeno několik poloh útvaru pohybujícího se podél křivkové trajektorie obecným pohybem. Matice $\tilde{\mathbb{G}}$ pro situaci, která je nakreslena na obrázku, je jednotková. Osy $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ lokálního souřadného systému pohybujícího se útvaru jsou v konkrétních polohách nakresleny světle modrou, červenou a zelenou barvou v daném pořadí.



Obrázek 1.1: Příklad obecného pohybu útvaru

V případě obecného pohybu mění útvar neustále svoji polohu tak, aby v každém okamžiku souřadnicovými vektory os $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ byly vektory

$$\begin{aligned} -\mathbf{n}(t) &= (-x_{\mathbf{n}}(t), -y_{\mathbf{n}}(t), -z_{\mathbf{n}}(t), 0), \\ \mathbf{t}(t) &= (x_{\mathbf{t}}(t), y_{\mathbf{t}}(t), z_{\mathbf{t}}(t), 0), \\ \mathbf{b}(t) &= (x_{\mathbf{b}}(t), y_{\mathbf{b}}(t), z_{\mathbf{b}}(t), 0), \end{aligned}$$

tj. vektor opačný k jednotkovému vektoru hlavní normály trajektorie, jednotkový tečný vektor trajektorie a jednotkový vektor binormály trajektorie v daném pořadí [1]. Cosiny úhlů, které svírají osy $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ s osami x , y , z , jsou potom

$$\begin{aligned} \xi_x(t) &= -x_{\mathbf{n}}(t), & \xi_y(t) &= -y_{\mathbf{n}}(t), & \xi_z(t) &= -z_{\mathbf{n}}(t), \\ \eta_x(t) &= x_{\mathbf{t}}(t), & \eta_y(t) &= y_{\mathbf{t}}(t), & \eta_z(t) &= z_{\mathbf{t}}(t), \\ \zeta_x(t) &= x_{\mathbf{b}}(t), & \zeta_y(t) &= y_{\mathbf{b}}(t), & \zeta_z(t) &= z_{\mathbf{b}}(t) \end{aligned}$$

a transformační matice obecného pohybu má tvar

$$\mathbb{G}(t) = \begin{pmatrix} -x_{\mathbf{n}}(t) & -y_{\mathbf{n}}(t) & -z_{\mathbf{n}}(t) & 0 \\ x_{\mathbf{t}}(t) & y_{\mathbf{t}}(t) & z_{\mathbf{t}}(t) & 0 \\ x_{\mathbf{b}}(t) & y_{\mathbf{b}}(t) & z_{\mathbf{b}}(t) & 0 \\ x(t) & y(t) & z(t) & 1 \end{pmatrix}.$$

První tři řádky transformační matice vyjadřují natáčení os $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ v souladu s vektory $-\mathbf{n}(t)$, $\mathbf{t}(t)$, $\mathbf{b}(t)$, poslední řádek vyjadřuje translaci útvaru v základní poloze podél trajektorie $\mathbf{T}(t)$.

1.4.2 Šroubový pohyb

Šroubový pohyb je složený z otáčení kolem osy šroubového pohybu a posunutí ve směru osy šroubového pohybu. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že osou šroubového pohybu je osa z . Dále budeme uvažovat takový šroubový pohyb, kdy velikost posunutí útvaru je přímo úměrná otočení útvaru a vzdálenost útvaru od osy šroubového pohybu se nemění. Trajektorií šroubového pohybu je potom cylindrická šroubovice, jejíž jeden závit má analytickou reprezentaci

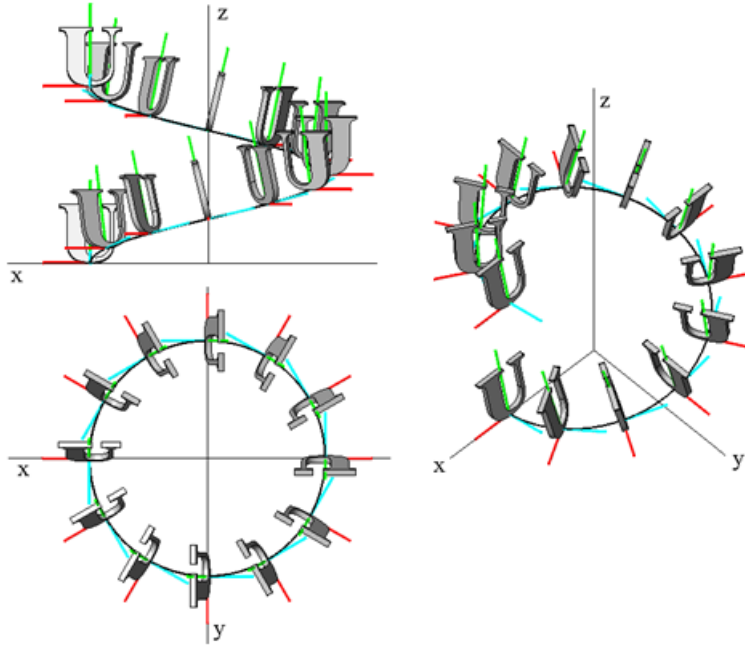
$$\mathbf{T}(t) = (r \cos t, r \sin t, v_0 t, 1),$$

kde parametr t je z intervalu $[0, 2\pi]$, r je poloměr otáčení a v_0 je redukováná výška závitu, tj. velikost posunutí přímo úměrná otočení o 1 rad.

Šroubový pohyb má charakter obecného pohybu, neboť útvar zachovává neměnnou polohu vůči šroubovici. Na obr. 1.2 je v nárysu, půdorysu a axonometrickém průmětu nakresleno několik poloh útvaru při šroubovém pohybu, kdy matice \mathbb{G} je jednotková.

Abychom určili konkrétní prvky matice $\mathbb{G}(t)$ šroubového pohybu, vyjádříme jednotkový tečný vektor šroubovice

$$\mathbf{t}(t) = \left(-\frac{r \sin t}{\sqrt{r^2 + v_0^2}}, \frac{r \cos t}{\sqrt{r^2 + v_0^2}}, \frac{v_0}{\sqrt{r^2 + v_0^2}}, 0 \right),$$



Obrázek 1.2: Příklad šroubového pohybu útvaru

jednotkový vektor binormály šroubovice

$$\mathbf{b}(t) = \left(\frac{v_0 \sin t}{\sqrt{r^2 + v_0^2}}, -\frac{v_0 \cos t}{\sqrt{r^2 + v_0^2}}, \frac{r}{\sqrt{r^2 + v_0^2}}, 0 \right)$$

a jednotkový vektor hlavní normály šroubovice

$$\mathbf{n}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0, 0).$$

Transformační matice šroubového pohybu má potom tvar

$$\mathbb{G}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\frac{r \sin t}{\sqrt{r^2 + v_0^2}} & \frac{r \cos t}{\sqrt{r^2 + v_0^2}} & \frac{v_0}{\sqrt{r^2 + v_0^2}} & 0 \\ \frac{v_0 \sin t}{\sqrt{r^2 + v_0^2}} & -\frac{v_0 \cos t}{\sqrt{r^2 + v_0^2}} & \frac{r}{\sqrt{r^2 + v_0^2}} & 0 \\ r \cos t & r \sin t & v_0 t & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

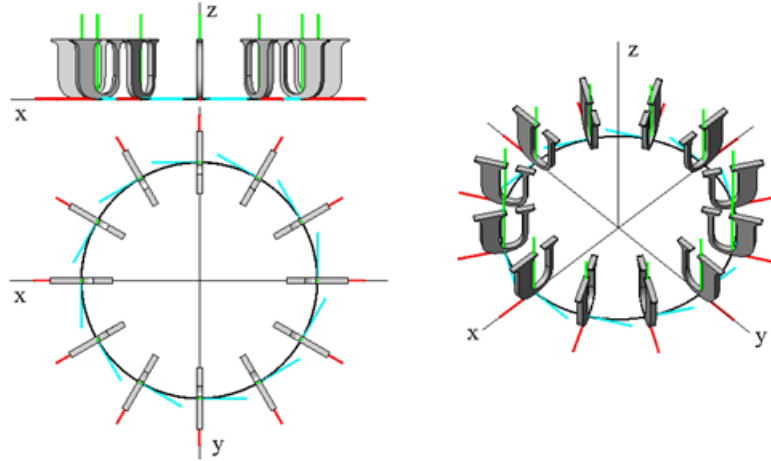
První tři řádky této matice vyjadřují natačení os $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ v souladu s vektory $-\mathbf{n}(t)$, $\mathbf{t}(t)$, $\mathbf{b}(t)$ šroubovice, poslední řádek vyjadřuje translaci útvaru v základní poloze podél šroubovice.

1.4.3 Rotační pohyb

Rotační pohyb, jakožto zvláštní případ šroubového pohybu, kdy redukovaná výška závitu je nulová, má charakter obecného pohybu. Pohybující se útvar zachovává neměnnou orientaci

vůči trajektorii, kterou je kružnice. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že trajektorií rotačního pohybu je kružnice o poloměru r ležící v rovině (x, y) se středem v počátku. Potom je osa rotace totožná s osou z . Analytická reprezentace takové kružnice je

$$\mathbf{T}(t) = (r \cos t, r \sin t, 0, 1), \quad t \in [0, 2\pi].$$



Obrázek 1.3: Příklad rotačního pohybu útvaru

Na obr. 1.3 je nakresleno v nárysu, půdorysu a axonometrickém průmětu několik poloh útvaru při rotačním pohybu, kdy matice \mathbb{G} je jednotková.

Transformační matici rotačního pohybu dostaneme, dosadíme-li $v_0 = 0$ do transformační matice šroubového pohybu (1.1)

$$\mathbb{G}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ r \cos t & r \sin t & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

První tři řádky této matice vyjadřují otáčení útvaru kolem osy z , poslední řádek vyjadřuje translaci útvaru podél kružnice o poloměru r .

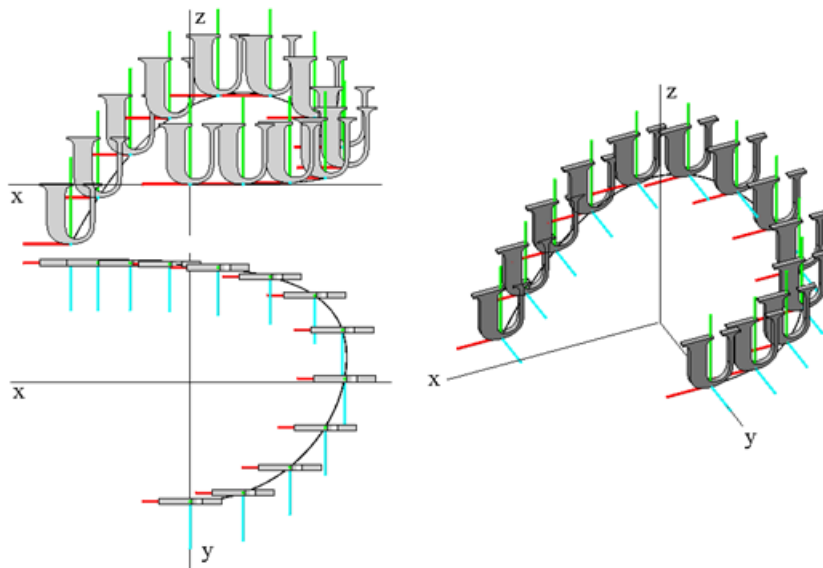
1.4.4 Translační pohyb

Pokud pohybující se útvar nemění při pohybu podél trajektorie $\mathbf{T}(t)$ svou orientaci vůči globálnímu souřadnicovému systému, pohybuje se translačním pohybem. Trajektoriemi všech bodů útvaru, který vykonává translační pohyb, jsou křivky shodné až na posunutí s původní trajektorií $\mathbf{T}(t)$. Znamená to, že osy $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ lokálního souřadnicového systému útvaru jsou v každém okamžiku rovnoběžné se svou polohou na počátku pohybu, kdy $t = 0$.

Na obr. 1.4 je nakresleno v nárysu, půdorysu a axonometrickém průmětu několik poloh útvaru při translačním pohybu po trajektorii obecného tvaru (stejného tvaru jako v případě obecného pohybu), kdy matice \mathbb{G} je jednotková.

Protože se útvar při translačním pohybu nikterak nenatáčí, jsou první tři řádky transformační matice translačního pohybu prvními třemi řádky jednotkové matice. Poslední řádek vyjadřuje vlastní translaci útvaru po trajektorii $\mathbf{T}(t)$

$$\mathbb{G}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x(t) & y(t) & z(t) & 1 \end{pmatrix}.$$



Obrázek 1.4: Příklad translačního pohybu útvaru

Kapitola 2

Promítací metody

V technické praxi je naprosto nezbytný přesný popis tvaru a velikosti každého vyráběného objektu tak, aby bylo zaručeno, že finální výrobek bude zcela odpovídat návrhu, který vytvořil konstruktér. K přesnému zachycení geometrického tvaru a grafických informací 3D prostorového útvaru na 2D médium (technický výkres, display) slouží *promítací metody* (promítání), což je speciální druh zobrazení prostoru na zvolenou rovinu – *průmětnu*. Rozlišujeme dva základní druhy promítání - *středové* a *rovnoběžné*.

2.1 Středové promítání

Středové promítání je dáno vlastním bodem – *středem promítání* $\mathbf{S} \in E_{\infty}^3$ a průmětnou ρ , přičemž platí, že střed promítání neleží v průmětně. Obrazem – *středovým průmětem* libovolného bodu $\mathbf{A} \in E_{\infty}^3$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{S}$, (středu promítání není přiřazen žádný obraz, nemá průmět) je bod $\mathbf{A}' \in \rho$, který je průsečíkem *promítací přímkou* $a = \mathbf{AS}$ procházející bodem \mathbf{A} a bodem \mathbf{S} s průmětnou ρ . Na obr. 2.1 je zobrazen příklad středového promítání bodů \mathbf{A} , \mathbf{B} a \mathbf{C} na půdorysnu $\pi = (x, y)$.

Nechť střed promítání je bod $\mathbf{S} = (m, n, p, 1)$, $p \neq 0$, a průmětnou je půdorysna $\pi = (x, y)$. Potom analytickou reprezentací středového promítání je transformační matice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ -m & -n & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix},$$

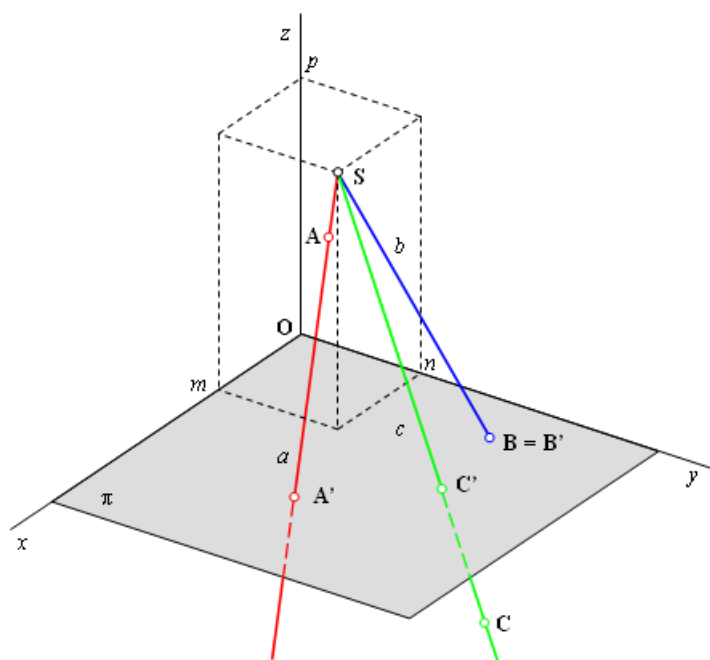
a středovým průmětem bodu $\mathbf{A} = (x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{A}}, z_{\mathbf{A}}, 1)$ je

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} = \left(\frac{px_{\mathbf{A}} - mz_{\mathbf{A}}}{p - z_{\mathbf{A}}}, \frac{py_{\mathbf{A}} - nz_{\mathbf{A}}}{p - z_{\mathbf{A}}}, 0, 1 \right).$$

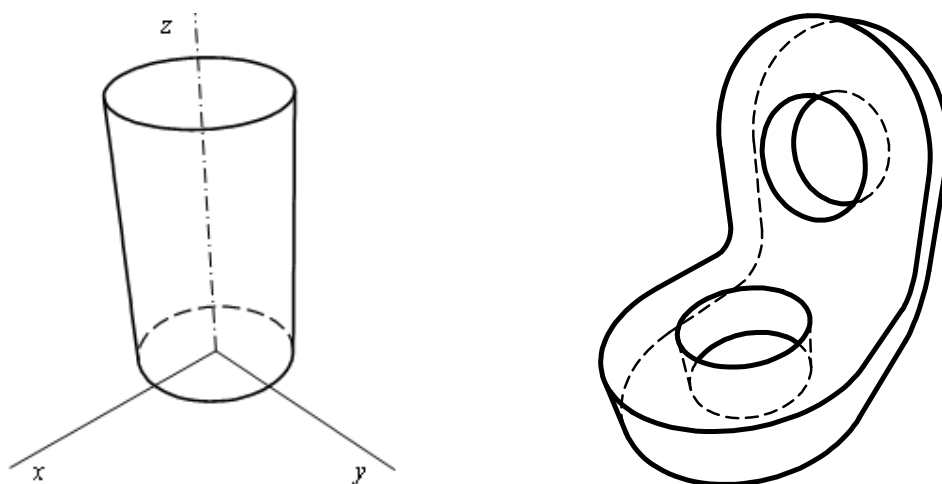
Středovým průmětem útvaru je útvar, který získáme jako množinu středových průmětů všech bodů promítaného útvaru.

Středovému promítání se zde dále věnovat nebudeme, neboť se pro zobrazování objektů ve strojírnosti příliš nehodí. Dochází totiž ke zkreslení tvaru. Je to patrné z obr. 2.2, kde je vlevo zobrazen středový průmět rotačního válce s osou rotace totožnou s osou z . Rotační válec se promítá do komolého kužele. Vpravo na tomtéž obrázku je zobrazen spojovací úhelník.

Aplikací středového promítání je lineární perspektiva, která se používá k zobrazování objektů především v umění, architektuře a stavitelství.



Obrázek 2.1: Středové promítání

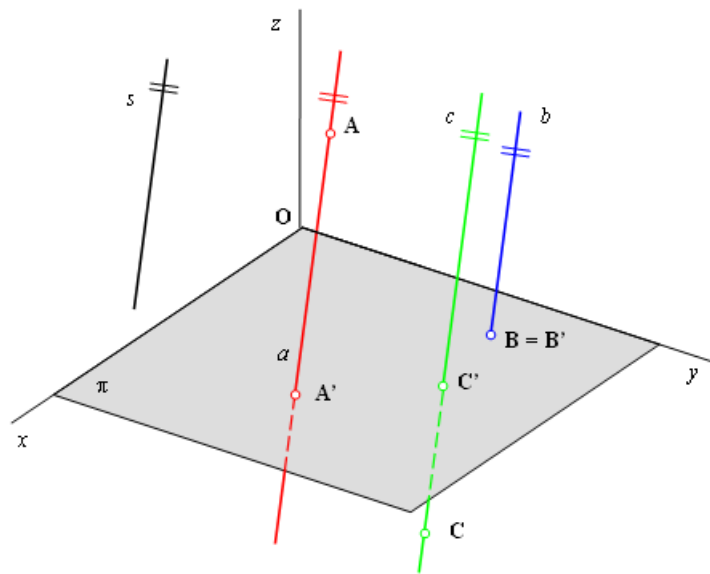


Obrázek 2.2: Rotační válec (vlevo) a spojovací úhelník (vpravo) ve středovém promítání

2.2 Rovnoběžné promítání

Ve strojírenství se převážně používá rovnoběžné promítání určené *směrem promítání* s , který reprezentuje osnovu přímků prostoru E_{∞}^3 majících s přímkou s společný nevlastní bod, a který protíná průmětnu ϱ ve vlastním bodě. Obrazem libovolného bodu $\mathbf{A} \in E_{\infty}^3$ je bod $\mathbf{A}' \in \varrho$, který je průsečíkem *promítací přímkou* $a \parallel s$, $\mathbf{A} \in a$ s průmětnou ϱ .

Rovnoběžné promítání je speciálním případem středového promítání, kdy střed promítání leží v nevlastním bodě prostoru E_{∞}^3 . Příklad rovnoběžného promítání bodů \mathbf{A} , \mathbf{B} a \mathbf{C} na půdorysnu $\pi = (x, y)$ je nakreslen na obr. 2.3.



Obrázek 2.3: Rovnoběžné promítání

Rovnoběžným průmětem útvaru je útvar, který získáme rovnoběžným průmětem všech bodů promítaného útvaru. Konkrétně:

- Rovnoběžným průmětem bodu je bod.
- Rovnoběžným průmětem přímky rovnoběžné se směrem promítání (promítací přímky) je bod – průsečík promítané přímky s průmětnou. Rovnoběžným průmětem přímky různoběžné se směrem promítání je přímka.
- Rovnoběžným průmětem roviny rovnoběžné se směrem promítání (promítací roviny) je přímka – průsečnice promítané roviny s průmětnou. Rovnoběžným průmětem roviny různoběžné s průmětnou je celá průmětna.

Mezi důležité vlastnosti rovnoběžného promítání patří:

- Rovnoběžným promítáním se zachovává incidence (náležení).
- Průmět útvaru, který leží v rovině rovnoběžné s průmětnou je shodný s promítaným útvarem.
- Rovnoběžným promítáním se zachovává rovnoběžnost.
- Rovnoběžným promítáním se zachovává dělicí poměr tří bodů na přímce.

Aplikací rovnoběžného promítání je *obecná axonometrie*, což je rovnoběžné promítání na *axonometrickou průmětnu*. Podle úhlu φ , který svírá směr promítání s axonometrickou průmětnou, se obecná axonometrie dělí na *kosoúhlou axonometrii*, kdy $\varphi \neq 90^\circ$ a *pravoúhlou axonometrii*, kdy $\varphi = 90^\circ$. Speciálním případem kosoúhlé axonometrie je *kosoúhlé promítání*, u kterého je axonometrická průmětna totožná s některou ze souřadnicových rovin. Pokud je promítání pravoúhlé a axonometrická průmětna zaujímá obecnou polohu vůči souřadnicovému systému, hovoříme stručně o *axonometrii*. Jak kosoúhlé promítání, tak také axonometrie se používá ve strojírenské praxi. Na technických výkresech se pak používá především *Mongeovo promítání*, což je pravoúhlé promítání na dvě (popř. více) vzájemně kolmé průmětny.

2.2.1 Kosoúhlé promítání

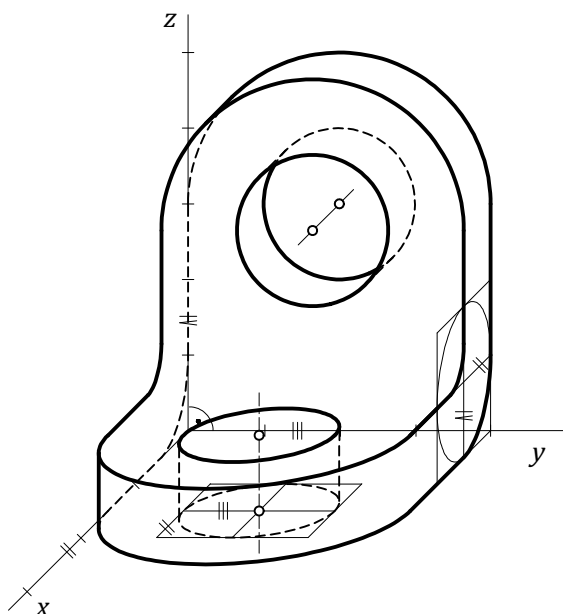
U kosoúhlého promítání je průmětnou zpravidla bokorysna $\mu = (y, z)$ a směr promítání s s ní svírá jiný úhel než 90° nebo 0° . Nechť je směr promítání reprezentován směrovým vektorem $\mathbf{s} = (m, n, p, 0)$, $p \neq 0$, průmětnou je bokorysna $\mu = (y, z)$ a platí $m \neq 0$. Potom analytickou reprezentací rovnoběžného promítání je transformační matice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & -n & -p & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$$

a rovnoběžným průmětem bodu $\mathbf{A} = (x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{A}}, z_{\mathbf{A}}, 1)$ je

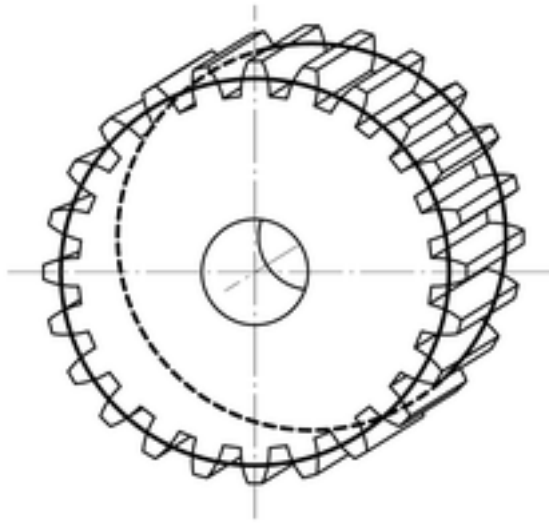
$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} = \left(0, \frac{my_{\mathbf{A}} - nx_{\mathbf{A}}}{m}, \frac{mz_{\mathbf{A}} - px_{\mathbf{A}}}{m}, 1 \right).$$

V syntetické reprezentaci je průmětnou bokorysna $\mu = (y, z)$, proto se veškeré rozměry rovnoběžné se souřadnicovými osami y a z promítají ve skutečné velikosti. Rozměry rovnoběžné se souřadnicovou osou x se promítají zkreslené. Poměr zkreslení x -ových souřadnic je volitelný a označuje se jako *kvocient kosoúhlého promítání* $q = \frac{x_k}{x}$, kde x_k je velikost promítnuté x -ové souřadnice a x je velikost skutečné x -ové souřadnice. Úhel mezi kosoúhlým průmětem osy y a kosoúhlým průmětem osy z je pravý, úhel ω mezi kosoúhlým průmětem osy x a kosoúhlým průmětem osy y je volitelný. Často se volí $q = 1 : 2$ a $\omega = 135^\circ$, viz obr. 2.4, kde je nakreslen spojovací úhelník (stejný jako na obr. 2.2) v tomto promítání. Jsou však obvyklé i jiné hodnoty q a ω .



Obrázek 2.4: Spojovací úhelník v kosoúhlém promítání $q = 1 : 2$, $\omega = 135^\circ$

Kosoúhlé promítání se kvůli značné jednoduchosti často používá k náčrtkům a vysvětlujícím zobrazením v technickém textu, viz obr. 2.5 (převzato z [2]).



Obrázek 2.5: Ozubené kolo v kosoúhlém promítání

Vzhledem ke skutečnosti, že kosoúhlým průmětem kulové plochy je elipsa a její vnitřek, nepoužívá se kosoúhlého promítání v CAD systémech a 3D modelářích.

2.2.2 Axonometrie

Axonometrií míníme pravoúhlé promítání na axonometrickou průmětnu, která zaujímá obecnou polohu vůči souřadnicovým osám. Vzhledem k tomu, že se jedná o rovnoběžné promítání, má axonometrie všechny výše uvedené vlastnosti rovnoběžného promítání, ale protože jde zároveň o promítání pravoúhlé, vyznačuje se navíc ještě následujícími vlastnostmi:

- Délka pravoúhlého průmětu úsečky **AB** na přímce svírající s průmětnou úhel β je rovna délce promítané úsečky násobené $\cos \beta$. Znamená to, že délka pravoúhlého průmětu úsečky je rovna délce promítané úsečky pouze tehdy, je-li úsečka na přímce rovnoběžné s průmětnou. V opačném případě je kratší.
- Pravoúhlé promítání zachovává pravý úhel, je-li jedno jeho rameno rovnoběžné s průmětnou a druhé k ní není kolmé.
- Pravoúhlý průmět kulové plochy je kružnice a její vnitřek.

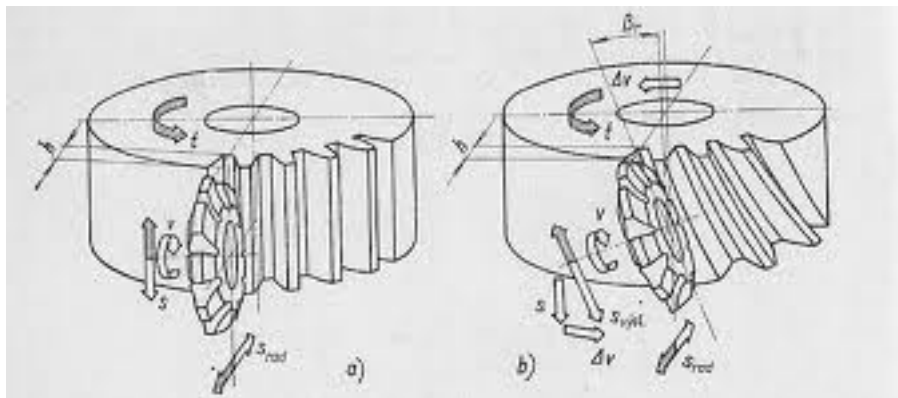
Je-li nákresnou půdorysna $\pi = (x, y)$, je analytickou reprezentací axonometrie transformační matice

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha \cdot \sin \varepsilon & 0 & 0 \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \cdot \sin \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde α je azimut a ε je elevace, $\alpha, \varepsilon \in (-360^\circ, 360^\circ)$, $\alpha, \varepsilon \neq 0^\circ, \pm 90^\circ, \pm 180^\circ, \pm 270^\circ$. Axonometrickým průmětem bodu $\mathbf{A} = (x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{A}}, z_{\mathbf{A}}, 1)$ je

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} = (y_{\mathbf{A}} \sin \alpha - x_{\mathbf{A}} \cos \alpha, -\sin \varepsilon (x_{\mathbf{A}} \sin \alpha + y_{\mathbf{A}} \cos \alpha) + z_{\mathbf{A}} \cos \varepsilon, 1).$$

Axonometrie se používá velmi často na technické náčrty, viz obr. 2.6 (převzato z [3]), v CAD systémech a ve 3D modelářích.



Obrázek 2.6: Výroba ozubených kol dělicí metodou v axonometrii

Jak již bylo řečeno, axonometrie je rovnoběžné pravoúhlé promítání na axonometrickou průmětnu ϱ v obecné poloze vůči kartézskému souřadnicovému systému (O, x, y, z) se souřadnicovými vektory

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0) \text{ a } \mathbf{k} = (0, 0, 1), \quad (2.1)$$

viz obr. 2.7. Axonometrická průmětna ϱ protíná souřadnicové osy x , y a z v bodech

$$X = \varrho \cap x, Y = \varrho \cap y, Z = \varrho \cap z,$$

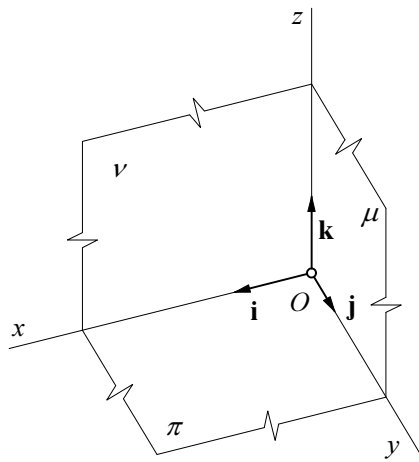
vrcholech axonometrického trojúhelníka $\triangle XYZ$, viz obr. 2.8, a souřadnicové roviny $\pi = (x, y)$, $\mu = (y, z)$ a $\nu = (x, z)$ v přímkách, na nichž leží strany

$$XY = \varrho \cap \pi, YZ = \varrho \cap \mu, ZX = \varrho \cap \nu$$

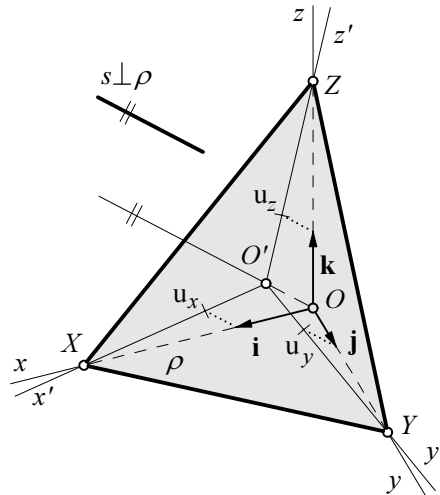
axonometrického trojúhelníka $\triangle XYZ$. Průmět počátku O souřadnicového systému je bod $O' \in \varrho$ v ortocentru axonometrického trojúhelníka $\triangle XYZ$. Průměty souřadnicových os x , y a z jsou přímky $x' = O'X$, $y' = O'Y$ a $z' = O'Z$, na kterých leží výšky axonometrického trojúhelníka $\triangle XYZ$. Délky u_x , u_y a u_z průmětů souřadnicových vektorů dle (2.1) jsou tzv. axonometrické jednotky.

Pravoúhlá axonometrie má následující vlastnosti.

1. Axonometrický trojúhelník $\triangle XYZ$ je ostroúhlý, což je důsledek obecné polohy axonometrické průmětny vzhledem k souřadnicovému systému (O, x, y, z) .
2. Axonometrické průměty souřadnicových os x' , y' a z' jsou přímky, na nichž leží výšky axonometrického trojúhelníka $\triangle XYZ$, tj. $x' \perp YZ$, $y' \perp ZX$ a $z' \perp XY$. Abychom dokázali tuto vlastnost, uvažujme např. x' . Platí $YZ \perp OO'$ (protože $OO' \parallel s$, $s \perp \varrho$ a $YZ \subset \varrho$) a zároveň $YZ \perp XO$ (protože $XO \subset x$, $x \perp (y, z)$ a $YZ \subset (y, z)$). Z toho vyplývá, že YZ je kolmá k rovině XOO' , a tudíž je kolmá k x' , protože $x' \subset XOO'$. Obdobně je možné dokázat $y' \perp ZX$ a $z' \perp XY$.



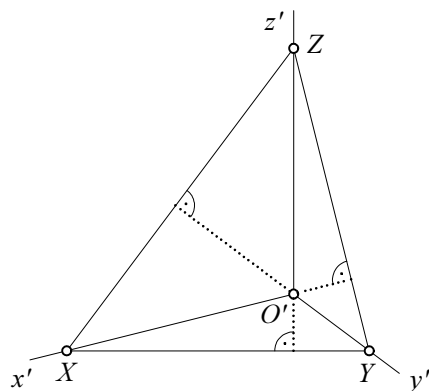
Obrázek 2.7: Souřadnicový systém



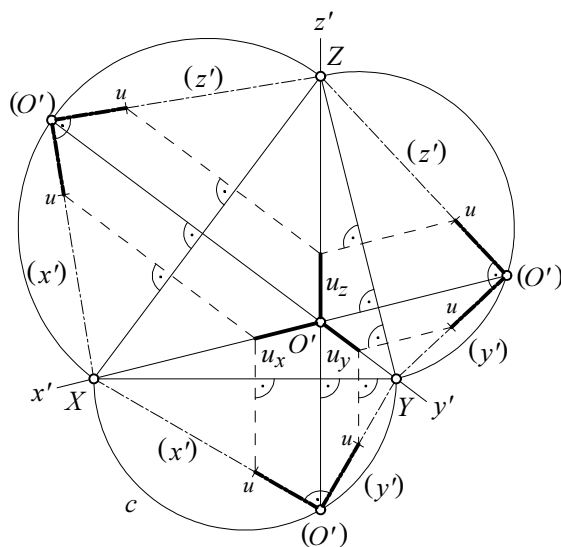
Obrázek 2.8: Pravoúhlá axonometrie

3. Úhly mezi kladnými poloosami x' , y' a z' jsou tupé, což je důsledek předchozích dvou vlastností.

Při konstrukci axonometrických průmětů ztotožníme axonometrickou průmětnu s nákrešnou, viz obr. 2.9. Pravoúhlá axonometrie je jednoznačně definována ostroúhlým axonometrickým trojúhelníkem $\triangle XYZ$ (osy x' , y' a z' jsou konstruovány jako výšky tohoto trojúhelníka) nebo souřadnicovými osami x' , y' a z' svírajícími tupé úhly (strany axonometrického trojúhelníka jsou kolmé na tyto osy). Před vlastní konstrukcí je třeba určit axonometrické jednotky u_x , u_y a u_z , proto otočíme souřadnicovou rovinu (např. půdorysnu) do axonometrické průmětny, viz obr. 2.10. Osa otáčení je dána stranou XY axonometrického trojúhelníka $\triangle XYZ$. Všechny útvary ležící v otočené půdorysně se po otočení jeví nezkráceně. Otočené osy (x') a (y') jsou tedy k sobě kolmé, a proto otočený počátek (O') leží na Thaletově kružnici určené průměrem XY . Každý bod ležící v půdorysně se při otáčení pohybuje po kružnici se středem na ose otáčení XY a ležící v rovině kolmé na osu otáčení. Tato kružnice se promítá jako kolmice na osu otáčení procházející otáčeným bodem. Přesnou polohu otočeného počátku určíme tedy jako



Obrázek 2.9: Axonometrický trojúhelník



Obrázek 2.10: Konstrukce axonometrických jednotek

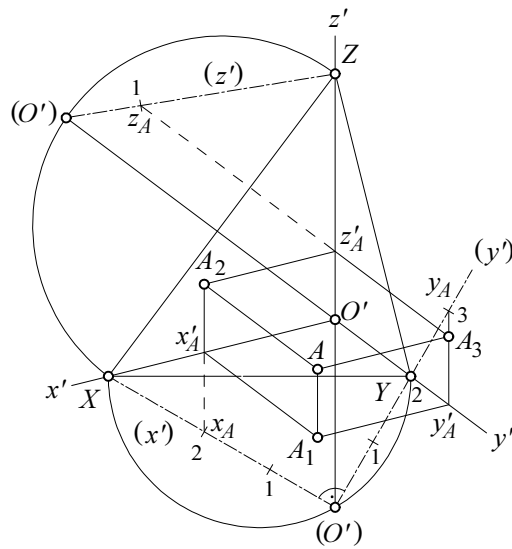
průsečík Thaletovy kružnice a kolmice k ose otáčení XY procházející počátkem O' . Jednotky na otočených osách se jeví ve skutečné velikosti. Abychom určili axonometrické jednotky u_x a u_y , otočíme koncové body jednotkových úseček u zpět, což znamená, že zkonstruujeme kolmice k ose otáčení XY a nalezneme průsečíky těchto kolmic s osami x' a y' .

Obdobně postupujeme při konstrukci axonometrické jednotky u_z . Na obr. 2.10 je znázorněna konstrukce všech axonometrických jednotek pomocí otočení všech souřadnicových rovin do axonometrické průmětny. V praxi volíme pouze nezbytně nutný počet otočení.

Uvedeným postupem je možné získat axonometrický průmět libovolného bodu zadaného kartézskými souřadnicemi, viz příklad na obr. 2.11, kde je nakreslen *souřadnicový kvádr* bodu $A = (x_A, y_A, z_A) = (2, 3, 1)$.

Axonometrické jednotky vyjadřují *poměr zkrácení* na jednotlivých souřadnicových osách

$$k_x = \frac{u_x}{u}, \quad k_y = \frac{u_y}{u} \text{ a } k_z = \frac{u_z}{u}, \quad (2.2)$$

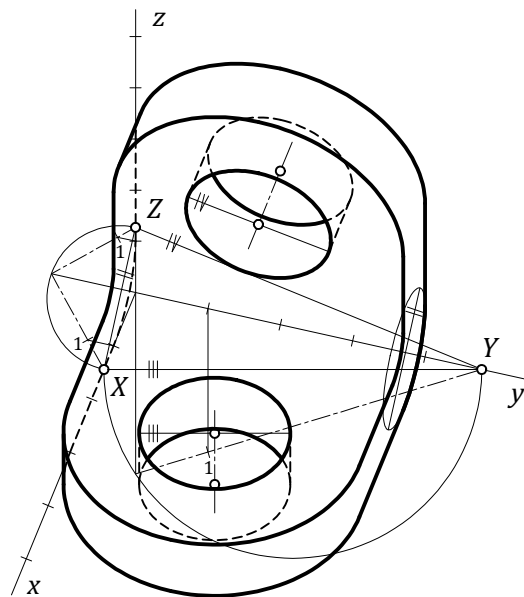


Obrázek 2.11: Souřadnicový kvádr bodu $A = (2, 3, 1)$ v pravoúhlé axonometrii

kde $u = 1$ je skutečná délka promítaného souřadnicového vektoru dle (2.1). Obecně platí $k_x \neq k_y \neq k_z$, což může být považováno za nevýhodu pro ruční rýsování axonometrických průmětů.

Útvary ležící v rovinách rovnoběžných s axonometrickou průmětnou se promítají nezkreslené, jak vyplývá z vlastností rovnoběžného promítání.

Na obr. 2.12 je nakreslen spojovací úhelník (stejný jako na obr. 2.2) v axonometrii.



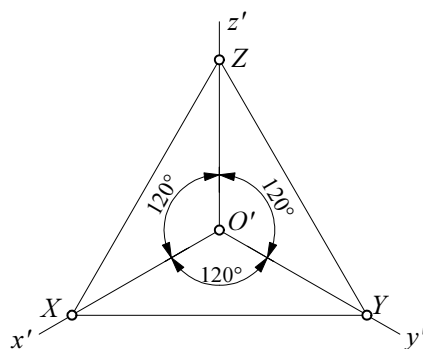
Obrázek 2.12: Spojovací úhelník v axonometrii

Isometrie

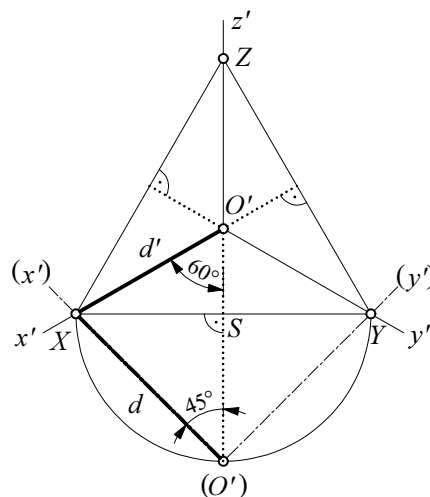
Isometrie je speciální typ pravoúhlé axonometrie, kdy axonometrická průmětna ϱ protíná osy souřadnicového systému ve stejných vzdálenostech od počátku. Důsledkem této speciální pozice se isometrie vyznačuje velmi praktickými vlastnostmi, viz obr. 2.13.

1. Axonometrický trojúhelník $\triangle XYZ$ je rovnostranný.
2. Úhly mezi kladnými poloosami x' , y' a z' jsou rovny 120° .
3. Všechny rozměry rovnoběžné se souřadnicovými osami se zkracují stejně v poměru

$$k = \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (2.3)$$



Obrázek 2.13: Isometrie



Obrázek 2.14: K odvození poměru zkrácení v isometrii

Pro odvození poměru zkrácení v isometrii uvažujme situaci zobrazenou na obr. 2.14. Máme určit poměr

$$k = \frac{d'}{d}. \quad (2.4)$$

Z pravoúhlého trojúhelníka $\triangle XO'S$ vyplývá

$$\sin 60^\circ = \frac{\|XS\|}{d'} \implies d' = \frac{\|XS\|}{\sin 60^\circ} \quad (2.5)$$

a z pravoúhlého trojúhelníka $\triangle XS(O')$ vyplývá

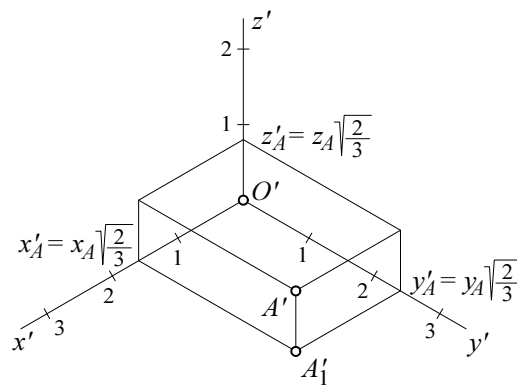
$$\sin 45^\circ = \frac{\|XS\|}{d} \implies d = \frac{\|XS\|}{\sin 45^\circ}. \quad (2.6)$$

Po dosazení (2.5) a (2.6) do (2.4) a ze znalosti $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dostáváme (2.3).

Je zřejmé, že při rýsování objektů v isometrii není třeba konstruovat axonometrické jednotky. Stačí souřadnice všech bodů násobit $k = \sqrt{\frac{2}{3}}$ (přibližně 0.8) a nanášet zkrácené velikosti podél os isometrického souřadnicového systému. Např. bod $A = (x_A, y_A, z_A)$ se promítne do bodu

$$A' = (x'_A, y'_A, z'_A) = (x_A \sqrt{\frac{2}{3}}, y_A \sqrt{\frac{2}{3}}, z_A \sqrt{\frac{2}{3}}), \quad (2.7)$$

viz příklad na obr. 2.15, kde je nakreslen souřadnicový kvádr bodu $A = (2, 3, 1)$ v isometrii.



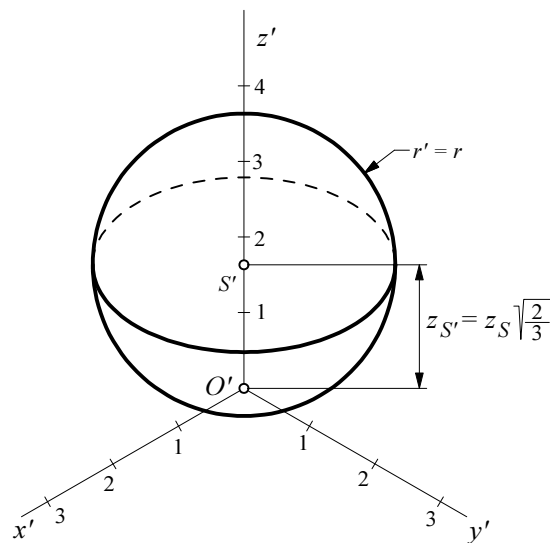
Obrázek 2.15: Souřadnicový kvádr bodu $A = (2, 3, 1)$ v isometrii

Útvary ležící v rovinách rovnoběžných s isometrickou průmětnou jsou promítány ve skutečné velikosti, jak vyplývá z vlastností rovnoběžného promítání. To znamená, že kulová plocha určená středem $S = (x_S, y_S, z_S)$ a poloměrem r se promítne do kružnice se středem, jehož souřadnice vypočítáme dle (2.7) a poloměrem $r' = r$ (průmětem kulové plochy je průmět hlavní kružnice kulové plochy ležící v rovině rovnoběžné s isometrickou průmětnou, která se promítá ve skutečné velikosti). Příklad isometrického průmětu kulové plochy se středem $S = (0, 0, 2)$ a poloměrem $r = 2$ je nakreslen na obr. 2.16.

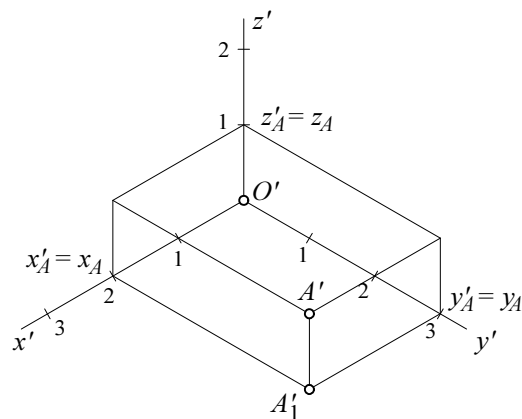
Technická isometrie

Alternativou isometrie je *technická isometrie*, kdy poměr zkrácení je zvolen $k = 1$. Tento způsob zobrazování je značně rozšířen ve strojírenství, neboť odpadá nepohodlné násobení souřadnic koeficientem $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Tím pádem se bod $A = (x_A, y_A, z_A)$ promítá do bodu se souřadnicemi ve skutečné velikosti

$$A' = (x'_A, y'_A, z'_A) = (x_A, y_A, z_A). \quad (2.8)$$



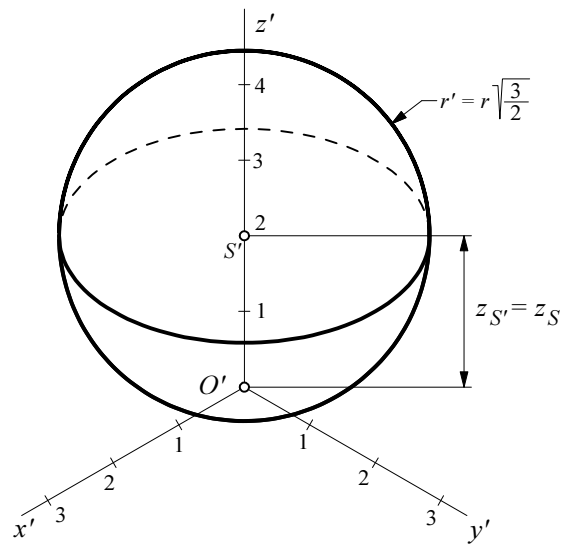
Obrázek 2.16: Kulová plocha se středem $S = (0, 0, 2)$ a poloměrem $r = 2$ v isometrii



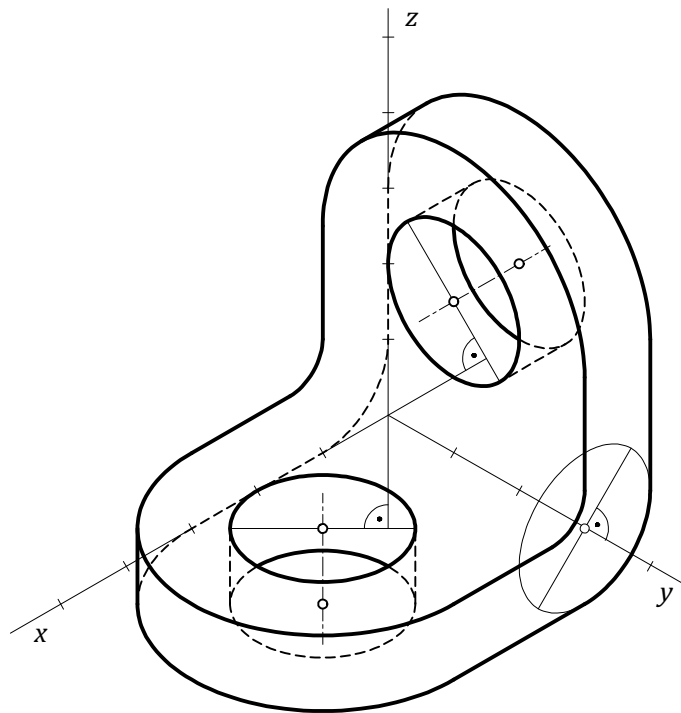
Obrázek 2.17: Souřadnicový kvádr bodu $A = (2, 3, 1)$ v technické isometrii

Příklad souřadnicového kvádru bodu $A = (2, 3, 1)$ v technické isometrii je nakreslen na obr. 2.17.

Útvary ležící v rovinách rovnoběžných s isometrickou průmětnou jsou promítány zvětšené, tj. násobené koeficientem $\frac{1}{k} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ (přibližně 1.2), viz příklad technické isometrie kulové plochy se středem $S = (0, 0, 2)$ a poloměrem $r = 2$ na obr. 2.18. Spojovací úhelník v technické isometrii je uveden na obr. 2.19



Obrázek 2.18: Kulová plocha se středem $S = (0, 0, 2)$ a poloměrem $r = 2$ v technické isometrii



Obrázek 2.19: Spojovací úhelník v technické isometrii

2.3 Mongeovo promítání

Mongeovo promítání je pravoúhlé promítání na dvě vzájemně kolmé průmětny – půdorysnu $\pi = (x, y)$ a nárysnu $\nu = (x, z)$. Každému bodu $\mathbf{A} = (x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{A}}, z_{\mathbf{A}}, 1) \in E_{\infty}^3$ je jednoznačně přiřazená dvojice jeho *sdužených průmětů* – pravoúhlý průmět bodu \mathbf{A} do půdorysny – půdorys \mathbf{A}_1 a pravoúhlý průmět bodu \mathbf{A} do nárysny – nárys \mathbf{A}_2 .

Analytická reprezentace pravoúhlého promítání do půdorysny je určena maticí

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a půdorys je dán

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} = (x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{A}}, 0, 1).$$

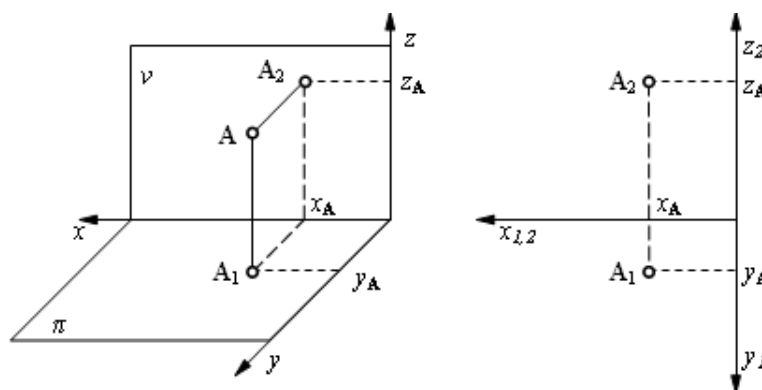
Analytická reprezentace pravoúhlého promítání do nárysny je určena maticí

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a nárys je dán

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{G} = (x_{\mathbf{A}}, 0, z_{\mathbf{A}}, 1).$$

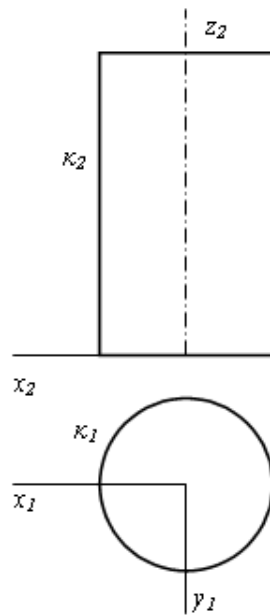
Pro nakreslení výsledného zobrazení sdužíme průmětny otočením jedné z průmětů do roviny druhé průmětny kolem společné průsečnice – osy x . Její průmět se označuje $x_{1,2}$ a nazývá se *základnice*. Tím získáme v jedné nákrešné dvojici sdužených průmětů, jejichž spojnice $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ se nazývá *ordinála* a je kolmá na základnici, viz obr. 2.20.



Obrázek 2.20: Princip Mongeova promítání (vlevo) a sdužené průměty bodu (vpravo)

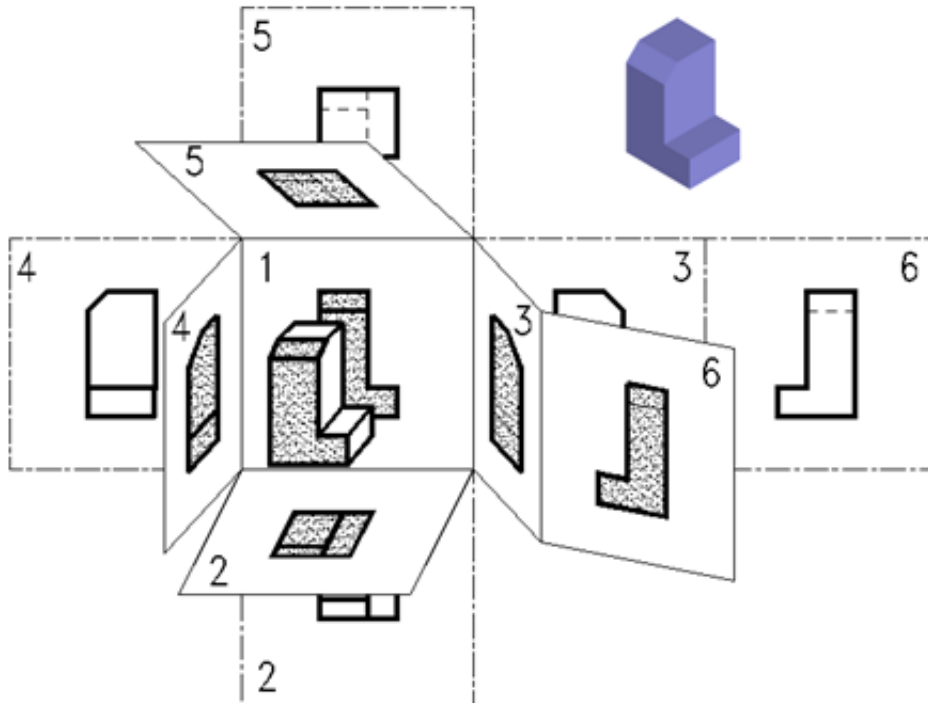
Na obr. 2.21 je zobrazen rotační válec (stejný jako na obr. 2.2) v Mongeově promítání.

V Mongeově promítání se zobrazují objekty na technických výkresech. Často jsou kvůli složitosti použity i průměty do dalších průmětů, viz obr. 2.22. Průměty se označují následovně:



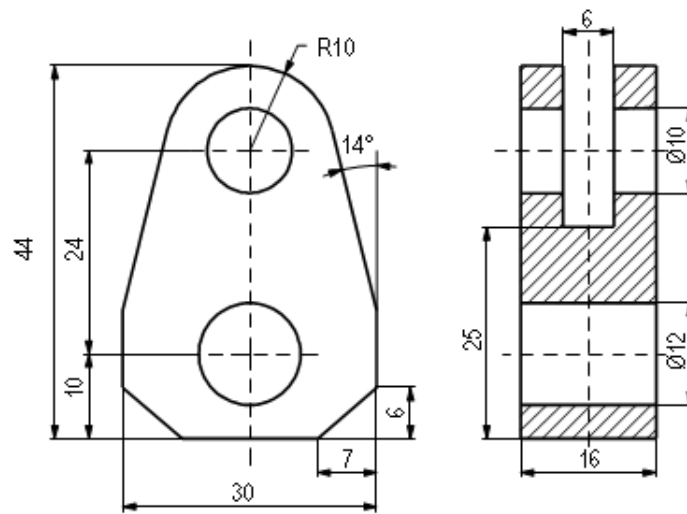
Obrázek 2.21: Rotační válec v Mongeově promítání

1 – půdorys (pohled shora), 2 – nárys (pohled zepředu), 3 – (pravý) bokorys (pohled zleva), 4 – levý bokorys (pohled zprava), 5 – pohled zdola, 6 – pohled zezadu).



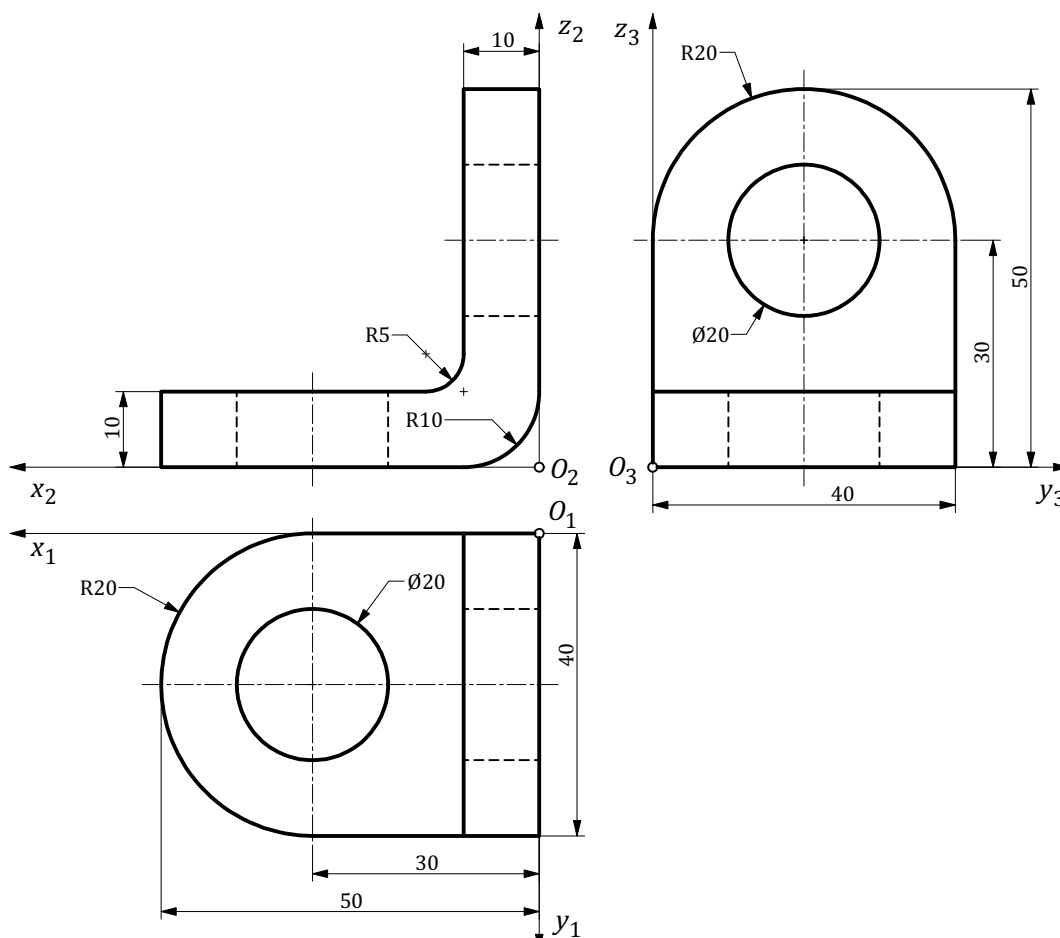
Obrázek 2.22: Mongeovo promítání na 6 průměten

Potřebný počet obrazů se volí s ohledem na složitost zobrazované součásti. Příklad je uveden na obr. 2.23, kde je zobrazeno závěsné oko v nárysu a v bokorysu v řezu.



Obrázek 2.23: Technický výkres závěsného oka

Pro úplnost je na obr. 2.24 uveden i spojovací úhelník v kótovaném Mongeově promítání.



Obrázek 2.24: Spojovací úhelník v kótovaném Mongeově promítání

Kapitola 3

Analytická geometrie v rovině

V této kapitole se budeme zabývat následujícími útvary ve dvojrozměrném euklidovském prostoru – body, přímkami a kuželosečkami. Zvláštní pozornost budeme věnovat geometrickému významu jednotlivých prvků jejich analytické reprezentace.

3.1 Bod a vektor

Ve dvojrozměrném euklidovském prostoru E^2 je dána kartézská souřadnicová soustava (O, x, y) . Každému bodu $A \in E^2$ je jednoznačně přiřazena uspořádaná dvojice reálných čísel – *kartézské souřadnice* x_A, y_A , které vyjadřují vzdálenosti bodu A od souřadnicových os x a y . Bod A v prostoru E^2 je tedy jednoznačně určen kartézskými souřadnicemi

$$A = [x_A, y_A].$$

Polohový vektor \mathbf{a} bodu A je vektor s počátečním bodem v počátku souřadnic $O = (0, 0)$ a koncovým bodem v bodě $A = [x_A, y_A]$. Bod i jeho polohový vektor mají stejné souřadnice

$$\mathbf{a} = (x_A - 0, y_A - 0) = (x_A, y_A),$$

proto se s ohledem na analytické vyjádření útvarů ve tvaru vektorových rovnic často namísto bodu uvažuje jeho polohový vektor a označuje se jako vektor, tedy

$$\mathbf{A} = (x_A, y_A).$$

Nadále budeme pojmem "bod" mínit jeho polohový vektor, a také ho tak budeme označovat.

Dvěma body $\mathbf{A} = (x_A, y_A)$ a $\mathbf{B} = (x_B, y_B)$ v rovině je určen *volný vektor*

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} = (\mathbf{B} - \mathbf{A}) = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (a_1, a_2).$$

Volný vektor \mathbf{a} vyjadřuje množinu všech vektorů se souřadnicemi (a_1, a_2) . Vektor, jehož počátek pevně zvolíme, je vektor *vázaný*.

Velikost vektoru \mathbf{a} je dána vzdáleností jeho koncových bodů

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

3.2 Přímka

Přímka a v rovině je jednoznačně určena dvěma body, případně bodem a *směrovým vektorem*. Jsou-li dány dva body v rovině $\mathbf{A} = (x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{A}})$ a $\mathbf{B} = (x_{\mathbf{B}}, y_{\mathbf{B}})$, je směrový vektor přímky buď

$$\mathbf{s} = \overrightarrow{\mathbf{AB}},$$

nebo

$$\mathbf{s} = \overrightarrow{\mathbf{BA}}.$$

Přímka v rovině může být vyjádřena vektorovou rovnicí, parametrickými rovnicemi a obecnou rovnicí. Za určitých okolností může být vyjádřena i směrnicovou nebo úsekovou rovnicí.

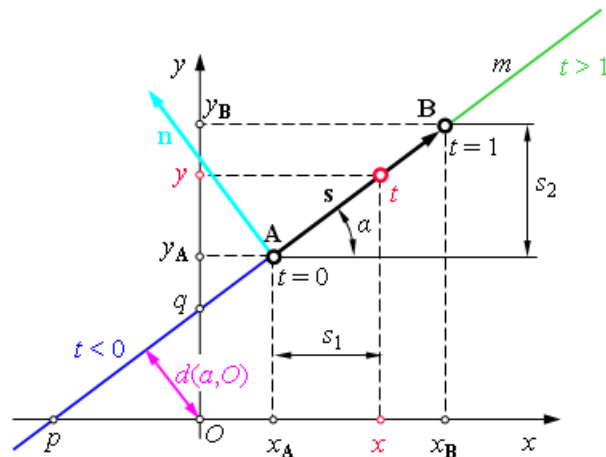
3.2.1 Vektorová rovnice přímky

Předpokládejme, že přímka a je určena dvěma body $\mathbf{A} = (x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{A}})$ a $\mathbf{B} = (x_{\mathbf{B}}, y_{\mathbf{B}})$, viz obr. 3.1. Vyjádříme směrový vektor

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2) = \overrightarrow{\mathbf{AB}}.$$

Vektorová rovnice přímky potom je

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{A} + t\mathbf{s} = (x_{\mathbf{A}} + s_1t, y_{\mathbf{A}} + s_2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$



Obrázek 3.1: Geometrický význam prvků v analytickém vyjádření přímky

Pro zvolenou hodnotu parametru t dostáváme bod na přímce. Je-li $t < 0$, dostaneme body na polopřímce vyznačené modrou barvou v obr. 3.1. Pro $t = 0$ dostaneme souřadnice bodu \mathbf{A} . Pro $t = 1$ dostaneme souřadnice bodu \mathbf{B} a v případě, že $t > 1$, dostáváme body na polopřímce vyznačené zelenou barvou v obr. 3.1. Je tedy zřejmé, že vektorovou rovnicí lze vyjádřit libovolnou přímku v rovině.

3.2.2 Parametrické rovnice přímky

Parametrické rovnice přímky jsou určeny souřadnicovými funkcemi vektorové funkce $\mathbf{P}(t)$

$$\begin{aligned}x(t) &= x_{\mathbf{A}} + s_1 t, \\y(t) &= y_{\mathbf{A}} + s_2 t, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Pro volbu hodnot parametru t platí vše, co bylo řečeno u vektorové rovnice přímky, tudíž i parametrickými rovnicemi lze vyjádřit libovolnou přímku v rovině.

3.2.3 Obecná rovnice přímky

Obecná rovnice přímky má tvar

$$ax + by + c = 0,$$

kde

$$\mathbf{n} = (a, b) = (-s_2, s_1)$$

je *normálový vektor* přímky (vektor kolmý ke směrovému vektoru \mathbf{s}) a c je svázáno se vzdáleností přímky od počátku $d(a, O)$ vztahem

$$d(a, O) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Obecnou rovnicí přímky lze vyjádřit libovolnou přímku v rovině.

3.2.4 Směrnice rovnice přímky

Směrnice rovnice přímky má tvar

$$y = kx + q,$$

kde k je *směrnice přímky*

$$k = \frac{s_2}{s_1} = \tan \alpha,$$

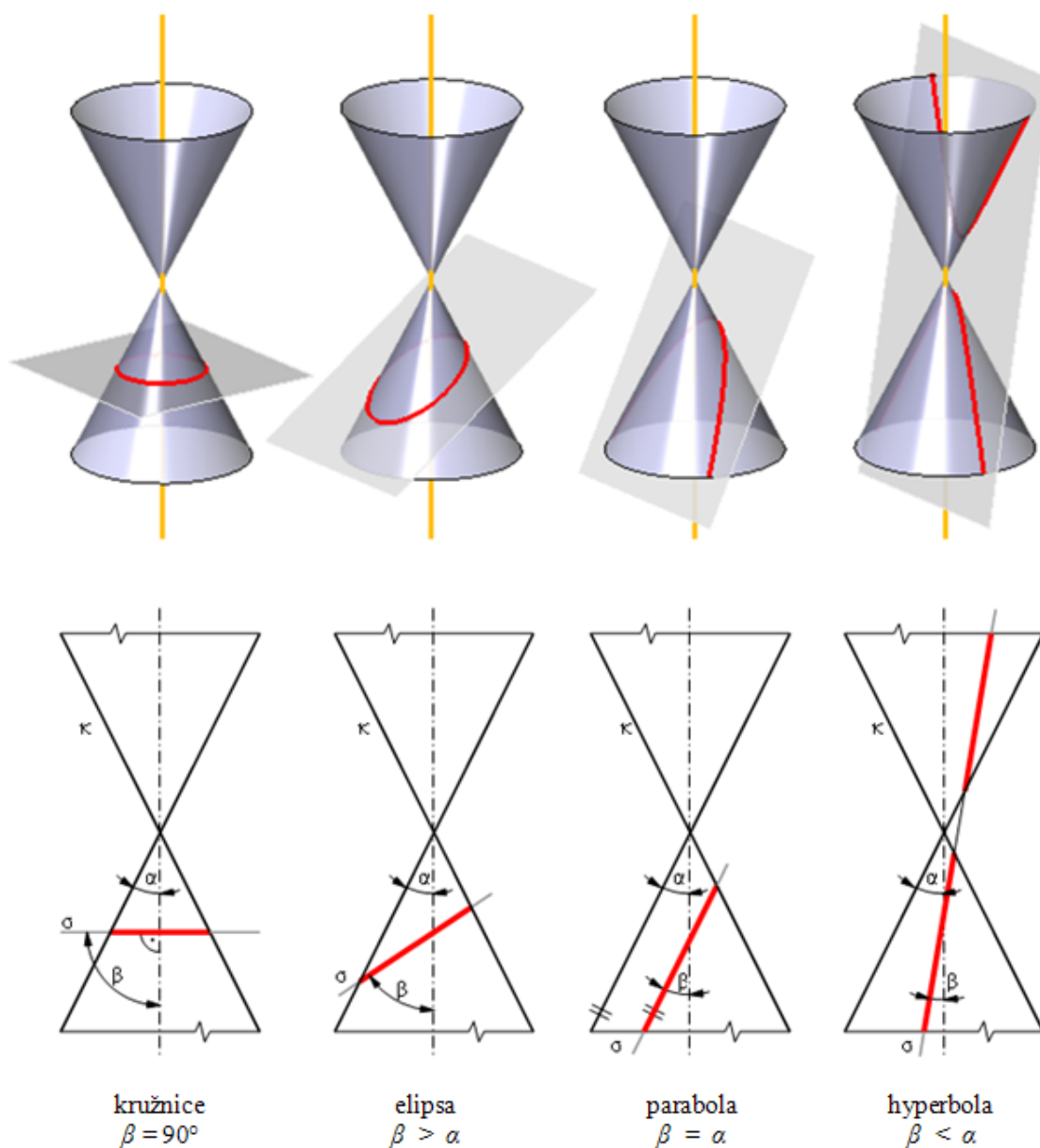
kde α je úhel, který svírá přímka s osou x , a q je úsek, který přímka vytíná na ose y (průsečík přímky a osy y), viz obr. 3.1. Je zřejmé, že tímto způsobem nelze vyjádřit přímky rovnoběžné s osou y , kdy $s_1 = 0$.

3.2.5 Úseková rovnice přímky

Úseková rovnice přímky má tvar

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

kde p je úsek, který přímka vytíná na ose x (průsečík přímky a osy x) a q je úsek, který přímka vytíná na ose y (průsečík přímky a osy y), viz obr. 3.1. Je zřejmé, že tímto způsobem nelze vyjádřit přímky procházející počátkem, kdy $p = 0$, $q = 0$.



Obrázek 3.2: Kuželosečky jako řezy na rotační kuželové ploše

3.3 Kuželosečky

Kuželosečky jsou křivky, které vzniknou jako rovinné řezy rotační kuželové plochy, viz obr. 3.2. Podle úhlu, který svírá řezná rovina s osou rotace kuželové plochy rozlišujeme *kružnici* ($\beta = 90^\circ$), *elipsu* ($\beta > \alpha$), *parabolu* ($\beta = \alpha$) a *hyperbolu* ($\beta < \alpha$); α je poloviční vrcholový úhel kuželové plochy.

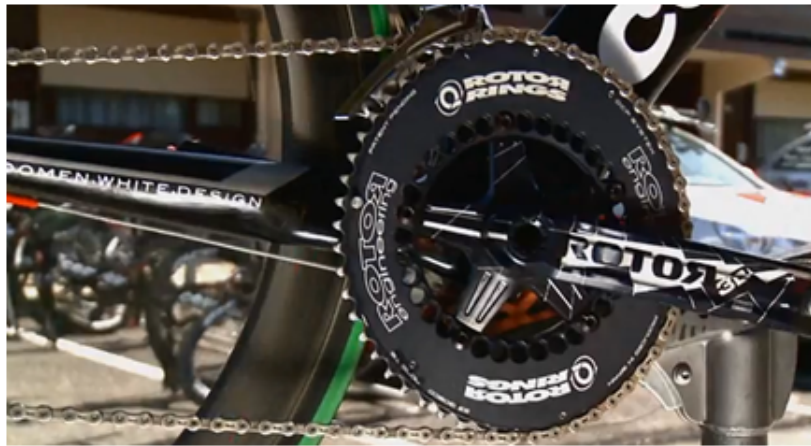
Zde si uvedeme definice jednotlivých kuželoseček, příklad jejich aplikace a stručný přehled kanonických rovnic včetně grafů. Podrobnější výklad o kuželosečkách lze najít v [4].

3.3.1 Kružnice

Kružnice je množina všech bodů v rovině, jejichž vzdálenost od pevného středu je rovna poloměru r . Praktickou aplikaci nalezneme ve všech oblastech techniky.

3.3.2 Elipsa

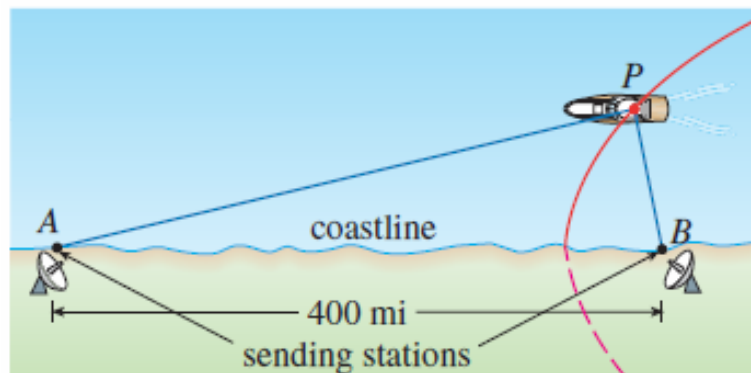
Elipsa je množina všech bodů v rovině, jejichž součet vzdáleností od dvou pevných bodů – ohnisek – je roven $2a$, kde a je délka hlavní poloosy elipsy. Praktickou aplikaci nalezneme např. u eliptických řetězových kol v cyklistice, viz obr. 3.3 (převzato z [5]).



Obrázek 3.3: Převod eliptickými řetězovými koly

3.3.3 Hyperbola

Hyperbola je množina všech bodů v rovině, jejichž rozdíl vzdáleností od dvou pevných bodů – ohnisek je roven $2a$, kde a je délka hlavní poloosy hyperboly. Zajímavou praktickou aplikací je např. navigační systém vyvinutý za 1. a 2. světové války zobrazený na obr. 3.4 (převzato z [6]).

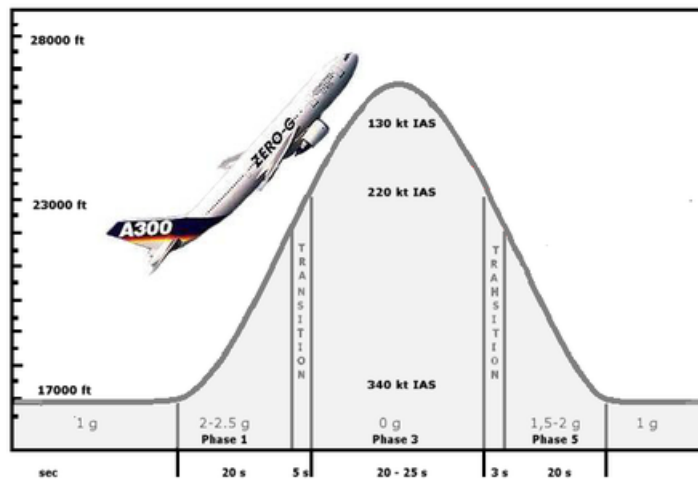


Obrázek 3.4: Princip navigačního systému

Dvě radiostanice umístěné v A a B současně vysílají signál na loď (letadlo) umístěné v P . Palubní počítač na základě časového rozdílu příjmu signálů určí rozdíl vzdáleností od obou vysílačů, čímž je definována i poloha lodi na jedné z větví hyperboly.

3.3.4 Parabola

Parabola je množina bodů v rovině, jejichž vzdálenost od pevného bodu (ohniska) a řídicí přímky d je stejná a rovna polovině velikosti parametru p . V praktických aplikacích nalezneme např. parabolu jako trajektorii parabolického letu, který slouží k simulaci stavu beztlíže, viz obr. 3.5 (převzato z [7] a [8]).

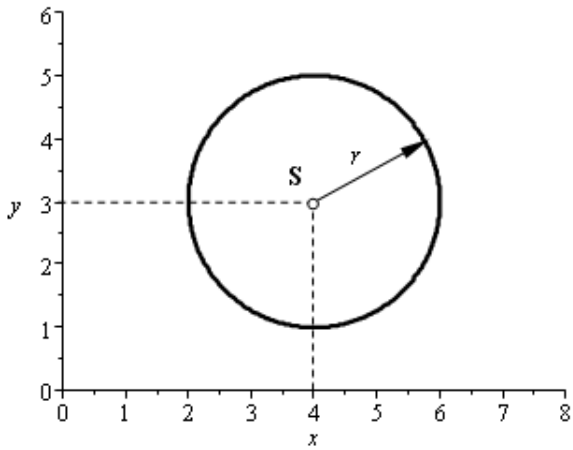
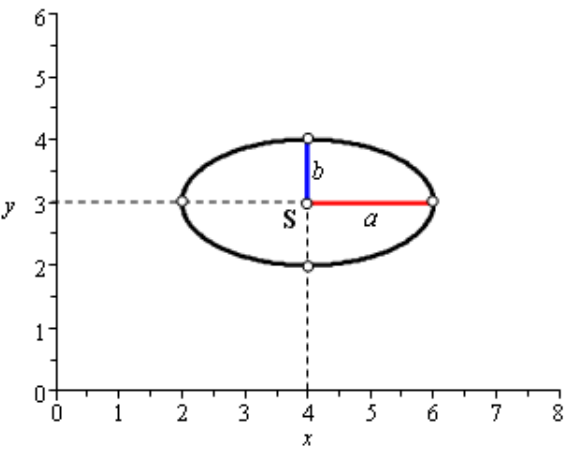
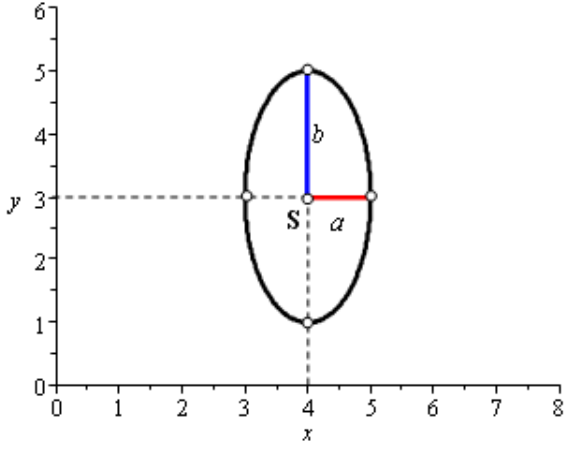


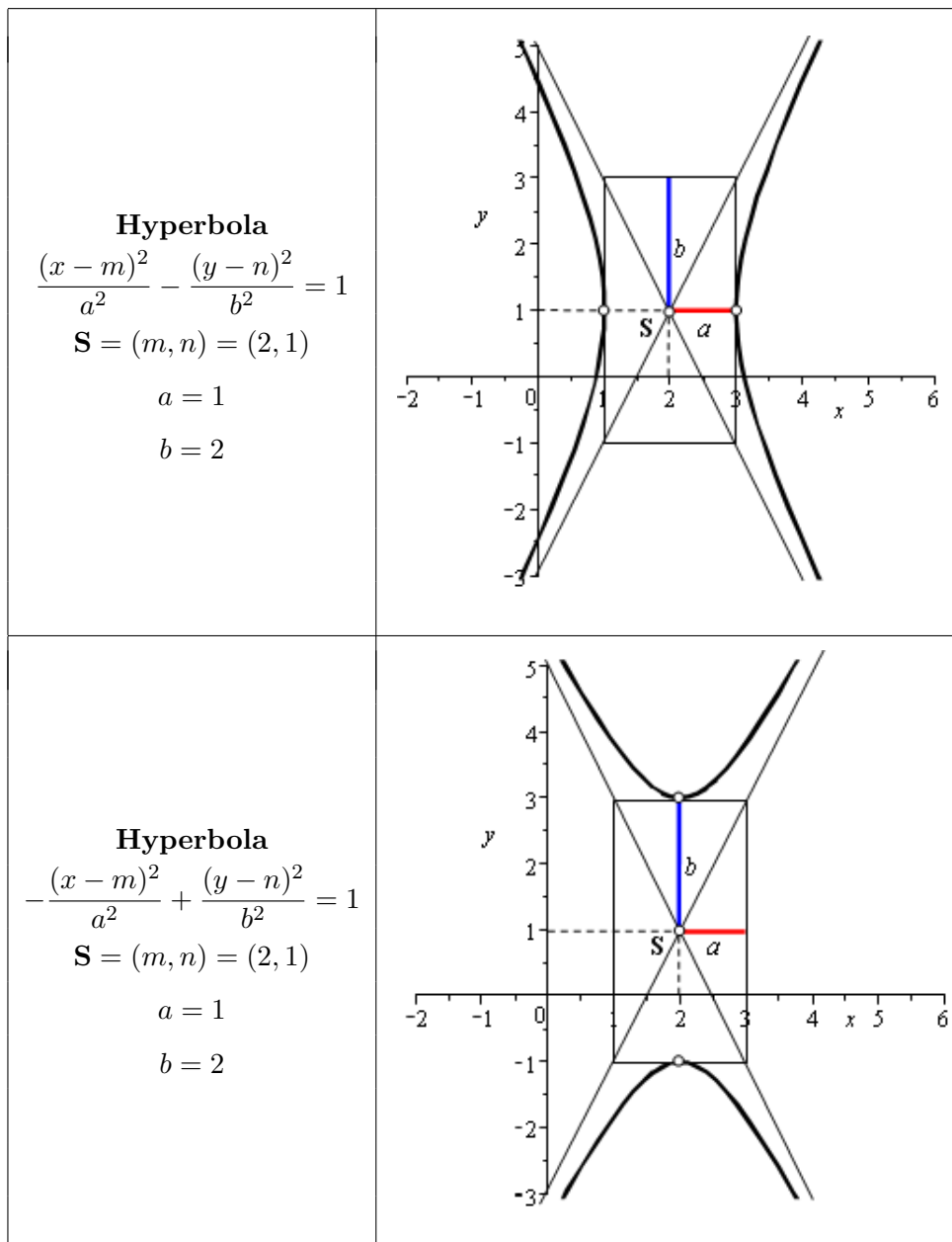
Obrázek 3.5: Průběh parabolického letu

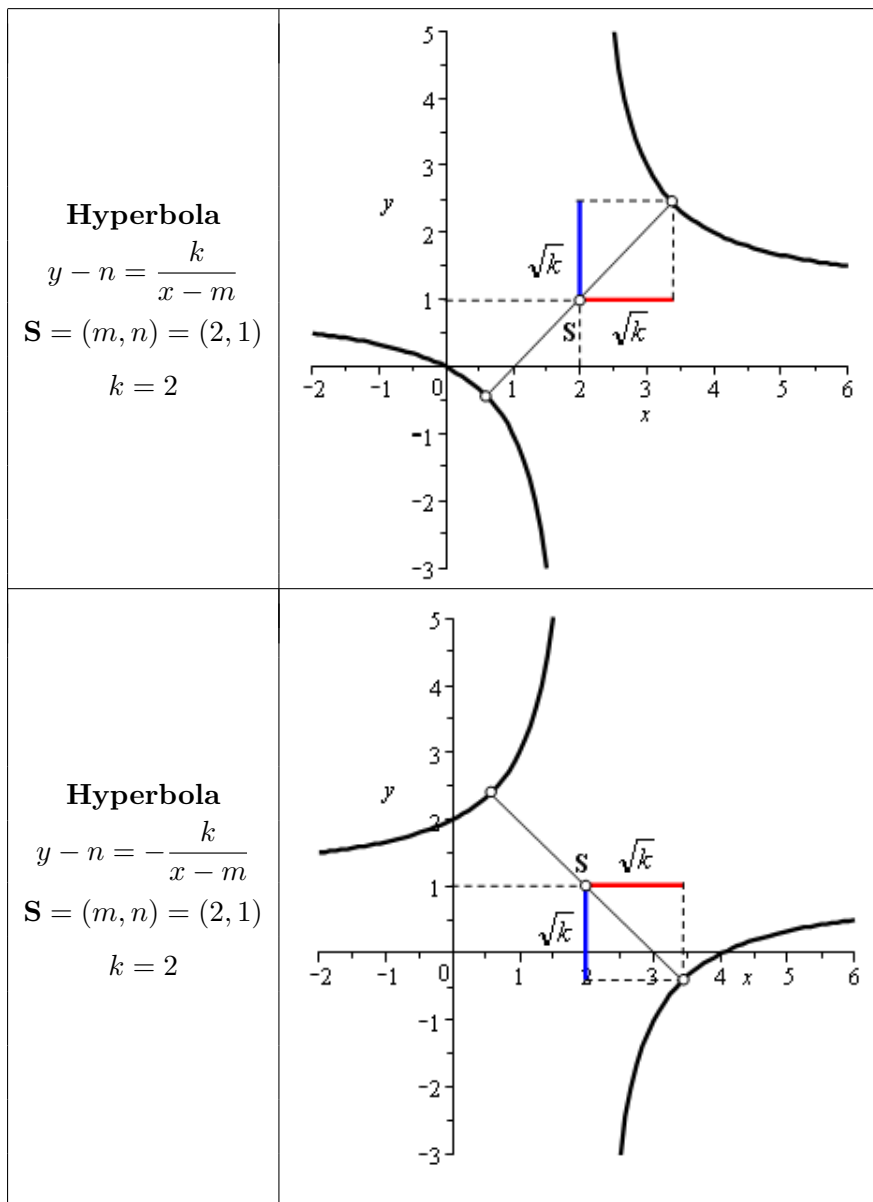
[video](#)

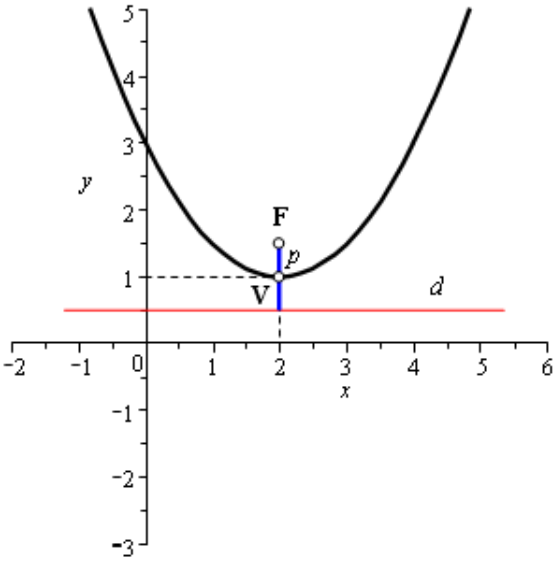
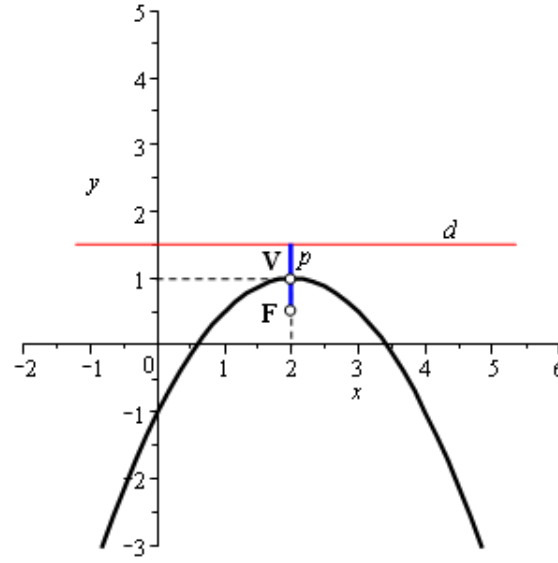
3.4 Přehled kuželoseček

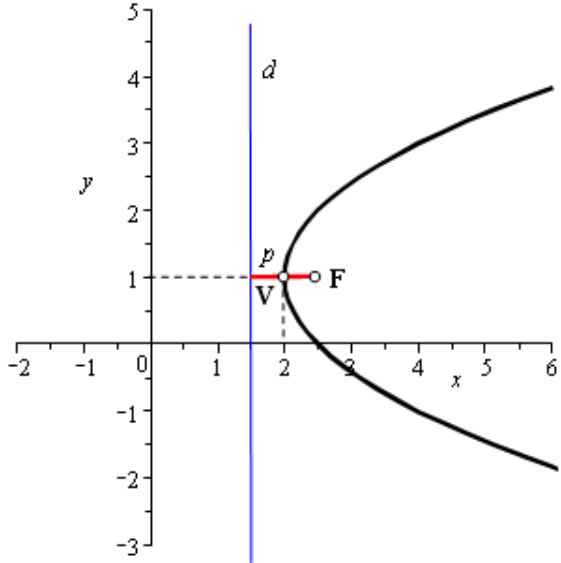
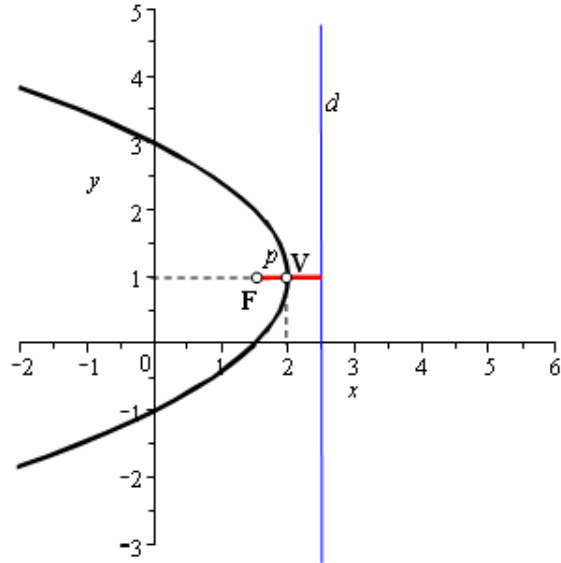
V této části je uveden stručný přehled kuželoseček umístěných v rovině (x, y) v posunutě poloze vůči souřadnicovému systému, tj. kdy osy kuželosečky jsou rovnoběžné s osami souřadnicového systému. Obecná poloha kuželoseček vůči souřadnicovému systému není uvažována. V přehledu je uveden kanonický tvar rovnice kuželosečky a graf kuželosečky pro konkrétní zadání. V grafu je vyznačen geometrický význam jednotlivých prvků vyskytujících se v rovnici kuželosečky.

| | |
|---|--|
| <p style="text-align: center;">Kružnice</p> $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ $\mathbf{S} = (m, n) = (4, 3)$ $r = 2$ |  |
| <p style="text-align: center;">Elipsa</p> $\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$ $\mathbf{S} = (m, n) = (4, 3)$ $a = 2$ $b = 1$ |  |
| <p style="text-align: center;">Elipsa</p> $\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = 1$ $\mathbf{S} = (m, n) = (4, 3)$ $a = 2$ $b = 1$ |  |





| | |
|--|---|
| <p>Parabola</p> $(x - m)^2 = 2p(y - n)$ $\mathbf{V} = (m, n) = (2, 1)$ $p = 1$ |  <p>A Cartesian coordinate system showing a parabola opening upwards. The vertex is labeled V at (2, 1). The focus is labeled F at (2, 2). A horizontal red line representing the directrix is labeled d and is located at y = 0. A vertical blue line segment of length p = 1 connects the vertex V to the focus F. The x-axis ranges from -2 to 6, and the y-axis ranges from -3 to 5.</p> |
| <p>Parabola</p> $(x - m)^2 = -2p(y - n)$ $\mathbf{V} = (m, n) = (2, 1)$ $p = 1$ |  <p>A Cartesian coordinate system showing a parabola opening downwards. The vertex is labeled V at (2, 1). The focus is labeled F at (2, 0). A horizontal red line representing the directrix is labeled d and is located at y = 2. A vertical blue line segment of length p = 1 connects the vertex V to the focus F. The x-axis ranges from -2 to 6, and the y-axis ranges from -3 to 5.</p> |

| | |
|--|---|
| <p style="text-align: center;">Parabola</p> $(y - n)^2 = 2p(x - m)$ $\mathbf{V} = (m, n) = (2, 1)$ $p = 1$ |  |
| <p style="text-align: center;">Parabola</p> $(x - m)^2 = -2p(y - n)$ $\mathbf{V} = (m, n) = (2, 1)$ $p = 1$ |  |

Kapitola 4

Analytická geometrie v prostoru

V této kapitole se budeme zabývat následujícími základními útvary v trojrozměrném euklidovském prostoru E^3 : body, přímkami, rovinami a kvadratickými plochami. Zvláštní pozornost budeme věnovat geometrickému významu jednotlivých prvků jejich analytické reprezentace.

4.1 Bod a vektor

V trojrozměrném euklidovském prostoru E^3 budeme postupovat podobně jako v kap. 3. Uvažujme, že je dána kartézská souřadnicová soustava (O, x, y, z) . Každému bodu A in E^3 je jednoznačně přiřazena uspořádaná trojice reálných čísel – *kartézské souřadnice* x_A, y_A, z_A , které vyjadřují vzdálenosti bodu A od souřadnicových rovin (y, z) , (x, z) a (x, y) . Bod A v prostoru E^3 je tedy jednoznačně určen kartézskými souřadnicemi

$$A = [x_A, y_A, z_A].$$

Polohový vektor \mathbf{a} bodu A je vektor s počátečním bodem v počátku souřadnic $O = (0, 0, 0)$ a koncovým bodem v bodě $A = [x_A, y_A, z_A]$. Bod i jeho polohový vektor mají stejné souřadnice

$$\mathbf{a} = (x_A - 0, y_A - 0, z_A - 0) = (x_A, y_A, z_A),$$

proto se s ohledem na analytické vyjádření útvarů ve tvaru vektorových rovnic často namísto bodu uvažuje jeho polohový vektor a označuje se jako vektor, tedy

$$\mathbf{A} = (x_A, y_A, z_A).$$

Nadále budeme pojmem "bod" mínit jeho polohový vektor a také ho tak budeme označovat.

Dvěma body $\mathbf{A} = (x_A, y_A, z_A)$ a $\mathbf{B} = (x_B, y_B, z_B)$ v prostoru E^3 je určen *volný vektor*

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} = (\mathbf{B} - \mathbf{A}) = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (a_1, a_2, a_3).$$

Volný vektor \mathbf{a} vyjadřuje množinu všech vektorů se souřadnicemi (a_1, a_2, a_3) . Vektor, jehož počátek pevně zvolíme, je vektor *vázaný*.

Velikost vektoru \mathbf{a} je dána vzdáleností jeho koncových bodů

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

4.2 Přímka

Přímka v prostoru E^3 je jednoznačně určena dvěma body, případně bodem a *směrovým vektorem*. Jsou-li dány dva body v prostoru $\mathbf{A} = (x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{A}}, z_{\mathbf{A}})$ a $\mathbf{B} = (x_{\mathbf{B}}, y_{\mathbf{B}}, z_{\mathbf{B}})$, je směrový vektor přímky buď

$$\mathbf{s} = \overrightarrow{\mathbf{AB}}$$

nebo

$$\mathbf{s} = \overrightarrow{\mathbf{BA}}.$$

Přímka v prostoru E^3 může být vyjádřena vektorovou rovnicí nebo parametrickými rovnicemi.

4.2.1 Vektorová rovnice přímky

Předpokládejme, že přímka a je určena dvěma body $\mathbf{A} = (x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{A}}, z_{\mathbf{A}})$ a $\mathbf{B} = (x_{\mathbf{B}}, y_{\mathbf{B}}, z_{\mathbf{B}})$. Vyjádříme směrový vektor

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) = \overrightarrow{\mathbf{AB}}.$$

Vektorová rovnice přímky potom je

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{A} + t\mathbf{s} = (x_{\mathbf{A}} + s_1t, y_{\mathbf{A}} + s_2t, z_{\mathbf{A}} + s_3t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

4.2.2 Parametrické rovnice přímky

Parametrické rovnice přímky jsou určeny souřadnicovými funkcemi vektorové funkce $\mathbf{P}(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{\mathbf{A}} + s_1t, \\ y(t) &= y_{\mathbf{A}} + s_2t, \\ z(t) &= z_{\mathbf{A}} + s_3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Příklad: Uvažujme bod $\mathbf{A} = (1, 2, 1)$ a směrový vektor $\mathbf{a} = (1, -1, \frac{3}{2})$. Vektorová rovnice přímky určené bodem \mathbf{A} a směrovým vektorem \mathbf{a} je

$$\mathbf{P}(t) = (1 + t, 2 - t, 1 + \frac{3}{2}t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Parametrické rovnice přímky jsou

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + t, \\ y(t) &= 2 - t, \\ z(t) &= 1 + \frac{3}{2}t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li konkrétní hodnotu krivočaré souřadnice, např. $t = 1$, dostaneme bod na přímce:

$$\mathbf{P}(1) = (x(1), y(1), z(1)) = (2, 1, \frac{5}{2}).$$

4.3 Rovina

Rovina ϱ je jednoznačně určena třemi body $\mathbf{A} = (x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{A}}, z_{\mathbf{A}})$, $\mathbf{B} = (x_{\mathbf{B}}, y_{\mathbf{B}}, z_{\mathbf{B}})$ a $\mathbf{C} = (x_{\mathbf{C}}, y_{\mathbf{C}}, z_{\mathbf{C}})$. V prostoru E^3 může být rovina vyjádřena vektorovou rovnicí, parametrickými rovnicemi, úsekovou rovnicí a obecnou rovnicí.

4.3.1 Vektorová rovnice roviny

Předpokládejme, že rovina je určena třemi body $\mathbf{A} = (x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{A}}, z_{\mathbf{A}})$, $\mathbf{B} = (x_{\mathbf{B}}, y_{\mathbf{B}}, z_{\mathbf{B}})$ a $\mathbf{C} = (x_{\mathbf{C}}, y_{\mathbf{C}}, z_{\mathbf{C}})$, které určují dva směrové vektory např. následovně

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (u_1, u_2, u_3) = \overrightarrow{AB} = (x_{\mathbf{B}} - x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{B}} - y_{\mathbf{A}}, z_{\mathbf{B}} - z_{\mathbf{A}}), \\ \mathbf{v} &= (v_1, v_2, v_3) = \overrightarrow{AC} = (x_{\mathbf{C}} - x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{C}} - y_{\mathbf{A}}, z_{\mathbf{C}} - z_{\mathbf{A}}).\end{aligned}$$

Potom vektorová rovnice roviny je

$$\mathbf{P}(s, t) = \mathbf{A} + \mathbf{u}s + \mathbf{v}t = (x_{\mathbf{A}} + u_1s + v_1t, y_{\mathbf{A}} + u_2s + v_2t, z_{\mathbf{A}} + u_3s + v_3t), \quad s, t \in R,$$

kde s a t jsou parametry.

4.3.2 Parametrické rovnice roviny

Parametrické rovnice roviny jsou určeny souřadnicovými funkcemi vektorové funkce $\mathbf{P}(s, t)$, tedy

$$\begin{aligned}x(s, t) &= x_{\mathbf{A}} + u_1t + v_1s, \\ y(s, t) &= y_{\mathbf{A}} + u_2t + v_2s, \\ z(s, t) &= z_{\mathbf{A}} + u_3t + v_3s, \quad s, t \in R.\end{aligned}$$

4.3.3 Úseková rovnice roviny

Úseková rovnice roviny má tvar

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1,$$

kde p je úsek, ve kterém rovina protíná osu x , q je úsek, ve kterém rovina protíná osu y a r je úsek, ve kterém rovina protíná osu z . Je zřejmé, že tímto způsobem nelze vyjádřit roviny procházející počátkem, kdy $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$.

4.3.4 Obecná rovnice roviny

Obecná rovnice roviny má tvar

$$ax + by + cz + d = 0,$$

kde

$$\mathbf{n} = (a, b, c)$$

je *normálový vektor* roviny (vektor kolmý k vektorovému součinu vektorů \mathbf{u} a \mathbf{v}) a d je svázáno se vzdáleností roviny od počátku $d(\varrho, O)$ vztahem

$$d(\varrho, O) = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

4.4 Kvadratické plochy

Plochy v prostoru E^3 rozumíme množinu všech bodů prostoru, jejichž kartézské souřadnice vyhovují rovnici $F(x, y, z) = 0$, kde F je funkce mající v každém bodě spojité parciální derivace alespoň prvního řádu.

Kvadratické plochy (kvadriky) jsou plochy druhého stupně, které lze popsat rovnicí

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2(a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz) + 2(a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z) + a_{44} = 0,$$

kde alespoň jeden z koeficientů u členů druhého stupně, tzn.

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23},$$

je nenulový.

Je-li matice koeficientů

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

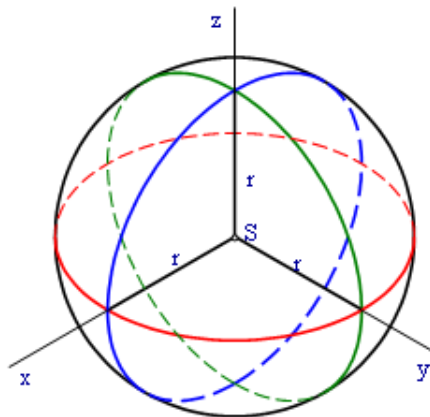
regulární, označujeme kvadriky jako *regulární kvadriky*. V opačném případě označujeme kvadriky jako *singulární*. K regulárním kvadrikám patří *kulová plocha*, *elipsoid*, *hyperboloid* a *paraboloid*. K singulárním kvadrikám patří *válcová plocha*, *kuželová plocha* a dvojice rovin.

V této kapitole se budeme dále podrobněji věnovat pouze regulárním kvadrikám.

4.4.1 Kulová plocha

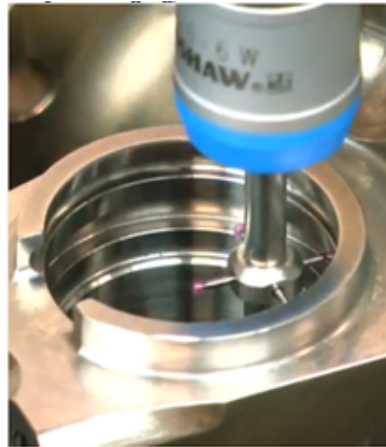
Kulová plocha je určena středem $\mathbf{S} = (m, n, p)$ a poloměrem r , viz obr. 4.1. Její rovnice je

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2 = r^2.$$



Obrázek 4.1: Kulová plocha

V praktických aplikacích se s kulovou plochou setkáváme velmi často, uveďme příklad kulové dotykové sondy souřadnicových měřicích strojů, viz obr. 4.2 (převzato z [9]).



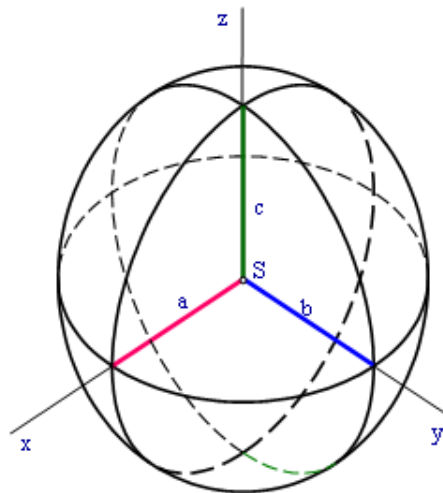
Obrázek 4.2: Kulová dotyková měřicí sonda
video

4.4.2 Elipsoid

Elipsoid je určen středem $\mathbf{S} = (m, n, p)$ a poloosami $a||x$, $b||y$ a $c||z$. Jeho rovnice je

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} + \frac{(z - p)^2}{c^2} = 1.$$

Pokud $a \neq b \neq c$, hovoříme o *trojosém* elipsoidu, viz obr. 4.3



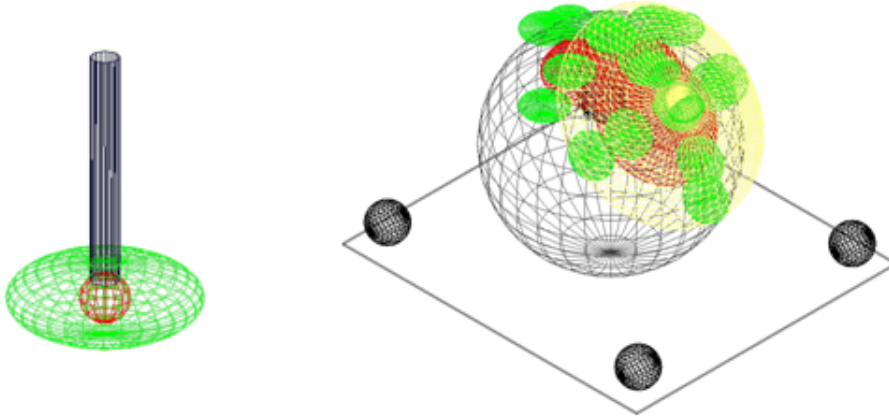
Obrázek 4.3: Trojosý elipsoid

Pokud $a = b$, resp. $b = c$, resp. $a = c$, hovoříme o *rotačním* elipsoidu s osou rotace rovnoběžnou s osou z , resp. x , resp. y .

Pokud $a = b = c$, vznikne kulová plocha jako speciální případ elipsoidu.

Jako příklad praktické aplikace uveďme *elipsoid nejistoty měření*, kterým lze modelovat oblast, ve které leží bod změřený na souřadnicovém měřicím stroji v případě, že měřicí zařízení vykazuje stejnou nejistotu měření ve směrech os x a y , ale podstatně menší nejistotu ve směru

osy z , viz obr. 4.4 vlevo (převzato z [10]). Vpravo na obrázku je nakresleno několik elipsoidů nejistoty měření, ve kterých se nacházejí body naměřené na kulové ploše při použití otočného stolu.



Obrázek 4.4: Elipsoid nejistoty měření

4.4.3 Hyperboloid

Jednodílný eliptický hyperboloid je určen středem $\mathbf{S} = (m, n, p)$ a poloosami $a||x, b||y, c||z, a \neq b$. Má-li eliptický jednodílný hyperboloid osu rovnoběžnou s osou z , viz obr. 4.5, je jeho rovnice

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} - \frac{(z-p)^2}{c^2} = 1.$$

Je-li osa jednodílného eliptického hyperboloidu rovnoběžná s osou x , jeho rovnice se změří na

$$-\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} + \frac{(z-p)^2}{c^2} = 1,$$

a pokud je osa jednodílného eliptického hyperboloidu rovnoběžná s osou y , změří se jeho rovnice na

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} + \frac{(z-p)^2}{c^2} = 1.$$

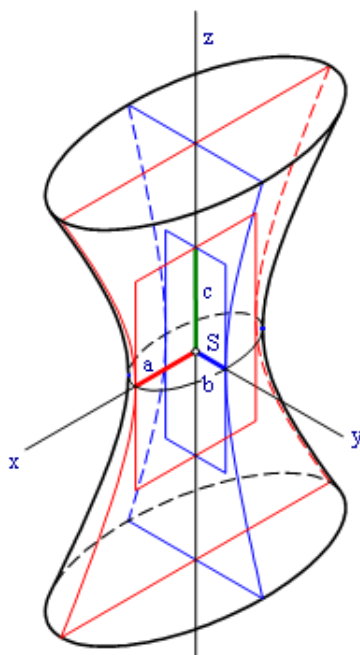
Pokud jsou poloosy určující eliptický řez jednodílného eliptického hyperboloidu stejně dlouhé, přechází eliptický hyperboloid v *rotační*. Jednodílný rotační hyperboloid je také plocha generovaná rotačním pohybem přímky mimoběžné s osou otáčení. Praktickou aplikaci této skutečnosti nalezneme při převodu šroubovými ozubenými koly s mimoběžnými osami hřídelů šroubových kol. Šroubová ozubená kola se dotýkají podél přímky, viz obr. 4.6 (převzato z [?] a [11]).

Dvoudílný eliptický hyperboloid je určen středem $\mathbf{S} = (m, n, p)$ a poloosami $a||x, b||y, c||z, a \neq b$. Má-li dvoudílný eliptický hyperboloid osu rovnoběžnou s osou z , je jeho rovnice

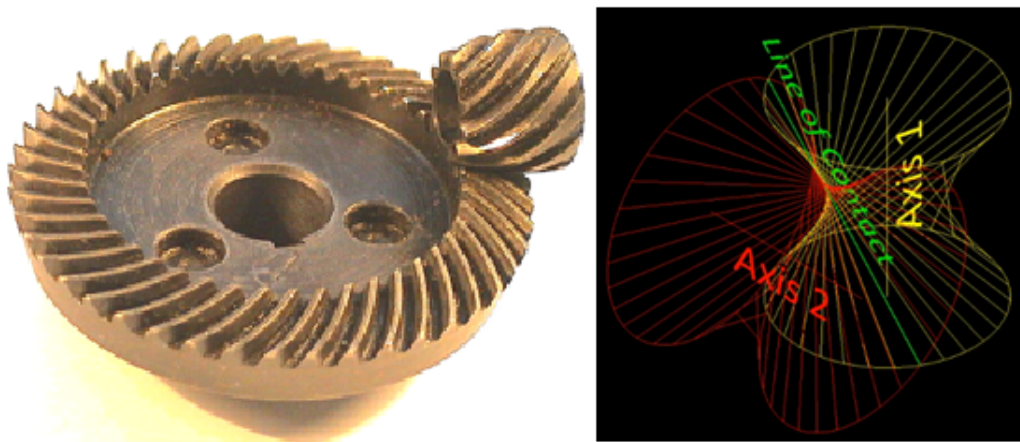
$$-\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} + \frac{(z-p)^2}{c^2} = 1.$$

Je-li osa dvoudílného eliptického hyperboloidu rovnoběžná s osou x , viz obr. 4.7, jeho rovnice se změří na

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} - \frac{(z-p)^2}{c^2} = 1,$$



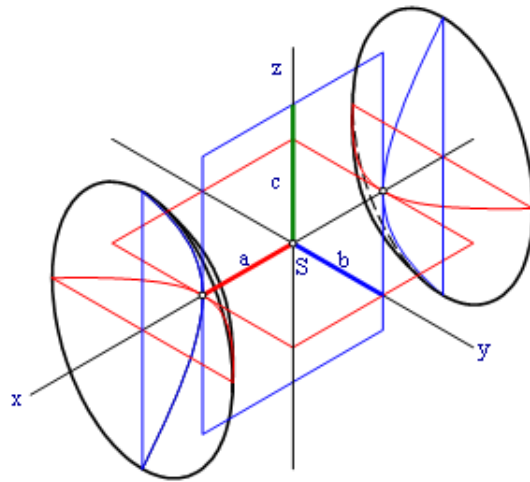
Obrázek 4.5: Jednodílný eliptický hyperboloid

Obrázek 4.6: Převod šroubovými ozubenými koly
[video](#)

a pokud je osa dvoudílného eliptického hyperboloidu rovnoběžná s osou y , změní se jeho rovnice na

$$-\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} - \frac{(z-p)^2}{c^2} = 1.$$

Pokud jsou poloosy určující eliptický řez dvoudílného eliptického hyperboloidu stejně dlouhé, přechází eliptický hyperboloid v *rotační*.

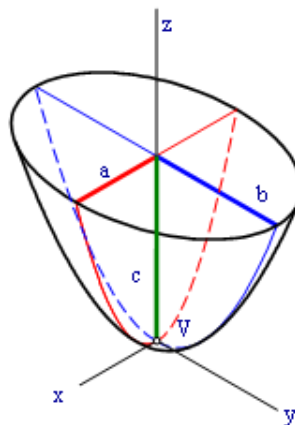


Obrázek 4.7: Dvoudílný eliptický hyperboloid

4.4.4 Paraboloid

Eliptický paraboloid je určen vrcholem $\mathbf{V} = (m, n, p)$, dvěma různě dlouhými poloosami a výškou. Jestliže jsou poloosy $a||x$, $b||y$ a výška $c||z$, má eliptický paraboloid osu rovnoběžnou s osou z , viz obr. 4.8, je jeho rovnice

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} = \frac{z - p}{c}.$$



Obrázek 4.8: Eliptický paraboloid

Je-li osa eliptického paraboloidu rovnoběžná s osou x , jeho rovnice se změjí na

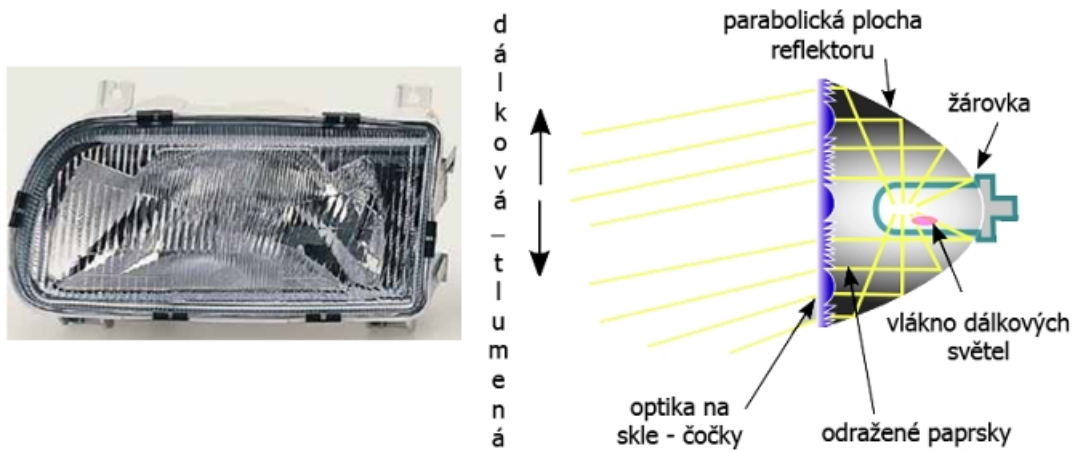
$$\frac{(y - n)^2}{b^2} + \frac{(z - p)^2}{c^2} = \frac{x - m}{a},$$

a pokud je osa eliptického paraboloidu rovnoběžná s osou y , změjí se jeho rovnice na

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(z - p)^2}{c^2} = \frac{y - n}{a}.$$

Pokud jsou poloosy eliptického paraboloidu stejně dlouhé, přechází eliptický paraboloid v rotační.

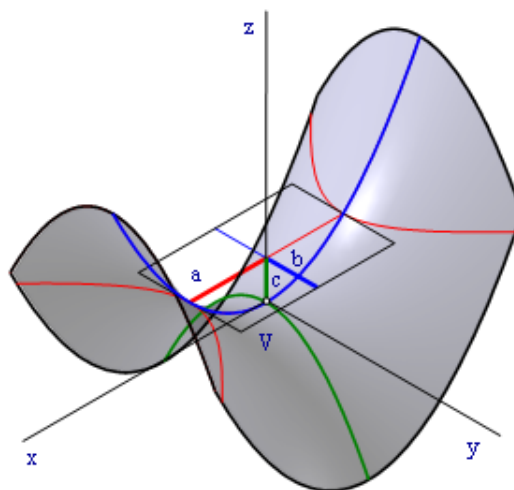
V praxi se můžeme s eliptickým a rotačním paraboloidem setkat u parabolických antén, zrcadel a světlometů, viz obr. 4.9 (převzato z [12]).



Obrázek 4.9: Parabolický reflektor Škoda Felicia A02

Hyperbolický paraboloid je určen vrcholem $\mathbf{V} = (m, n, p)$, dvěma poloosami a výškou. Jestliže jsou poloosy $a \parallel x$, $b \parallel y$ a výška $c \parallel z$, má hyperbolický paraboloid osu rovnoběžnou s osou z , viz 4.10, a jeho rovnice je

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2} = \frac{z - p}{c}.$$



Obrázek 4.10: Hyperbolický paraboloid

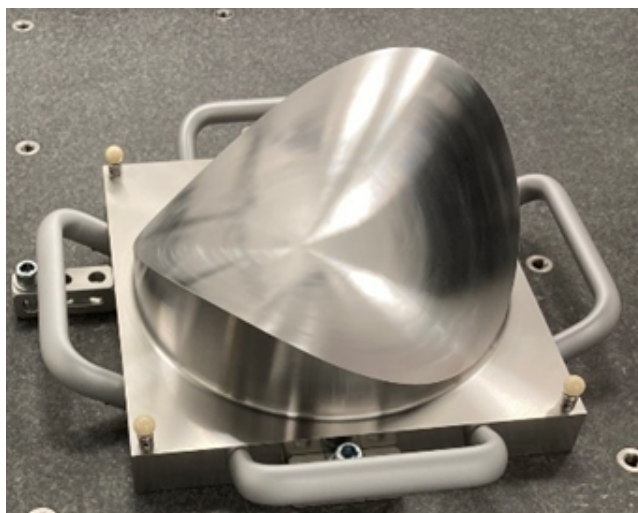
Je-li osa hyperbolického paraboloidu rovnoběžná s osou x , jeho rovnice se změnila na

$$\frac{(y - n)^2}{b^2} - \frac{(z - p)^2}{c^2} = \frac{x - m}{a},$$

a pokud je osa hyperbolického paraboloidu rovnoběžná s osou y , změní se jeho rovnice na

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(z - p)^2}{c^2} = \frac{y - n}{b}.$$

Příklad praktického použití hyperbolického paraboloidu je uveden na obr. 4.11, kde je zobrazen etalon Českého metrologického institutu (ČMI) Hyperbolický paraboloid 300 [13] vyvinutý k testování a verifikaci schopností souřadnicových měřicích strojů měřit obecně tvarované plochy.



Obrázek 4.11: ČMI etalon obecných tvarů HP 300

4.5 Přehled kvadratických ploch

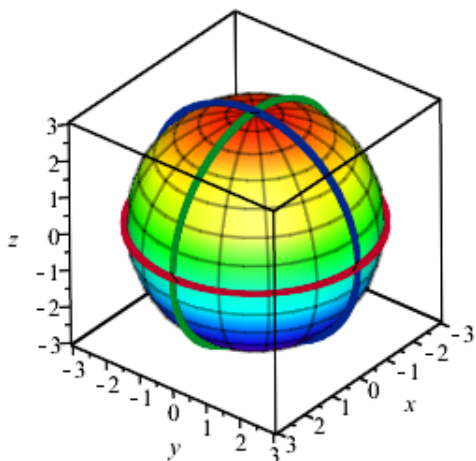
V této části je uveden stručný přehled kvadratických ploch umístěných v posunuté poloze vůči souřadnicovému systému, tj. kdy osy kvadratických ploch jsou rovnoběžné s osami souřadnicového systému. Obecná poloha kvadratických ploch vůči souřadnicovému systému není uvažována. V přehledu je uveden kanonický tvar rovnice kvadratické plochy a zobrazení plochy pro konkrétní zadání. Pokud je to možné, je v obrázku vyznačen geometrický význam jednotlivých prvků vyskytujících se v kanonické rovnici kvadratické plochy.

Kulová plocha

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 + (z - p)^2 = r^2$$

$$\mathbf{S} = (m, n, p) = (0, 0, 0)$$

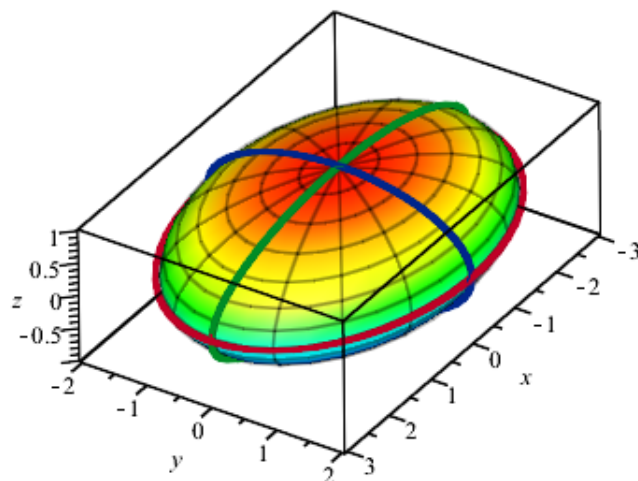
$$r = 3$$

**Elipsoid**

$$\frac{(x - m)^2}{a^2} + \frac{(y - n)^2}{b^2} + \frac{(z - p)^2}{c^2} = 1$$

$$\mathbf{S} = (m, n, p) = (0, 0, 0)$$

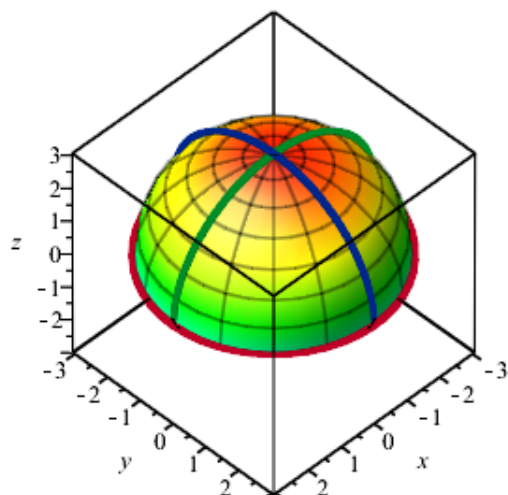
$$a = 3, b = 2, c = 1$$

**Kulová plocha****(horní část)**

$$z = p + c\sqrt{r^2 - (x - m)^2 - (y - n)^2}$$

$$\mathbf{S} = (m, n, p) = (0, 0, 0)$$

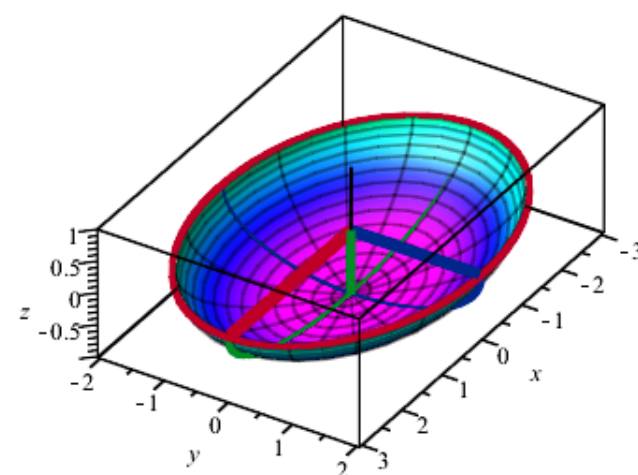
$$r = 3$$

**Elipsoid****(dolní část)**

$$z = p - c\sqrt{1 - \frac{(x - m)^2}{a^2} - \frac{(y - n)^2}{b^2}}$$

$$\mathbf{S} = (m, n, p) = (0, 0, 0)$$

$$a = 3, b = 2, c = 1$$

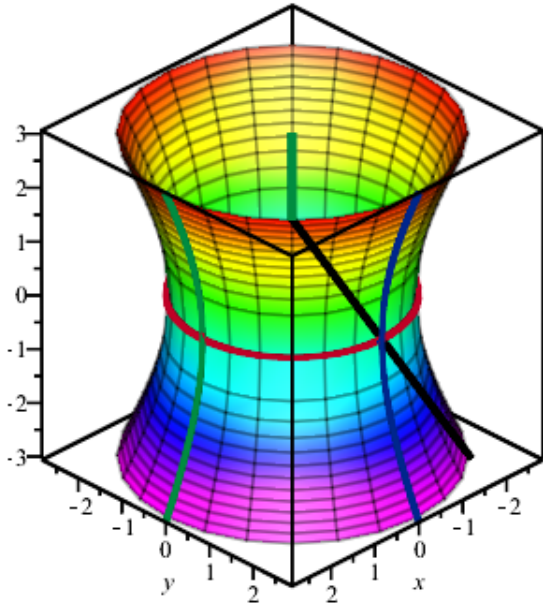


Rotační jednodílný hyperboloid, $o \parallel z$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} - \frac{(z-p)^2}{c^2} = 1$$

$$\mathbf{S} = (m, n, p) = (0, 0, 0)$$

$$a = b = 2, c = 3$$

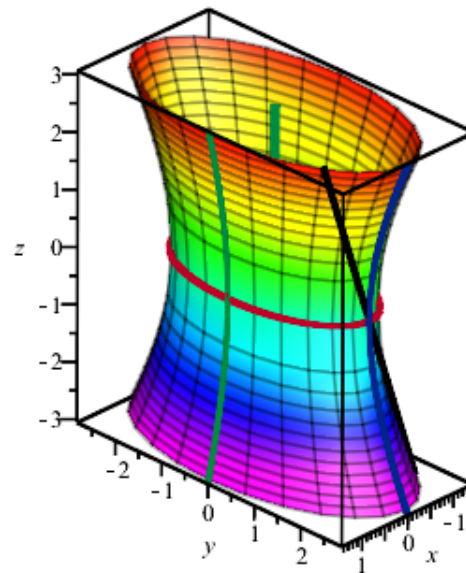


Eliptický jednodílný hyperboloid, $o \parallel z$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} - \frac{(z-p)^2}{c^2} = 1$$

$$\mathbf{S} = (m, n, p) = (0, 0, 0)$$

$$a = 1, b = 2, c = 3$$

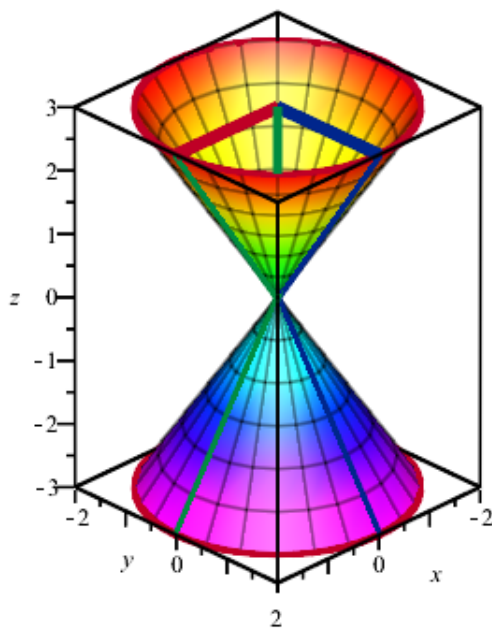


Rotační kuželová plocha, $o \parallel z$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} - \frac{(z-p)^2}{c^2} = 0$$

$$\mathbf{V} = (m, n, p) = (0, 0, 0)$$

$$a = b = 2, c = 3$$

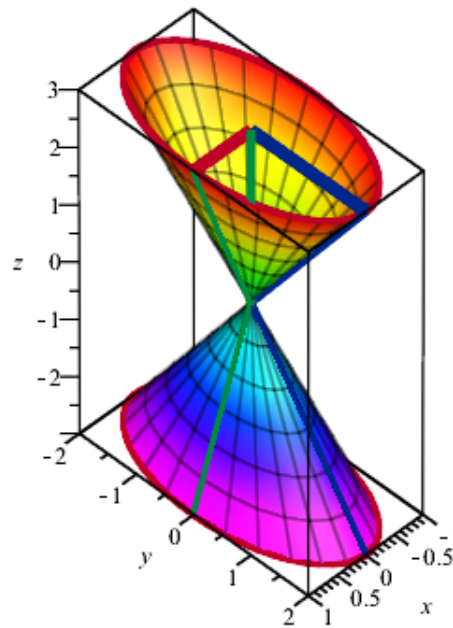


Eliptická kuželová plocha, $o \parallel z$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} - \frac{(z-p)^2}{c^2} = 0$$

$$\mathbf{V} = (m, n, p) = (0, 0, 0)$$

$$a = 1, b = 2, c = 3$$

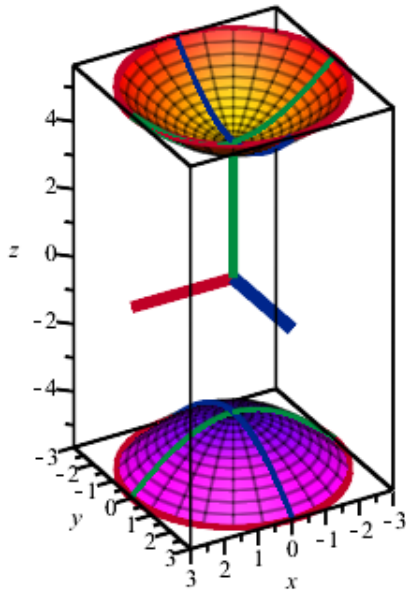


Rotační dvojdílný hyperboloid, $o \parallel z$

$$-\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} + \frac{(z-p)^2}{c^2} = 1$$

$$\mathbf{S} = (m, n, p) = (0, 0, 0)$$

$$a = b = 3, c = 4$$

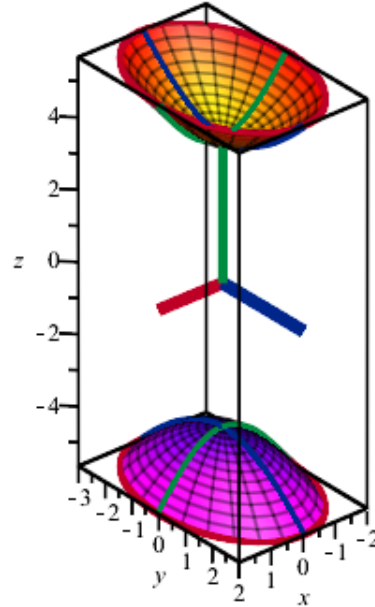


Eliptický dvojdílný hyperboloid, $o \parallel z$

$$-\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} + \frac{(z-p)^2}{c^2} = 1$$

$$\mathbf{S} = (m, n, p) = (0, 0, 0)$$

$$a = 2, b = 3, c = 4$$

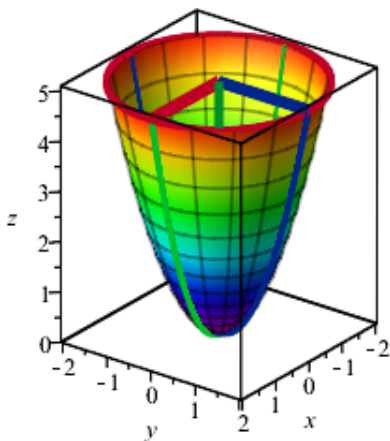


Rotační paraboloid, $o \parallel +z$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = \frac{z-p}{c}$$

$$\mathbf{V} = (m, n, p) = (0, 0, 0)$$

$$a = b = 2, c = 5$$

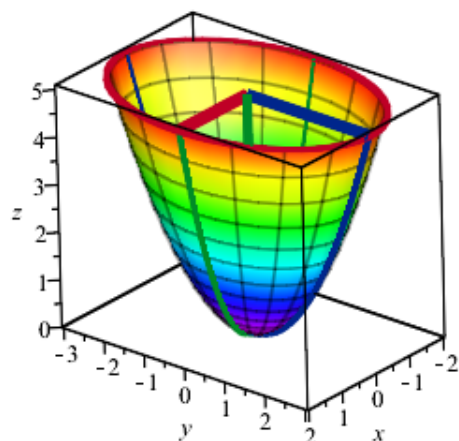


Eliptický paraboloid, $o \parallel +z$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = \frac{z-p}{c}$$

$$\mathbf{V} = (m, n, p) = (0, 0, 0)$$

$$a = 2, b = 3, c = 5$$

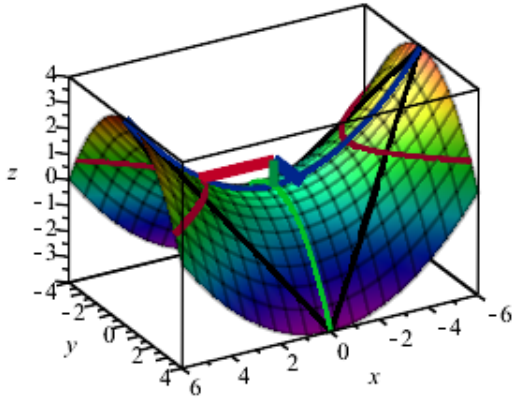


Hyperbolický paraboloid, $o \parallel +z$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = \frac{z-p}{c}$$

$$\mathbf{V} = (m, n, p) = (0, 0, 0)$$

$$a = 3, b = 2, c = 1$$

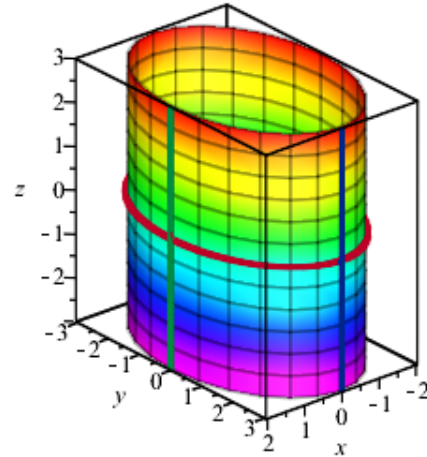


Eliptická válcová plocha, $o \parallel z$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

$$\mathbf{S} = (m, n, z) = (0, 0, z)$$

$$a = 2, b = 3$$

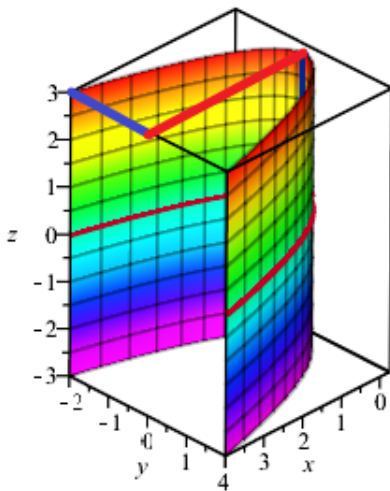


Parabolická válcová plocha, $o \parallel z$

$$\frac{(y-n)^2}{b^2} = \frac{x-m}{a}$$

$$\mathbf{V} = (m, n, p) = (0, 0, 0)$$

$$a = 4, b = 2$$

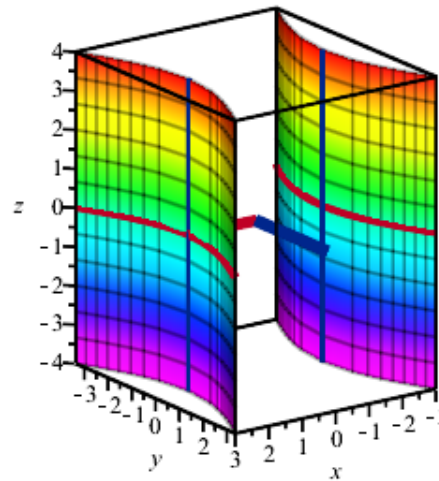


Hyperbolická válcová plocha, $o \parallel z$

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

$$\mathbf{S} = (m, n, p) = (0, 0, 0)$$

$$a = 2, b = 3$$



Kapitola 5

Rotační plochy

Rotační plocha je útvar, který vznikne rotačním pohybem tvořící křivky kolem osy rotace. V analytických vyjádřeních uvedených dále budeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že osou rotace je osa z . Transformační matice bude tedy představovat pouze rotaci kolem osy z , (viz sekce 1.4.3)

$$\mathbf{G}(u) = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u \in [0, 2\pi].$$

Má-li tvořící křivka v homogenních souřadnicích (viz kap. 1) prostoru E_∞^3 analytickou reprezentaci

$$\mathbf{P}(v) = (x(v), y(v), z(v), 1), \quad v \in [v_1, v_2],$$

je její rotací kolem osy z generována rotační plocha v základní poloze

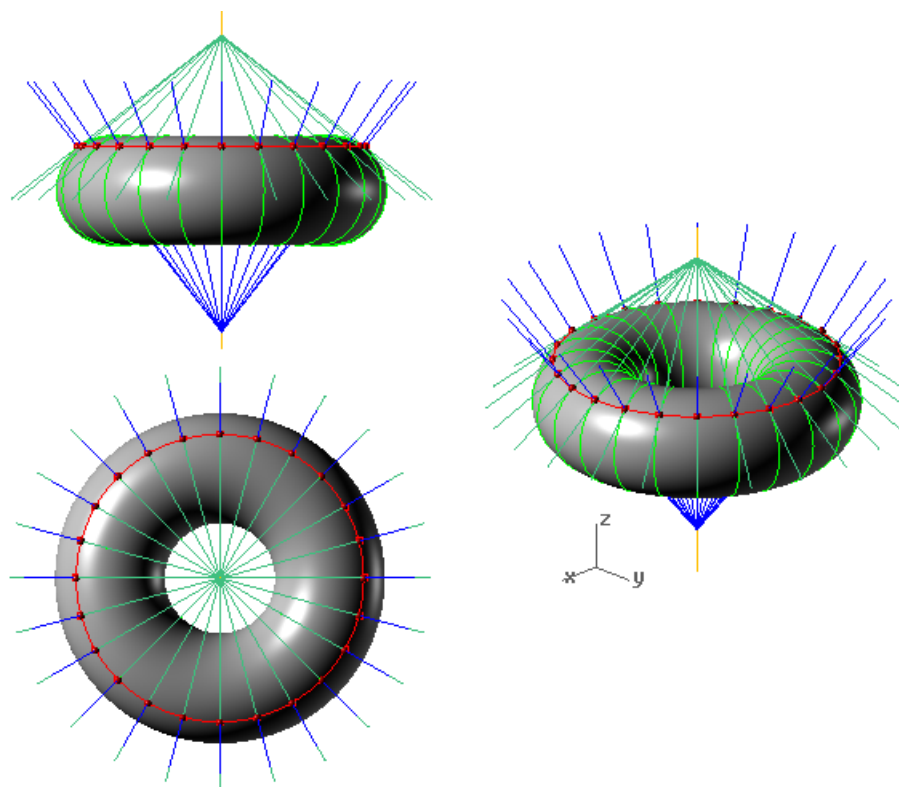
$$\begin{aligned} \mathbf{S}(u, v) &= \mathbf{P}(v) \cdot \mathbf{G}(u) = (x(v), y(v), z(v), 1) \cdot \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= (x(v) \cos u - y(v) \sin u, x(v) \sin u + y(v) \cos(u), z(v), 1), \\ &u \in [0, 2\pi], \quad v \in [v_1, v_2]. \end{aligned}$$

Parametrické u -křivky rotační plochy jsou rovnoběžkové kružnice. Parametrické v -křivky rotační plochy jsou tvořící křivky. V případě, že tvořící křivkou je rovinná křivka ležící v rovině, resp. polorovinně procházející osou rotace, nazýváme tuto tvořící křivku *meridián*, resp. *polomeridián* rotační plochy.

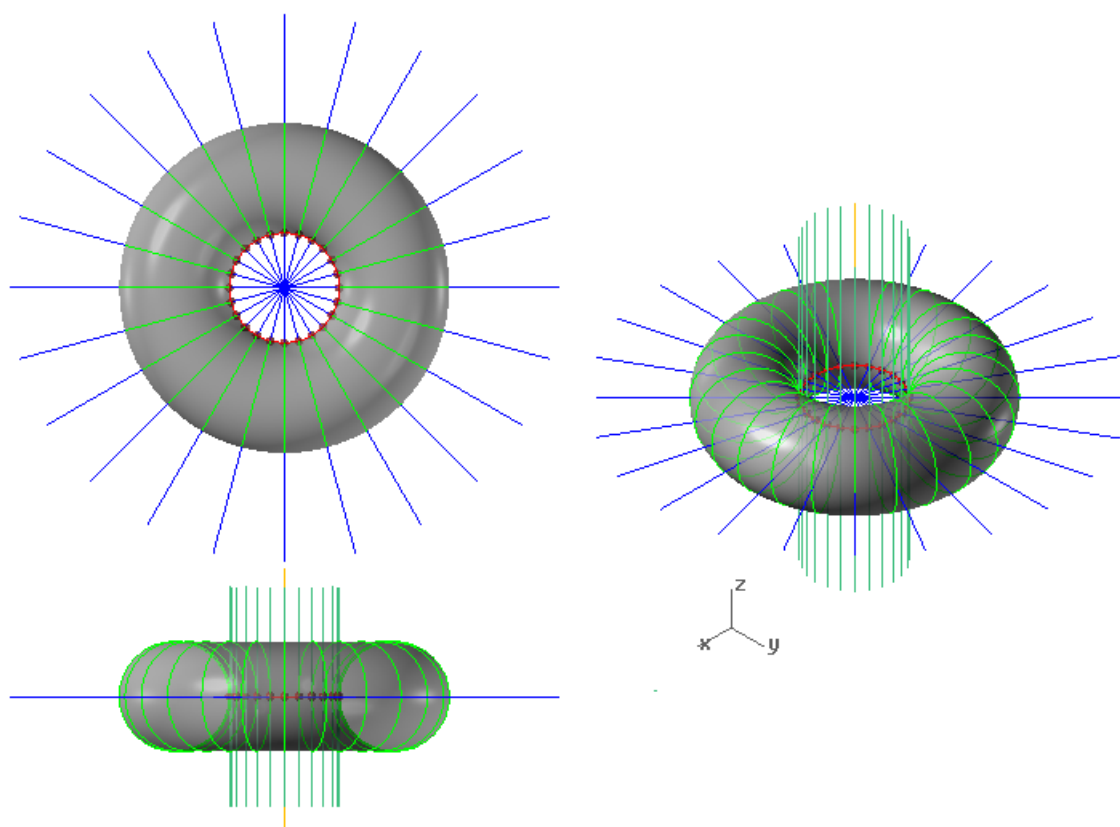
Bez důkazu uvedeme souhrn nejdůležitějších vlastností rotačních ploch, se kterými budeme dále pracovat. Také v této části zavedeme potřebou terminologii.

- Rotační plocha je souměrná podle své osy a podle roviny každého meridiánu.
- Tečna k meridiánu rotační plochy protíná osu rotace nebo je s ní rovnoběžná.

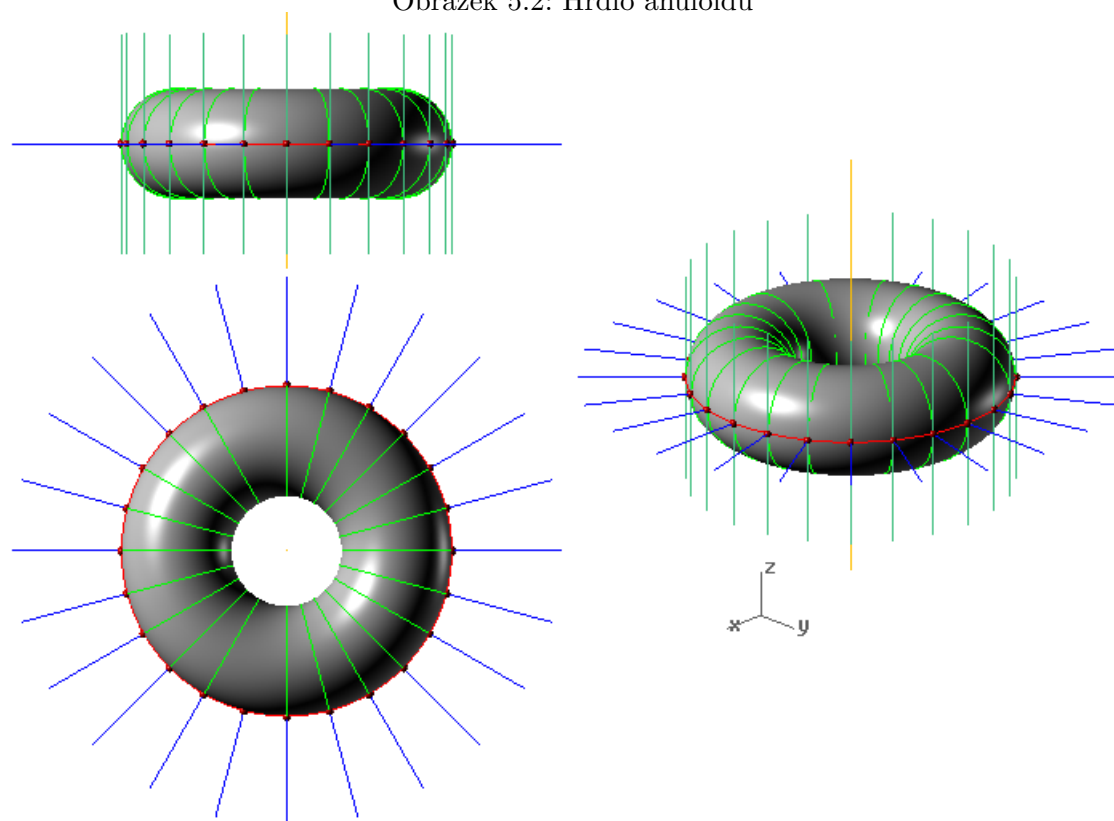
- Tečny k meridiánu v bodech téže rovnoběžkové kružnice tvoří buď rotační kuželovou plochu nebo rotační válcovou plochu nebo rovinu.
- Tvoří-li tečny k meridiánu v bodech téže rovnoběžkové kružnice rotační kuželovou plochu, nazývá se tato rotační kuželová plocha *tečnový kužel* (obr. 5.1).
- Tvoří-li tečny k meridiánu v bodech téže rovnoběžkové kružnice rotační válcovou plochu, nazývá se tato rovnoběžková kružnice *hrdlo* (obr. 5.2), resp. *rovník* (obr. 5.3), pokud se rotační válcová plocha dotýká uvnitř, resp. vně rotační plochy.
- Tvoří-li tečny k meridiánu v bodech téže rovnoběžkové kružnice rovinu, nazývá se tato rovnoběžková kružnice *kráter* (obr. 5.4).
- Normála rotační plochy protíná osu rotace nebo je s ní rovnoběžná.
- Tvoří-li tečny k meridiánu v bodech téže rovnoběžkové kružnice tečnový kužel, tvoří normály rotační plochy v bodech této rovnoběžkové kružnice rotační kuželovou plochu – tzv. *normálový kužel* (obr. 5.1).
- Tvoří-li tečny k meridiánu v bodech téže rovnoběžkové kružnice rotační válcovou plochu, tvoří normály rotační plochy v bodech této rovnoběžkové kružnice rovinu (obr. 5.2, obr. 5.3).
- Tvoří-li tečny k meridiánu v bodech téže rovnoběžkové kružnice rovinu, tvoří normály rotační plochy v bodech této rovnoběžkové kružnice rotační válcovou plochu (obr. 5.4).



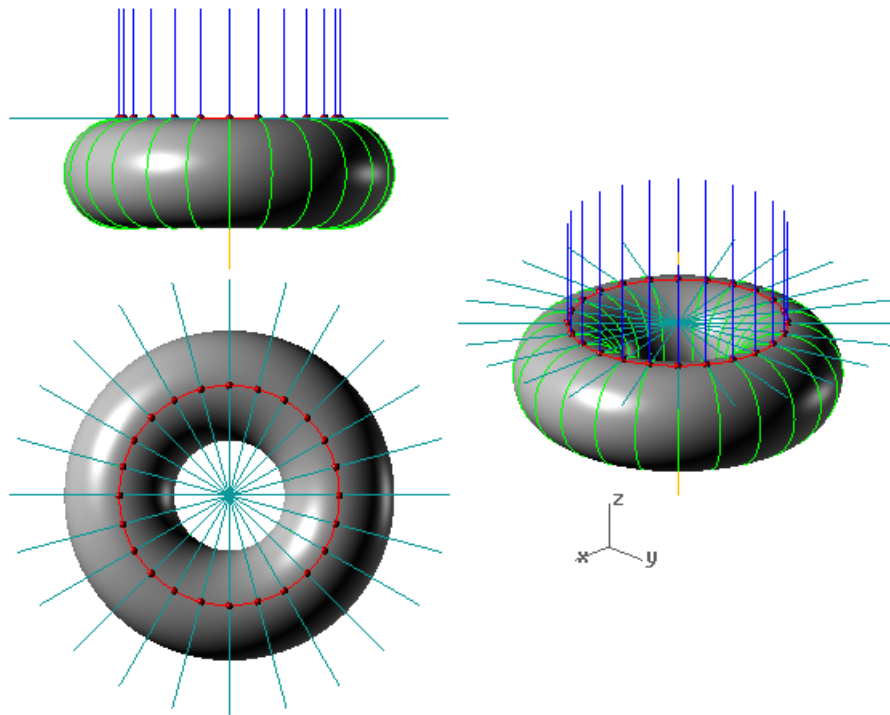
Obrázek 5.1: Tečnový a normálový kužel anuloidu



Obrázek 5.2: Hrdlo anuloidu



Obrázek 5.3: Rovník anuloidu



Obrázek 5.4: Kráter anuloidu

V dalším uvedeme analytickou a grafickou reprezentaci základních rotačních ploch vzniklých rotací přímky a kružnice kolem osy z .

5.1 Rotační válcová plocha

Rotační válcová plocha je generována rotací přímky rovnoběžné s osou rotace kolem osy rotace. Uvažujme přímku rovnoběžnou s osou z procházející bodem r na ose x (levý hlavní polomeridián). Analytická reprezentace levého hlavního polomeridiánu je

$$\mathbf{M}(v) = (r, 0, v, 1), \quad v \in \mathbb{R}.$$

Potom je analytická reprezentace rotační válcové plochy

$$\mathbf{S}(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v, 1), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in \mathbb{R}.$$

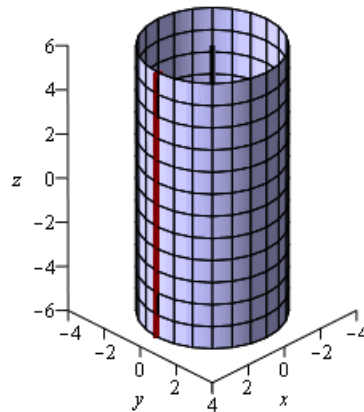
Příklad: Analytická reprezentace levého hlavního polomeridiánu je

$$\mathbf{M}(v) = (3, 0, v, 1), \quad v \in \mathbb{R}.$$

Rotační válcová plocha, která vznikne jeho rotací kolem osy z , má analytickou reprezentaci

$$\mathbf{S}(u, v) = (3 \cos u, 3 \sin u, v, 1), \quad v \in \mathbb{R}.$$

Na obr. 5.5 je zobrazena tato rotační válcová plocha pro $v \in [-6, 6]$.



Obrázek 5.5: Rotační válcová plocha generovaná rotací přímky rovnoběžné s osou rotace ([animace](#))

5.2 Rotační kuželová plocha

Rotační kuželová plocha je generována rotací přímky různoběžné s osou rotace kolem osy rotace. Uvažujme přímku ležící v rovině (x, z) určenou bodem $\mathbf{A} = (x_{\mathbf{A}}, 0, z_{\mathbf{A}}, 1)$ a směrovým vektorem $\mathbf{a} = (a_1, 0, a_3, 0)$. Tato přímka je hlavní polomeridián rotační kuželové plochy s analytickou reprezentací

$$\mathbf{M}(v) = (x_{\mathbf{A}} + a_1v, 0, z_{\mathbf{A}} + a_3v, 1), \quad v \in \mathbb{R}.$$

Analytická reprezentace rotační kuželové plochy je

$$\mathbf{S}(u, v) = ((x_{\mathbf{A}} + a_1v) \cos u, (x_{\mathbf{A}} + a_1v) \sin u, z_{\mathbf{A}} + a_3v, 1), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in \mathbb{R}.$$

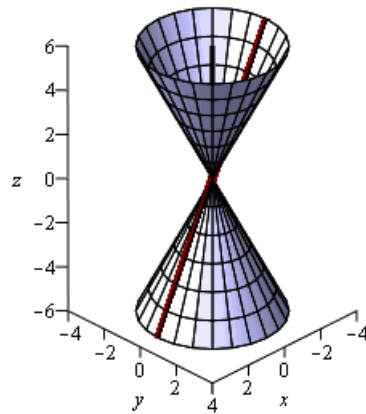
Příklad: Hlavní levý polomeridián rotační kuželové plochy je určen bodem $\mathbf{A} = (3, 0, -6, 1)$ a směrovým vektorem $\mathbf{a} = (-1, 0, 2, 0)$. Analytická reprezentace hlavního levého polomeridiánu je

$$\mathbf{M}(v) = (3 - v, 0, -6 + v, 1), \quad v \in \mathbb{R}$$

a rotační kuželová plocha má analytickou reprezentaci

$$\mathbf{S}(u, v) = ((-v + 3) \cos u, (-v + 3) \sin u, -6 + 2v, 1), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in \mathbb{R}.$$

Na obr. 5.6 je zobrazena tato rotační kuželová plocha pro $v \in [0, 12]$.



Obrázek 5.6: Rotační kuželová plocha generovaná rotací přímky různoběžné s osou rotace (animace)

5.3 Rotační jednodílný hyperboloid

Rotační jednodílný hyperboloid vzniká rotací tvořící přímky $\mathbf{P}(v)$, která je mimoběžná s osou rotace kolem osy rotace. Uvažujme tvořící přímku, která je dána bodem $\mathbf{A} = (x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{A}}, z_{\mathbf{A}}, 1)$ a směrovým vektorem $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, 0)$. Analytická reprezentace této přímky je

$$\mathbf{P}(v) = (x_{\mathbf{A}} + a_1v, y_{\mathbf{A}} + a_2v, z_{\mathbf{A}} + a_3v, 1), \quad v \in \mathbb{R}.$$

Analytická reprezentace jednodílného rotačního hyperboloidu je potom

$$\mathbf{S}(u, v) = ((x_{\mathbf{A}} + a_1v) \cos u - (y_{\mathbf{A}} + a_2v) \sin u, (x_{\mathbf{A}} + a_1v) \sin u + (y_{\mathbf{A}} + a_2v) \cos u, z_{\mathbf{A}} + a_3v, 1), \\ u \in [0, 2\pi], \quad v \in \mathbb{R}.$$

Příklad: Tvořící přímka jednodílného rotačního hyperboloidu je dána bodem $\mathbf{A} = (3, 1, -6, 1)$ a směrovým vektorem $\mathbf{a} = (-1, 0, 2, 0)$. Analytická reprezentace této přímky je

$$\mathbf{P}(v) = (3 - v, 1, -6 + 2v, 1), \quad v \in \mathbb{R}$$

a analytická reprezentace jednodílného rotačního hyperboloidu je

$$\mathbf{S}(u, v) = ((3 - v) \cos u - \sin u, (3 - v) \sin u + \cos u, -6 + 2v, 1), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in \mathbb{R}.$$

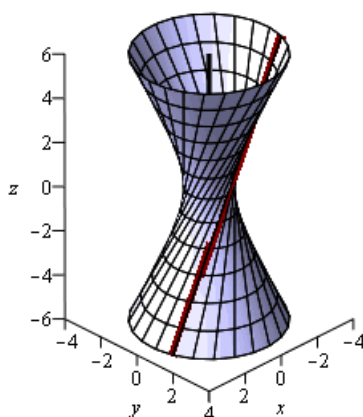
Na obr. 5.7 je tento jednodílný rotační hyperboloid znázorněn pro $v \in [-6, 6]$.

Analytickou reprezentaci hlavního meridiánu v parametrickém prostoru plochy $\mathbf{S}(u, v)$ získáme řešením rovnice

$$y(u, v) = 0,$$

tedy

$$(3 - v) \sin u + \cos u = 0.$$



Obrázek 5.7: Jednodílný rotační hyperboloid generovaný rotací přímky mimoběžné s osou rotace ([animace](#))

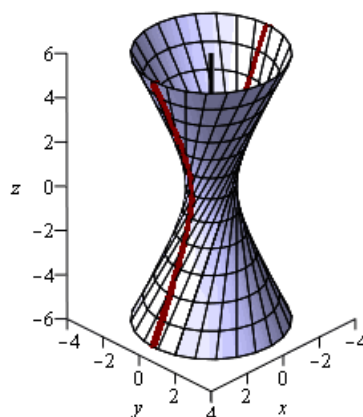
Tato rovnice má řešení

$$u = u, v = \frac{3 \tan u + 1}{\tan u}, u \in [0, 2\pi].$$

Dosadíme-li toto řešení do analytické reprezentace jednodílného rotačního hyperboloidu, dostaneme

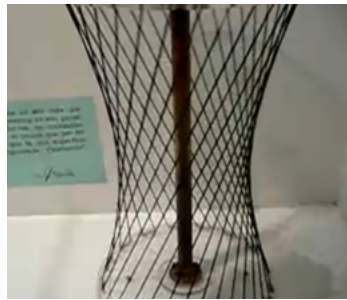
$$\mathbf{M}(u) = \left(-\frac{1}{\sin u}, 0, \frac{2}{\tan u}, 1\right),$$

což je jedna z možných analytických reprezentací hyperboly – hlavního meridiánu $\mathbf{M}(u)$ jednodílného rotačního hyperboloidu znázorněného na obr. 5.8.



Obrázek 5.8: Jednodílný rotační hyperboloid generovaný rotací hlavního meridiánu – hyperboly ([animace](#))

Na obr. 5.9 je zobrazen model, který velmi názorným způsobem demonstruje vztah mezi rotační válcovou plochou, rotační kuželovou plochou a jednodílným rotačním hyperboloidem (převzato z [14]).



Obrázek 5.9: Vztah mezi rotační válcovou plochou, rotační kuželovou plochou a jednodílným rotačním hyperboloidem ([video](#))

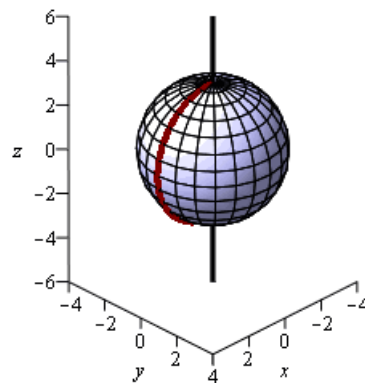
5.4 Kulová plocha

Kulová plocha vznikne rotací kružnice (meridiánu) se středem na ose rotace kolem osy rotace. V případě, že analytická reprezentace levého hlavního polomeridiánu je

$$\mathbf{M}(v) = (R \cos v, 0, R \sin v, 1), \quad v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

kde R je reálné kladné číslo, vznikne jeho rotací kolem osy z kulová plocha se středem v počátku a poloměrem R s analytickou reprezentací

$$\mathbf{S}(u, v) = (R \cos u \cos v, R \sin u \cos v, R \sin v, 1), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$



Obrázek 5.10: Kulová plocha ([animace](#))

Příklad: Levý hlavní polomeridián kulové plochy je určen kružnicí

$$\mathbf{M}(v) = (3 \cos v, 0, 3 \sin v, 1), \quad v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Kulová plocha, která vznikne jeho rotací kolem osy z má analytickou reprezentaci

$$\mathbf{S}(u, v) = (3 \cos u \cos v, 3 \sin u \cos v, 3 \sin v, 1), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Na obr. 5.10 je tato kulová plocha zobrazena.

5.5 Anuloid

Anuloid vznikne rotací kružnice ležící v rovině procházející osou rotace, přičemž střed tvořící kružnice neleží na ose rotace. V takovém případě je třeba uvažovat transformační matici rotačního pohybu ve tvaru

$$\mathbf{G}(u) = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ r \cos u & r \sin u & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u \in [0, 2\pi],$$

kde první tři řádky vyjadřují otáčení tvořící kružnice kolem osy z a poslední řádek vyjadřuje translaci tvořící kružnice o poloměru R podél kružnice ležící v rovině (x, y) a poloměru r .

V případě, že analytická reprezentace tvořící kružnice v základní poloze je

$$\mathbf{P}(v) = (R \cos v, 0, R \sin v, 1), \quad v \in [0, 2\pi],$$

vznikne jejím rotačním pohybem podél kružnice ležící v rovině (x, y) a poloměrem r anuloid s analytickou reprezentací

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(u, v) &= \mathbf{P}(v) \cdot \mathbf{G}(u) = (R \cos v, 0, R \sin v, 1) \cdot \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ r \cos u & r \sin u & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= ((r + R \cos v) \cos u, (r + R \cos v) \sin u, R \sin v, 1), \\ &u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Příklad: Tvořící kružnice v základní poloze má analytickou reprezentaci

$$\mathbf{P}(v) = (3 \cos v, 0, 3 \sin v, 1), \quad v \in [0, 2\pi].$$

Anuloid, který vznikne jejím rotačním pohybem podél kružnice o poloměru $r = 5$ ležící v rovině (x, z) , má analytickou reprezentaci

$$\mathbf{S}(u, v) = ((5 + 2 \cos v) \cos u, (5 + 2 \cos v) \sin u, 2 \sin v, 1), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 2\pi].$$

Na obr. 5.11 je tento anuloid zobrazen.

Analytickou reprezentaci hlavního meridiánu v parametrickém prostoru plochy $\mathbf{S}(u, v)$ získáme řešením rovnice

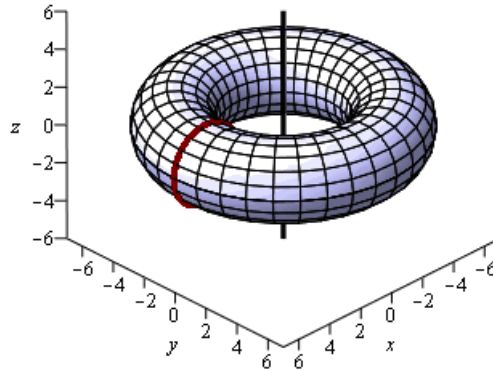
$$y(u, v) = 0,$$

tedy

$$(5 + 2 \cos v) \sin u = 0.$$

Tato rovnice má dvě řešení

$$u = 0, \quad v = v, \quad v \in [0, 2\pi],$$

Obrázek 5.11: Anuloid ([animace](#))

resp.

$$u = \pi, \quad v = v \quad v \in [0, 2\pi].$$

Dosadíme-li tato řešení do analytické reprezentace anuloidu, dostaneme

$$\mathbf{M}_L(u) = (5 + 2 \cos v, 0, 2 \sin v, 1), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 2\pi],$$

resp.

$$\mathbf{M}_R(u) = (-5 - 2 \cos v, 0, 2 \sin v, 1), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 2\pi],$$

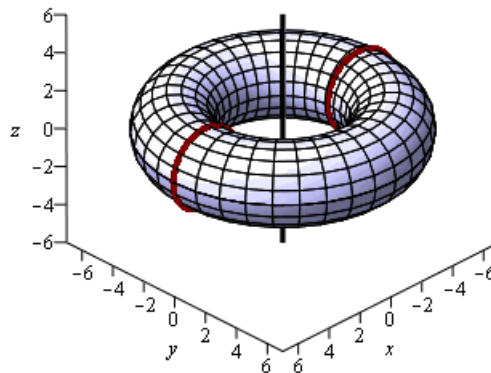
což je analytická reprezentace kružnice se středem v bodě $\mathbf{S}_L = (5, 0, 0, 1)$ a poloměrem $r = 2$ ležící v rovině (x, z) , resp. kružnice se středem v bodě $\mathbf{S}_R = (-5, 0, 0, 1)$ a poloměrem $r = 2$ ležící v rovině (x, z) , tedy levého, resp. pravého hlavního polomeridiánu anuloidu. V případě, že chceme vyjádřit anuloid generovaný rotací hlavních polomeridiánů, je nutné uvažovat v transformační matici pouze rotaci kolem osy z , tedy transformační matici $\mathbf{G}_z(u)$. Analytická reprezentace anuloidu je potom

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_L(u, v) &= \mathbf{M}_L(v) \cdot \mathbf{G}_z(u) = (5 + 2 \cos v, 0, 2 \sin v, 1) \cdot \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= ((5 + 2 \cos v) \cos u, (5 + 2 \cos v) \sin u, 2 \sin v, 1), \\ &u \in [0, \pi), \quad v \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_R(u, v) &= \mathbf{M}_R(v) \cdot \mathbf{G}_z(u) = (-5 - 2 \cos v, 0, 2 \sin v, 1) \cdot \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= ((-5 - 2 \cos v) \cos u, (-5 - 2 \cos v) \sin u, 2 \sin v, 1), \\ &u \in [\pi, 2\pi), \quad v \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Anuloid generovaný rotací hlavního meridiánu kolem osy z je zobrazen na obr. 5.12.

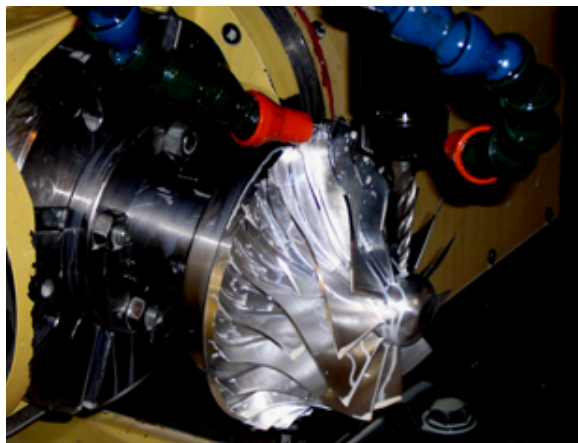


Obrázek 5.12: Anuloid generovaný rotací hlavního meridiánu ([animace](#))

Praktickou aplikaci rotačních ploch lze nalézt ve všech oblastech strojírenství. Jako příklad uveďme stopkovou kuželovou frézu s kulovým čelem na obr. 5.13 (převzato z [?]), která se používá pro vysoce produktivní obrábění lopatek oběžných kol technologií pětiosého CNC frézování, viz obr. 5.14.



Obrázek 5.13: Stopková kuželová fréza s kulovým čelem



Obrázek 5.14: Pětiosé frézování lopatek oběžných kol ([video](#))

Kapitola 6

Šroubové plochy

Šroubová plocha je útvar, který vznikne šroubovým pohybem tvořící křivky kolem osy šroubového pohybu (viz sekce 1.4.2). V analytických vyjádřeních uvedených dále budeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že osou šroubového pohybu je osa z . Trajektorií všech bodů při generování šroubové plochy je šroubovice. Vektorová rovnice jednoho závitu pravotočivé šroubovice je

$$\mathbf{T}(u) = (r \cos u, r \sin u, v_0 u), \quad u \in [0, 2\pi],$$

kde v_0 je parametr šroubového pohybu. Vektorová rovnice jednoho závitu levotočivé šroubovice je

$$\mathbf{T}(u) = (r \cos u, -r \sin u, v_0 u), \quad u \in [0, 2\pi].$$

V dalším budeme vždy uvažovat jeden závit pravotočivé šroubové plochy. Modifikace na levotočivou šroubovou plochu je zřejmá. Transformační matice šroubového pohybu podél šroubovice $\mathbf{T}(u)$ je

$$\mathbf{G}(u) = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 & 0 \\ -\frac{r \sin u}{\sqrt{r^2+v_0^2}} & \frac{r \cos u}{\sqrt{r^2+v_0^2}} & \frac{v_0}{\sqrt{r^2+v_0^2}} & 0 \\ \frac{v_0 \sin u}{\sqrt{r^2+v_0^2}} & -\frac{v_0 \cos u}{\sqrt{r^2+v_0^2}} & \frac{r}{\sqrt{r^2+v_0^2}} & 0 \\ r \cos u & r \sin u & v_0 u & 1 \end{pmatrix},$$
$$u \in [0, 2\pi].$$

Má-li tvořící křivka v homogenních souřadnicích (viz kap. 1) prostoru E_∞^3 v počáteční poloze analytickou reprezentaci

$$\mathbf{P}(v) = (x(v), y(v), z(v), 1), \quad v \in [v_1, v_2],$$

je jejím šroubovým pohybem generována šroubová plocha

$$\mathbf{S}(u, v) = \mathbf{P}(v) \cdot \mathbf{G}(u) = (x(v), y(v), z(v), 1) \cdot \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 & 0 \\ -\frac{r \sin u}{\sqrt{r^2+v_0^2}} & \frac{r \cos u}{\sqrt{r^2+v_0^2}} & \frac{v_0}{\sqrt{r^2+v_0^2}} & 0 \\ \frac{v_0 \sin u}{\sqrt{r^2+v_0^2}} & -\frac{v_0 \cos u}{\sqrt{r^2+v_0^2}} & \frac{r}{\sqrt{r^2+v_0^2}} & 0 \\ r \cos u & r \sin u & v_0 u & 1 \end{pmatrix},$$

$$u \in [0, 2\pi], \quad v \in [v_1, v_2].$$

Parametrické u –křivky šroubové plochy jsou šroubovice. Parametrické v –křivky šroubové plochy jsou tvořící křivky.

Dále bez důkazu uvedeme důležité vlastnosti šroubových ploch, se kterými budeme dále pracovat. Zároveň zavedeme nezbytnou terminologii.

- Každým bodem šroubové plochy prochází šroubovice (trajektorie tohoto bodu při šroubovém pohybu, kterým je šroubová plocha generována) a tvořící křivka.
- *Řídicí kuželová plocha* šroubovice bodu na šroubové ploše je rotační kuželová plocha s výškou v_0 a poloměrem podstavy rovným vzdálenosti bodu od osy šroubového pohybu.
- Tečna ke šroubovici bodu na šroubové ploše je rovnoběžná s površkou řídicí kuželové plochy.
- Tečná rovina ke šroubové ploše v bodě šroubové plochy je dána tečnou ke šroubovici bodu a tečnou k tvořící křivce.
- Normála šroubové plochy je kolmice na tečnou rovinu v bodě dotyku.
- *Osový řez (podélný řez)* šroubové plochy je řez šroubové plochy rovinou procházející osou šroubového pohybu.
- *Meridián* šroubové plochy je osový řez jednoho závitu šroubové plochy.
- *Polomeridián* je osový řez polorovinou s hraniční přímkou v ose šroubového pohybu jednoho závitu šroubové plochy.
- Všechny polomeridiány jedné šroubové plochy jsou shodné.
- *Čelní řez (příčný profil, normální řez)* je řez šroubové plochy rovinou kolmou k ose šroubového pohybu.
- Všechny čelní řezy jedné šroubové plochy jsou shodné.
- Existuje pouze jediná rozvinutelná šroubová plocha – plocha tečen šroubovice.

Analytickou reprezentaci hlavního meridiánu v parametrickém prostoru šroubové plochy $\mathbf{S}(u, v)$ získáme řešením rovnice

$$y(u, v) = 0.$$

Analytickou reprezentaci čelního řezu rovinou

$$z = z_\alpha,$$

v parametrickém prostoru šroubové plochy získáme řešením rovnice

$$z(u, v) = z_\alpha.$$

V dalším uvedeme analytickou a grafickou reprezentaci základních šroubových ploch (vzniklých šroubovým pohybem přímky a kružnice), jejich hlavního meridiánu a čelního řezu.

6.1 Přímkové šroubové plochy

Přímkové šroubové plochy jsou generovány šroubovým pohybem přímky. Podle vzájemné polohy přímky a osy šroubového pohybu rozlišujeme *uzavřenou* šroubovou plochu (tvořící přímka a osa šroubového pohybu jsou různoběžky) nebo *otevřenou* šroubovou plochu (tvořící přímka a osa šroubového pohybu jsou mimoběžky). Podle úhlu φ , který svírá tvořící přímka s osou šroubového pohybu rozlišujeme *pravoúhlou* šroubovou plochu ($\varphi = 90^\circ$) a *kosoúhlou* šroubovou plochu ($\varphi \neq 90^\circ$).

U přímkových šroubových ploch není třeba zohledňovat polohu pohybující se přímky vůči šroubovici, ale lze uvažovat zjednodušenou transformační matici šroubového pohybu

$$\mathbf{G}(u) = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 u & 1 \end{pmatrix}, \quad u \in [0, 2\pi],$$

jejíž první tři řádky představují otáčení kolem osy z a poslední řádek posun podél osy z .

6.1.1 Uzavřená pravoúhlá šroubová plocha

Uzavřená pravoúhlá šroubová plocha je generována šroubovým pohybem tvořící přímky různoběžné s osou šroubového pohybu, přičemž tvořící přímka je kolmá na osu šroubového pohybu. Tvořící přímka je v tomto případě jak meridiánem generované šroubové plochy, tak také jejím čelním řezem.

Uvažujme tvořící přímku, která je v základní poloze totožná s osou x

$$\mathbf{M}(v) = (v, 0, 0, 1), \quad v \in R,$$

a parametr šroubového pohybu v_0 . Potom je analytická reprezentace pravoúhlé uzavřené šroubové plochy

$$\mathbf{S}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v_0 u, 1), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in R.$$

Na obr. 6.1 je tato plocha zobrazena v narysu, půdorysu a axonometrickém pohledu pro $v \in [0, 3]$.

6.1.2 Uzavřená kosoúhlá šroubová plocha

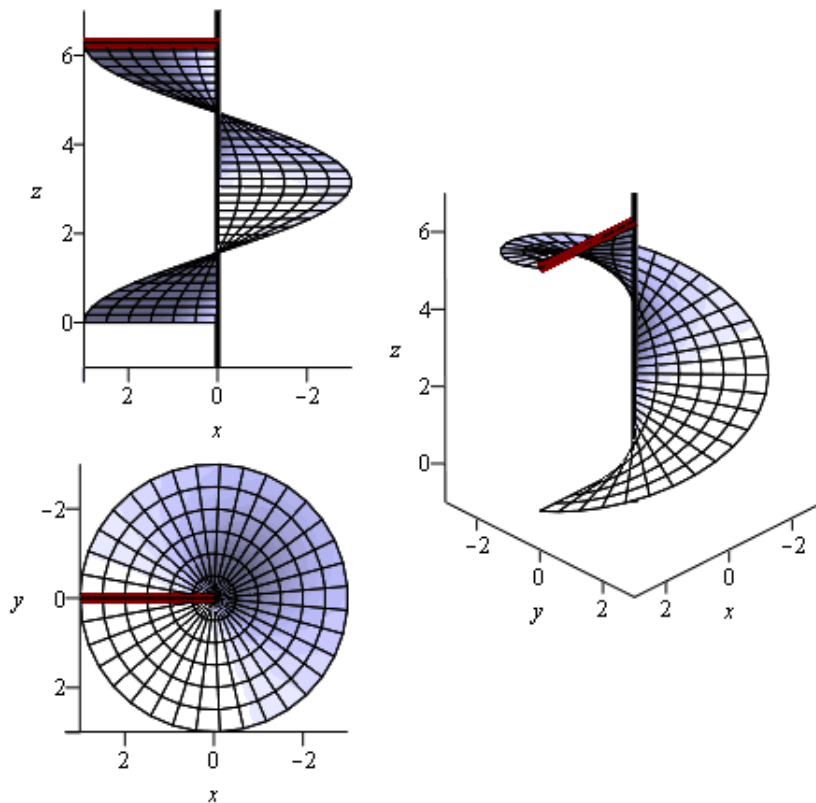
Uzavřená kosoúhlá šroubová plocha je generována šroubovým pohybem tvořící přímky různoběžné s osou šroubového pohybu, přičemž tvořící přímka není kolmá k ose šroubového pohybu. Tvořící přímka je v tomto případě meridiánem šroubové plochy.

Uvažujme tvořící přímku, která v základní poloze leží v rovině (x, z) určenou počátkem a směrovým vektorem $\mathbf{a} = (a_1, 0, a_3, 0)$ s analytickou reprezentací

$$\mathbf{M}(v) = (a_1 v, 0, a_3 v, 1), \quad v \in R.$$

Potom je analytická reprezentace šroubové plochy

$$\mathbf{S}(u, v) = (a_1 v \cos u, a_1 v \sin u, a_3 v, 1), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in R.$$



Obrázek 6.1: Uzavřená pravoúhlá šroubová plocha ([animace](#))

Příklad: Uvažujme tvořící úsečku určenou počátkem a směrovým vektorem $\mathbf{a} = (1, 0, 1, 0)$ s analytickou reprezentací

$$\mathbf{M}(v) = (v, 0, v, 1), \quad v \in [0, 3]$$

a parametrem šroubového pohybu $v_0 = 1$. Uzavřená kosoúhlá šroubová plocha má potom analytickou reprezentaci

$$\mathbf{S}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u + v, 1), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 3].$$

Na obr. 6.2 je tato plocha zobrazena v narysu, půdorysu a axonometrickém pohledu.

Analytickou reprezentaci čelního řezu rovinou $z = \pi$ v parametrickém prostoru plochy $\mathbf{S}(u, v)$ získáme řešením rovnice

$$u + v = \pi,$$

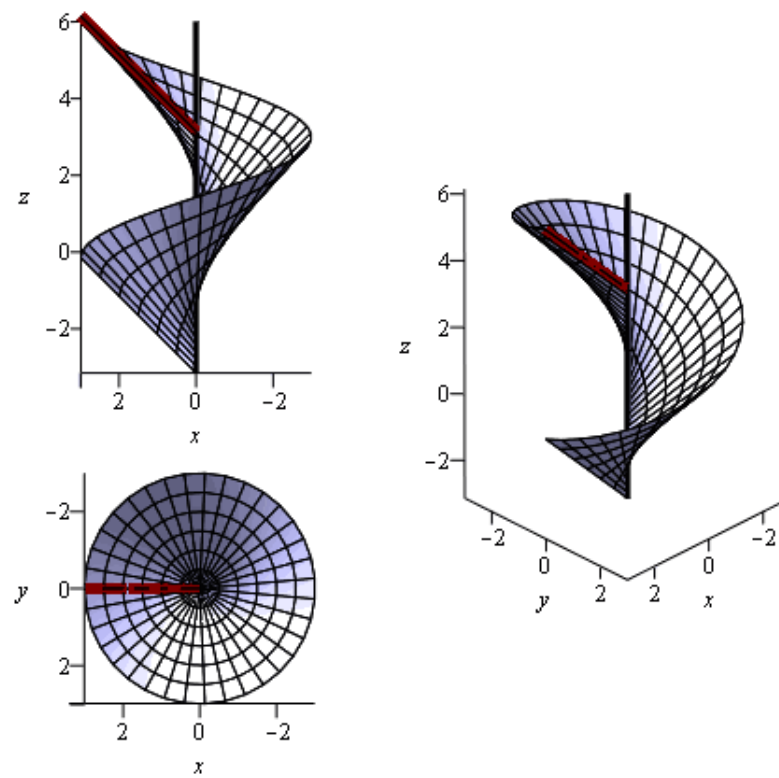
což je např.

$$v = v, \quad u = -v + \pi.$$

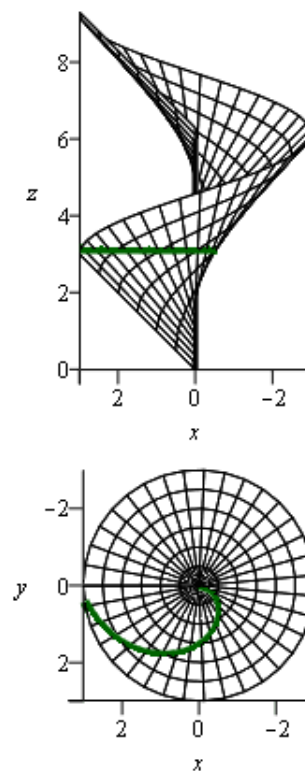
Dosadíme-li toto řešení do analytické reprezentace šroubové plochy, získáme analytickou reprezentaci čelního řezu v homogenních souřadnicích prostoru E_∞^3

$$\mathbf{N}(v) = (v \cos(-v + \pi), v \sin(-v + \pi), \pi, 1), \quad v \in [0, 3].$$

Na obr. 6.3 je tento čelní řez zobrazen v narysu a půdorysu zelenou barvou.



Obrázek 6.2: Uzavřená kosoúhlá šroubová plocha ([animace](#))



Obrázek 6.3: Čelní řez kosoúhlé uzavřené šroubové plochy

6.1.3 Otevřená pravoúhlá šroubová plocha

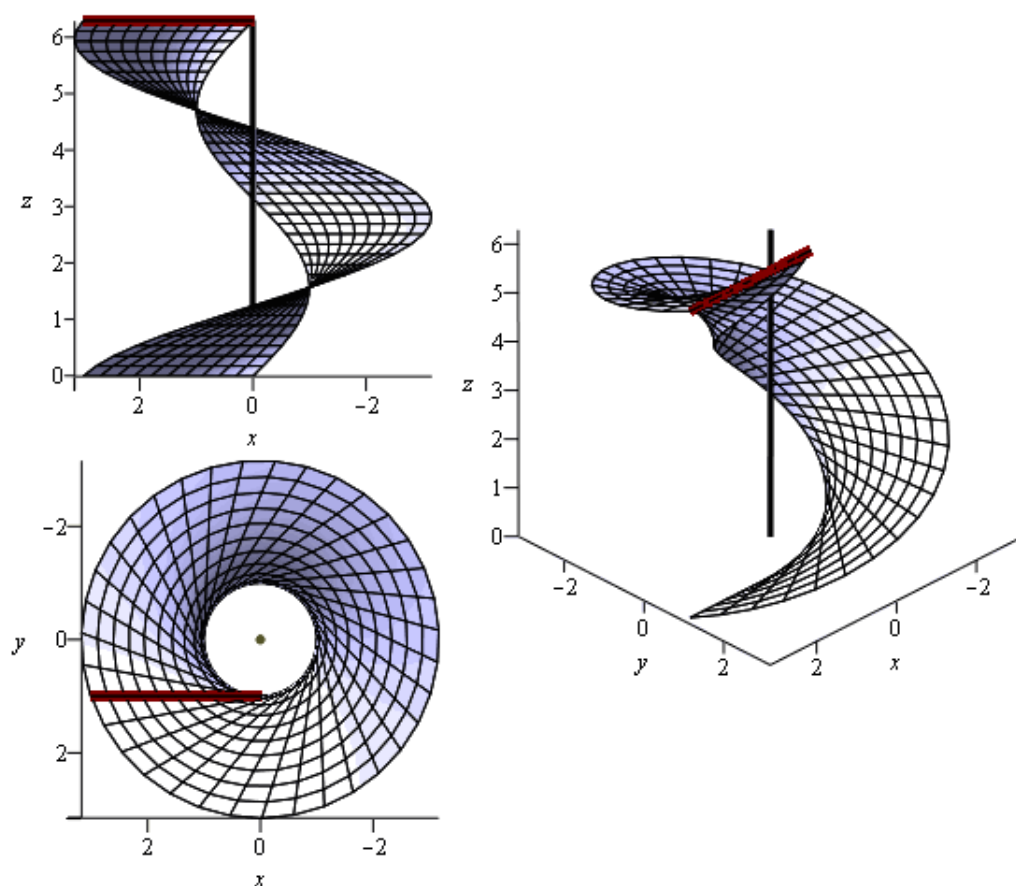
Otevřená pravoúhlá šroubová plocha je generována šroubovým pohybem tvořící přímky mimoběžné s osou šroubového pohybu, přičemž tvořící přímka je kolmá na osu šroubového pohybu. Tvořící přímka je v tomto případě čelním řezem šroubové plochy.

Uvažujme parametr šroubového pohybu v_0 a tvořící přímku určenou bodem $\mathbf{A} = (0, y_{\mathbf{A}}, 0, 1)$ a směrovým vektorem $\mathbf{a} = (a_1, 0, 0, 0)$, tj. přímka leží v rovině (x, y) a je rovnoběžná s osou x . Její analytická reprezentace je

$$\mathbf{P}(v) = (a_1 v, y_{\mathbf{A}}, 0, 1), \quad v \in \mathbb{R}.$$

Analytická reprezentace otevřené pravoúhlé šroubové plochy je potom

$$\mathbf{S}(u, v) = (v \cos u - y_{\mathbf{A}} \sin u, v \sin u + y_{\mathbf{A}} \cos u, v_0 u, 1), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in \mathbb{R}.$$



Obrázek 6.4: Otevřená pravoúhlá šroubová plocha (animace)

Příklad: Uvažujme parametr šroubového pohybu $v_0 = 1$ a tvořící úsečku určenou bodem $\mathbf{A} = (0, 1, 0, 1)$ a směrovým vektorem $\mathbf{a} = (1, 0, 0, 0)$ s analytickou reprezentací

$$\mathbf{P}(v) = (v, 1, 0, 1), \quad v \in [0, 3].$$

Potom je analytická reprezentace šroubové plochy

$$\mathbf{S}(u, v) = (v \cos u - \sin u, v \sin u + \cos u, u, 1), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 3]$$

Na obr. 6.4 je tato plocha zobrazena v nárýsu, půdorysu a axonometrickém pohledu.

Analytickou reprezentaci hlavního meridiánu v parametrickém prostoru plochy $\mathbf{S}(u, v)$ získáme řešením rovnice

$$v \sin u + \cos u = 0.$$

Tato rovnice má řešení

$$v = v, \quad u = -\arctan \frac{1}{v}.$$

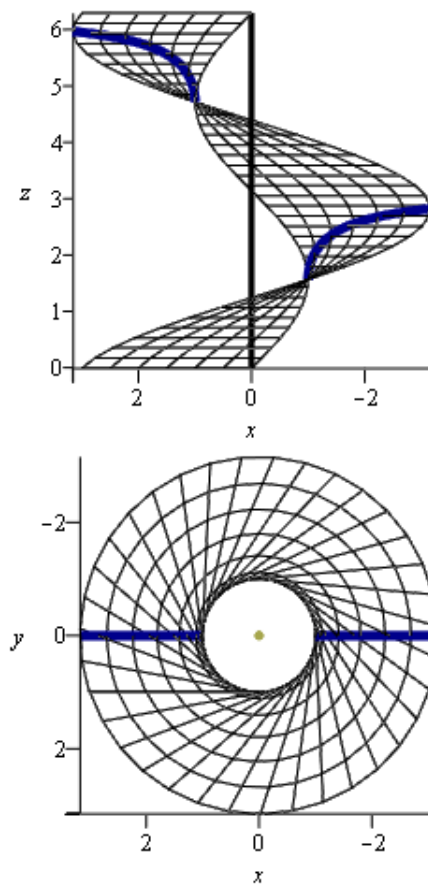
Dosadíme-li toto řešení do analytické reprezentace šroubové plochy, dostáváme analytickou reprezentaci pravého a levého hlavního meridiánu v homogenních souřadnicích prostoru E_∞^3

$$\mathbf{M}_R(v) = (\sqrt{1+v^2}, 0, -\arctan(\frac{1}{v}) + 2\pi, 1), \quad v \in [0, 3],$$

a

$$\mathbf{M}_L(v) = (-\sqrt{1+v^2}, 0, -\arctan(\frac{1}{v}) + \pi, 1), \quad v \in [0, 3].$$

Na obr. 6.5 je modrou barvou zobrazen hlavní meridián v nárýsu a půdorysu.



Obrázek 6.5: Hlavní meridián otevřené pravouhlé šroubové plochy

6.1.4 Otevřená kosoúhlá šroubová plocha

Otevřená kosoúhlá šroubová plocha je generována šroubovým pohybem tvořící přímky mimoběžné s osou šroubového pohybu, přičemž tvořící přímka není kolmá na osu šroubového pohybu ani s ní není rovnoběžná. Tvořící přímka není ani meridiánem ani čelním řezem šroubové plochy.

Uvažujme parametr šroubového pohybu v_0 a tvořící přímku určenou bodem $\mathbf{A} = (0, y_{\mathbf{A}}, 0, 1)$, $y_{\mathbf{A}} \neq 0$ a směrovým vektorem $\mathbf{a} = (a_1, 0, a_3, 0)$, $a_1, a_3 \neq 0$ s analytickou reprezentací

$$\mathbf{P}(v) = (a_1 v, y_{\mathbf{A}}, a_3 v, 1), \quad v \in \mathbb{R}.$$

Analytická reprezentace otevřené kosoúhlé šroubové plochy je potom

$$\mathbf{S}(u, v) = (v a_1 \cos u - y_{\mathbf{A}} \sin u, v a_1 \sin u + y_{\mathbf{A}} \cos u, a_3 v + v_0 u, 1), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in \mathbb{R}.$$

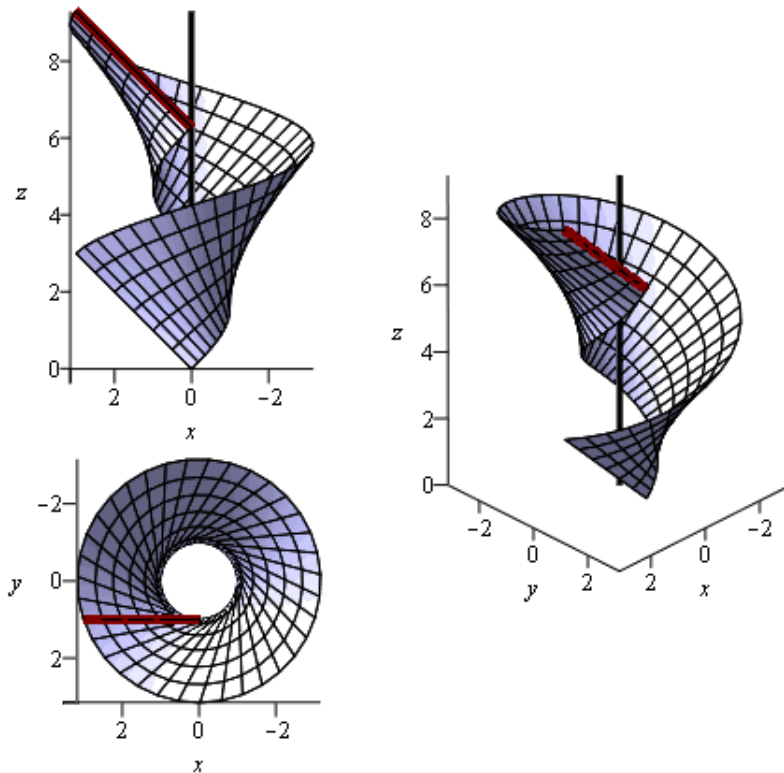
Příklad: Uvažujme parametr šroubového pohybu $v_0 = 1$ a tvořící úsečku určenou bodem $\mathbf{A} = (0, 1, 0, 1)$ a směrovým vektorem $\mathbf{a} = (1, 0, 1, 0)$ s analytickou reprezentací

$$\mathbf{P}(v) = (v, 1, v, 1), \quad v \in [0, 3].$$

Potom je analytická reprezentace šroubové plochy

$$\mathbf{S}(u, v) = (v \cos u - \sin u, v \sin u + \cos u, v + u, 1), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 3].$$

Na obr. 6.6 je tato plocha zobrazena v nárysu, půdorysu a axonometrickém pohledu.



Obrázek 6.6: Otevřená kosoúhlá šroubová plocha ([animace](#))

Analytickou reprezentaci hlavního meridiánu v parametrickém prostoru plochy $\mathbf{S}(u, v)$ získáme řešením rovnice

$$v \sin u + \cos u = 0,$$

což je

$$v = v, \quad u = -\arctan \frac{1}{v}.$$

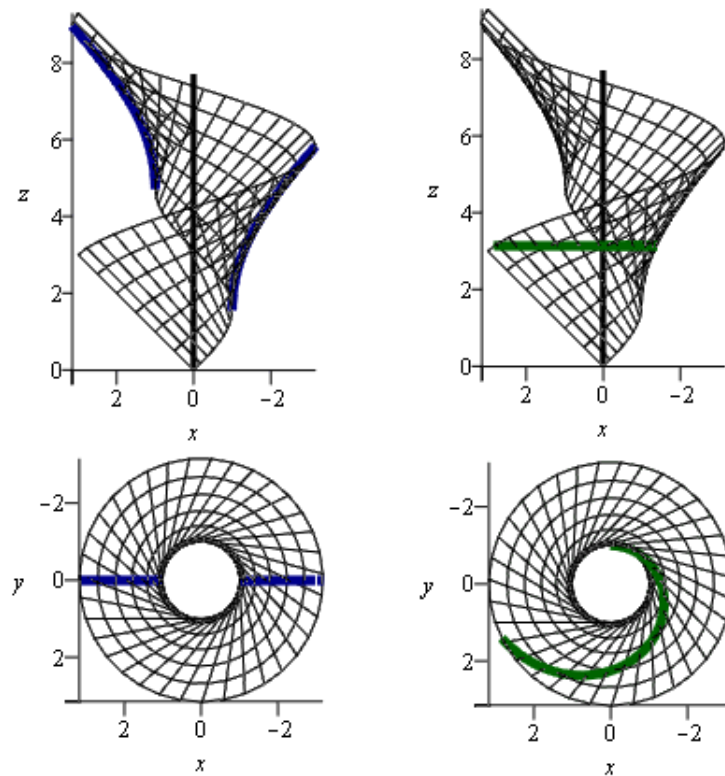
Po dosazení do analytické reprezentace šroubové plochy dostaneme analytickou reprezentaci pravého a levého hlavního polomeridiánu v homogenních souřadnicích prostoru E_∞^3

$$\mathbf{M}_R(v) = (\sqrt{1+v^2}, 0, v - \arctan \frac{1}{v} + 2\pi, 1), \quad v \in [0, 3],$$

a

$$\mathbf{M}_L(v) = (-\sqrt{1+v^2}, 0, v - \arctan \frac{1}{v} + \pi, 1), \quad v \in [0, 3].$$

Na obr. 6.7 vlevo je modrou barvou zobrazen hlavní meridián otevřené kosoúhlé šroubové plochy v nárýsu a půdorysu.



Obrázek 6.7: Hlavní meridián (vlevo) a čelní řez (vpravo) otevřené kosoúhlé šroubové plochy

Analytickou reprezentaci čelního řezu rovinou $z = \pi$ v parametrickém prostoru šroubové plochy dostaneme řešením rovnice

$$v + u = \pi,$$

což je např.

$$v = v, \quad u = -v + \pi.$$

Po dosazení do analytické reprezentace šroubové plochy dostaneme analytickou reprezentaci čelního řezu v homogenních souřadnicích prostoru E_{∞}^3

$$\mathbf{N}(v) = (v \cos(-v + \pi) - \sin(-v + \pi), v \sin(-v + \pi) + \cos(-v + \pi), \pi, 1), \quad v \in [0, 3].$$

Na obr. 6.7 vpravo je zelenou barvou zobrazen čelní řez otevřené kosoúhlé šroubové plochy v nárýsu a půdorysu.

6.2 Cyklické šroubové plochy

Cyklické šroubové plochy jsou generovány šroubovým pohybem kružnice nebo její části. Podle polohy kružnice rozeznáváme *osovou cyklickou šroubovou plochu*, kdy tvořící kružnice leží v rovině osy šroubového pohybu (též zvaná plocha Sv. Jiljí), *vinutý sloupek*, kdy tvořící kružnice leží v rovině kolmé na osu šroubového pohybu a *Archimédovu serpentinu*, kdy tvořící kružnice leží v rovině kolmé na trajektorii pohybu, tj. na tečnu šroubovice středu tvořící kružnice. Šroubová plocha generovaná kružnicí v obecné poloze nemá žádné zvláštní označení.

6.2.1 Osová cyklická šroubová plocha

Osová cyklická šroubová plocha je generována šroubovým pohybem tvořící kružnice o poloměru R v počáteční poloze se středem v počátku ležící v rovině (x, z) s analytickou reprezentací

$$\mathbf{P}(v) = (R \cos v, 0, R \sin v, 1) \quad v \in [0, 2\pi].$$

Její šroubovým pohybem podél šroubovice

$$\mathbf{T}(u) = (r \cos u, r \sin u, v_0 u, 1), \quad u \in [0, 2\pi]$$

je generována osová cyklická šroubová plocha

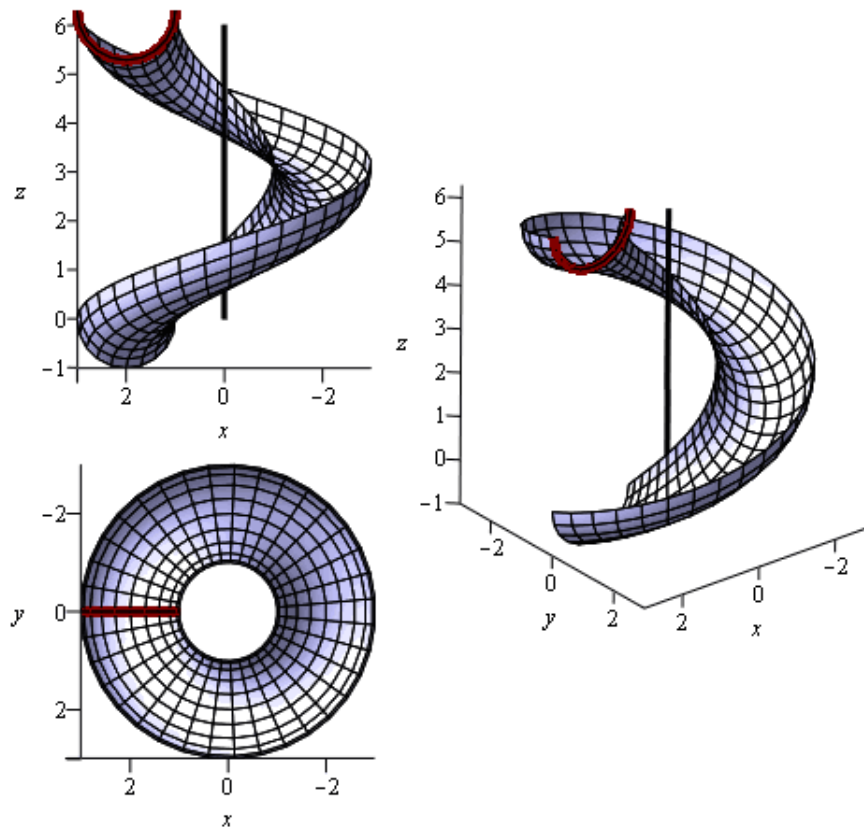
$$\begin{aligned} \mathbf{S}(u, v) &= \mathbf{P}(v) \cdot \mathbf{G}(u) = (R \cos v, 0, R \sin v, 1) \cdot \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ r \cos u & r \sin u & v_0 u & 1 \end{pmatrix} = \\ &= (\cos u(R \cos v + r), \sin u(R \cos v + r), R \sin v + v_0 u, 1), \\ &u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Příklad Uvažujme parametr šroubového pohybu v_0 , poloměr otáčení při šroubovém pohybu $r = 2$ a tvořící půlkružnici v počáteční poloze

$$\mathbf{P}(v) = (\cos v, 0, \sin v, 1), \quad v \in [\pi, 2\pi].$$

Osová cyklická šroubová plocha má potom analytickou reprezentaci

$$\mathbf{S}(u, v) = (\cos u(\cos v + 2), \sin u(\cos v + 2), \sin v + u, 1), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [\pi, 2\pi].$$



Obrázek 6.8: Osová cyklická šroubová plocha (animace)

Na obr. 6.8 je tato plocha zobrazena v nárýsu, půdorysu a axonometrickém pohledu.

Snadno nahlédneme, že hlavním meridiánem šroubové plochy je právě tvořící polokružnice v rovině $y = 0$.

Analytickou reprezentaci čelního řezu např. rovinou $z = \pi$ v parametrickém prostoru šroubové plochy dostaneme řešením rovnice

$$\sin v + u = \pi,$$

což je např.

$$v = v, \quad u = -\sin v + \pi.$$

Po dosazení do analytické reprezentace šroubové plochy dostaneme analytickou reprezentaci čelního řezu v homogenních souřadnicích prostoru E_{∞}^3

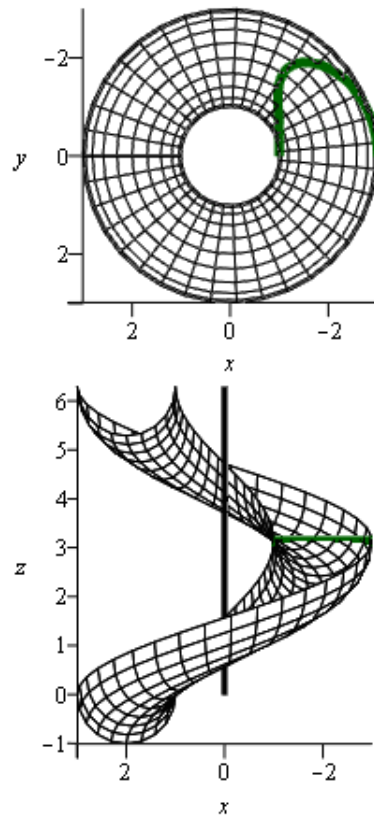
$$\mathbf{N}(v) = (\cos(-\sin v + \pi)(\cos v + 2), \sin(-\sin v + \pi) \cos v + 2, \pi, 1), \quad v \in [\pi, 2\pi].$$

Na obr. 6.9 je zelenou barvou zobrazen čelní řez osové cyklické šroubové plochy v nárýsu a půdorysu.

6.2.2 Vinutý sloupek

Vinutý sloupek je plocha generovaná šroubovým pohybem tvořící kružnice o poloměru R v počáteční poloze se středem v počátku ležící v rovině (x, y) s analytickou reprezentací

$$\mathbf{P}(v) = (R \cos v, R \sin v, 0, 1), \quad v \in [0, 2\pi].$$



Obrázek 6.9: Čelní řez osové cyklické šroubové plochy rovinou $z = \pi$

Jejím šroubovým pohybem podél šroubovice

$$\mathbf{T}(u) = (r \cos u, r \sin u, v_0 u, 1), \quad u \in [0, 2\pi]$$

je generován vnutý sloupek

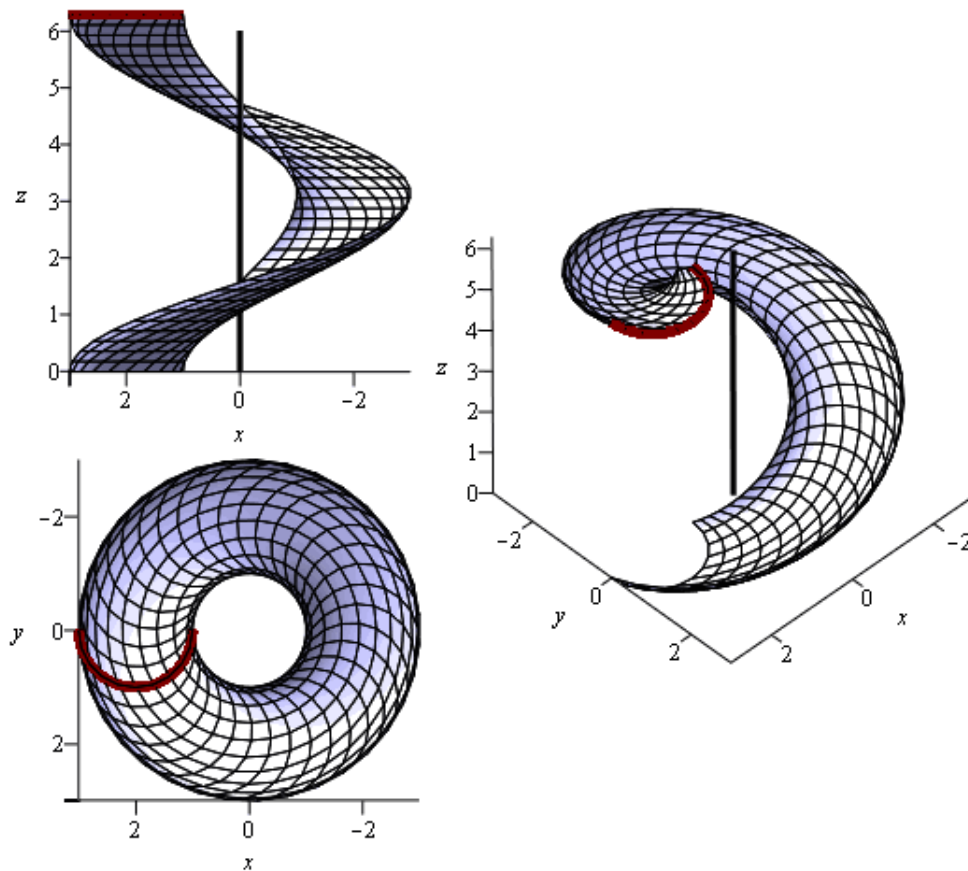
$$\begin{aligned} \mathbf{S}(u, v) &= \mathbf{P}(v) \cdot \mathbf{G}(u) = (R \cos v, R \sin v, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 & 0 \\ -\sin u & \cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ r \cos u & r \sin u & v_0 u & 1 \end{pmatrix} = \\ &= (R \cos v \cos u - R \sin v \sin u + r \cos u, R \cos v \sin u + R \sin v \cos u + r \sin u, v_0 u, 1), \\ & \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Příklad: Uvažujme parametr šroubového pohybu $v_0 = 1$, poloměr otáčení při šroubovém pohybu $r = 2$ a tvořící půlkružnici v počáteční poloze

$$\mathbf{P}(v) = (\cos v, \sin v, 0, 1), \quad v \in [\pi, 2\pi].$$

Vnutý sloupek má potom analytickou reprezentaci

$$\mathbf{S}(u, v) = (\cos v \cos u - \sin v \sin u + 2 \cos u, \cos v \sin u + \sin v \cos u + 2 \sin u, u, 1), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [\pi, 2\pi].$$



Obrázek 6.10: Vnutý sloupek (animace)

Na obr. 6.10 je tato plocha zobrazena v narysu, půdorysu a axonometrickém pohledu.

Analytickou reprezentaci hlavního meridiánu v parametrickém prostoru šroubové plochy dostaneme řešením rovnice

$$\cos v \sin u + \sin v \cos u + 2 \sin u = 0,$$

což je např.

$$v = v, \quad u = \arctan\left(\frac{\sin v \cos v - 2 \sin v}{(\sin v)^2 + 3}\right).$$

Po dosazení do analytické reprezentace šroubové plochy dostaneme analytickou reprezentaci hlavního pravého a levého polomeridiánu v homogenních souřadnicích prostoru E_∞^3

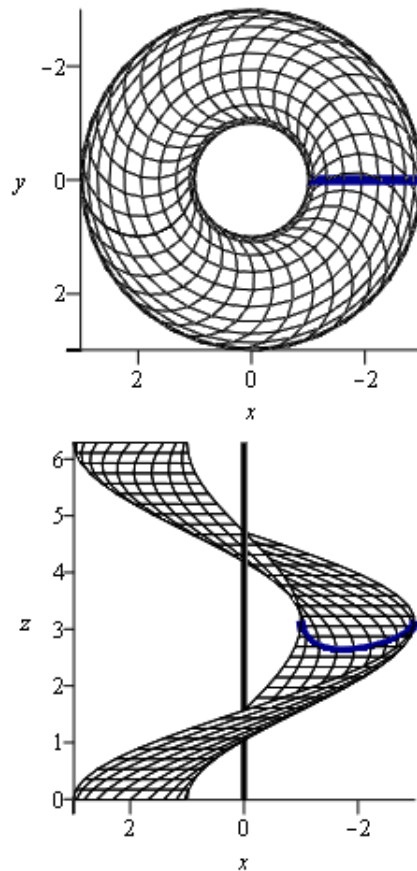
$$\mathbf{M}_R(v) = (-\sqrt{4 \cos v + 5}, 0, -\arctan\left(\frac{\sin v}{\cos v + 2}\right) + \pi, 1), \quad v \in [\pi, 2\pi],$$

a

$$\mathbf{M}_L(v) = (\sqrt{4 \cos v + 5}, 0, -\arctan\left(\frac{\sin v}{\cos v + 2}\right), 1), \quad v \in [\pi, 2\pi].$$

Na obr. 6.11 je modrou barvou zobrazen pravý hlavní polomeridián vnutého sloupku v narysu a půdorysu.

Snadno nahlédneme, že čelním řezem této šroubové plochy je právě tvořící polokružnice v rovině $z = z_{\text{alpha}}$.



Obrázek 6.11: Pravý hlavní polomeridián vinutého sloupku

6.2.3 Archimédova serpentina

Archimédova serpentina je šroubová plocha generovaná šroubovým pohybem kružnice o poloměru R ležící v normálové rovině šroubovice

$$\mathbf{T}(v) = (r \cos u, r \sin u, v_0 u, 1), \quad u \in [0, 2\pi]$$

středu pohybující se kružnice. V počáteční poloze je střed tvořící kružnice v počátku a kružnice leží v rovině (x, z)

$$\mathbf{P}(v) = (R \cos v, 0, R \sin v, 1), \quad v \in [0, 2\pi].$$

Transformační matice pro vytvoření Archimédovy serpentiny je transformační matice šroubového pohybu, viz sekce 1.4.2. Archimédova serpentina má následující analytickou reprezentaci

$$\mathbf{S}(u, v) = \mathbf{P}(v) \cdot \mathbf{G}(u) = (R \cos v, 0, R \sin v, 1) \cdot \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & 0 & 0 \\ -\frac{r \sin u}{\sqrt{r^2+v_0^2}} & \frac{r \cos u}{\sqrt{r^2+v_0^2}} & \frac{v_0}{\sqrt{r^2+v_0^2}} & 0 \\ \frac{v_0 \sin u}{\sqrt{r^2+v_0^2}} & -\frac{v_0 \cos u}{\sqrt{r^2+v_0^2}} & \frac{r}{\sqrt{r^2+v_0^2}} & 0 \\ r \cos u & r \sin u & v_0 u & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} R \cos v \cos u + \frac{Rv_0}{\sqrt{r^2-v_0^2}} \sin v \sin u + R \cos u \\ R \cos v \sin u - \frac{Rv_0}{\sqrt{r^2-v_0^2}} \sin v \cos u + R \sin u \\ \frac{Rr}{\sqrt{r^2-v_0^2}} \sin v + v_0 u \\ 1 \end{pmatrix}^T, \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [v_1, v_2].$$

Příklad: Uvažujme tvořící půlkružnici

$$\mathbf{P}(v) = (\cos v, 0, \sin v, 1), \quad v \in [\pi, 2\pi]$$

a šroubovici středu tvořící kružnice

$$\mathbf{T}(v) = (2 \cos u, 2 \sin u, u, 1), \quad u \in [0, 2\pi].$$

Archimédova serpentina má potom analytickou reprezentaci

$$\mathbf{S}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos v \cos u + \frac{\sqrt{5}}{5} \sin v \sin u + 2 \cos u \\ \cos v \sin u - \frac{\sqrt{5}}{5} \sin v \cos u + 2 \sin u \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \sin v + u \\ 1 \end{pmatrix}^T, \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [v_1, v_2].$$

Na obr. 6.12 je tato plocha zobrazena v nárysu, půdorysu a axonometrickém pohledu.

Analytickou reprezentaci hlavního meridiánu v parametrickém prostoru šroubové plochy dostaneme řešením rovnice

$$\cos v \sin u - \frac{\sqrt{5}}{5} \sin v \cos u + 2 \sin u = 0,$$

což je např.

$$v = v, \quad u = \arctan\left(\frac{\sqrt{5} \sin v (\cos v - 2)}{5(\sin v)^2 + 3}\right).$$

Po dosazení do analytické reprezentace šroubové plochy dostaneme analytickou reprezentaci hlavního pravého a levého polomeridiánu v homogenních souřadnicích prostoru E_∞^3

$$\mathbf{M}_R(v) = \left(-\frac{\sqrt{5}\sqrt{4(\cos v)^2+20\cos v+21}}{5}, 0, \frac{2\sqrt{5}\sin v}{5} + \arctan\left(\frac{\sqrt{5}\sin v}{5(\cos v+2)}\right) + \pi, 1\right), \quad v \in [\pi, 2\pi],$$

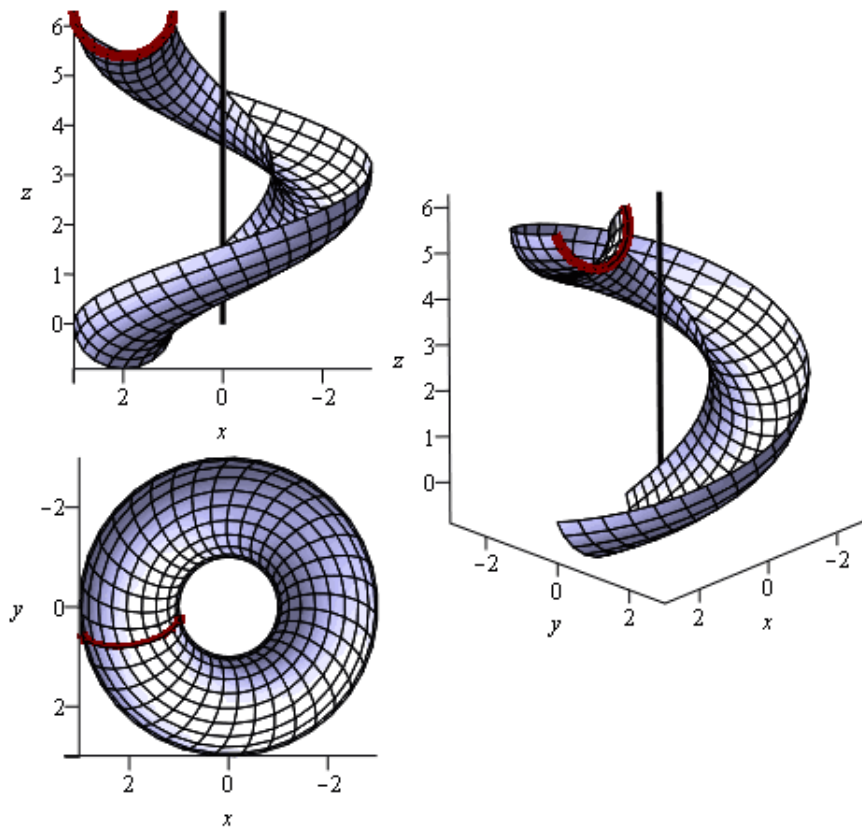
a

$$\mathbf{M}_L(v) = \left(\frac{\sqrt{5}\sqrt{4(\cos v)^2+20\cos v+21}}{5}, 0, \frac{2\sqrt{5}\sin v}{5} + \arctan\left(\frac{\sqrt{5}\sin v}{5(\cos v+2)}\right), 1\right), \quad v \in [\pi, 2\pi].$$

Na obr. 6.13 vlevo je modrou barvou zobrazen pravý hlavní polomeridián Archimédovy serpentiny v nárysu a půdorysu.

Analytickou reprezentaci čelního řezu rovinou např. $z = \pi$ v parametrickém prostoru šroubové plochy dostaneme řešením rovnice

$$\frac{2\sqrt{5}}{5} \sin v + u = \pi,$$



Obrázek 6.12: Vintutý sloupek (animace)

což je např.

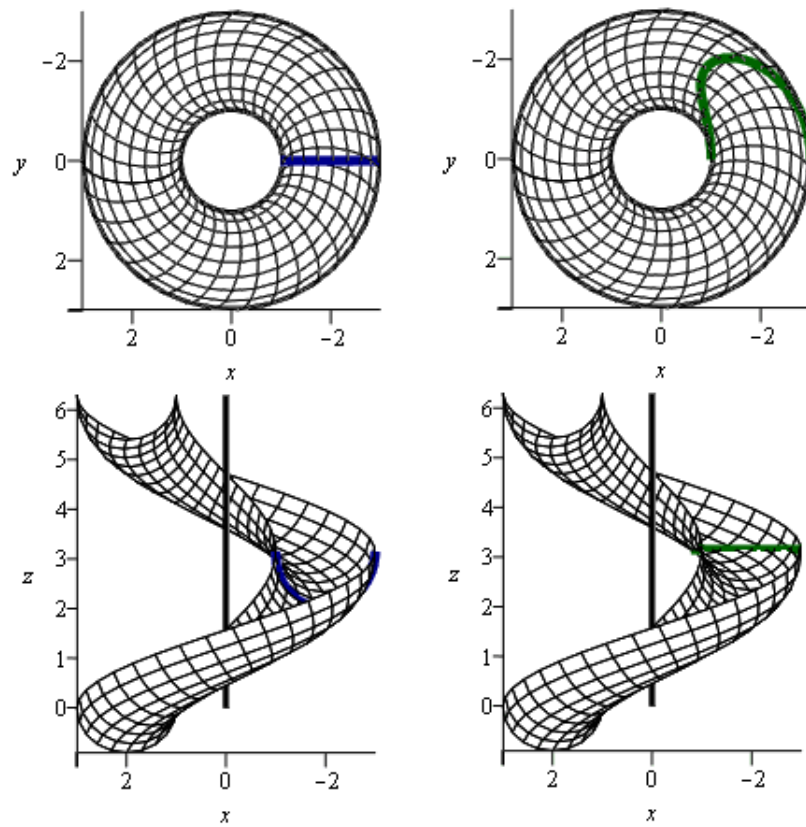
$$v = v, \quad u = -\frac{2\sqrt{5}\sin v}{5} + \pi).$$

Po dosazení do analytické reprezentace šroubové plochy dostaneme analytickou reprezentaci čelního řezu v homogenních souřadnicích prostoru E_{∞}^3

$$\mathbf{N}(v) = \begin{pmatrix} -\cos v \cos\left(\frac{2\sqrt{5}\sin v}{5}\right) + \frac{\sqrt{5}}{5} \sin v \sin\left(\frac{2\sqrt{5}\sin v}{5}\right) - 2 \cos\left(\frac{2\sqrt{5}\sin v}{5}\right) \\ -\cos v \cos\left(\frac{2\sqrt{5}\sin v}{5}\right) + \frac{\sqrt{5}}{5} \sin v \cos\left(\frac{2\sqrt{5}\sin v}{5}\right) - 2 \sin\left(\frac{2\sqrt{5}\sin v}{5}\right) \\ \pi \\ 1 \end{pmatrix}^T, \quad v \in [\pi, 2\pi].$$

Na obr. 6.13 vpravo je zelenou barvou zobrazen čelní řez Archimédovy serpenty v nárysu a půdorysu.

Se šroubovými plochami se v praktických strojírenských aplikacích setkáváme velmi často. Uveďme např. šroubovitě pružiny (Archimédovy serpenty) se zabroušenými závěrnými závitěmi na obr. 6.14. Rovina zabroušení závěrných závitů odpovídá rovině čelního řezu Archimédovy serpenty.



Obrázek 6.13: Pravý hlavní polomeridián (vlevo) a čelní řez rovinou $z = \pi$ Archimédovy serpentýny



Obrázek 6.14: Tlačné šroubovitě válcové pružiny

Kapitola 7

Obalové plochy

Obalová plocha je útvar, který vznikne pohybem tvořící plochy. Necht'

$$\mathbf{S}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v), 1), \quad u \in [u_1, u_2], \quad v \in [v_1, v_2],$$

je analytická reprezentace tvořící plochy v homogenních souřadnicích prostoru E_∞^3 a transformační matice

$$\mathbb{G}(t) = \begin{pmatrix} \xi_x(t) & \xi_y(t) & \xi_z(t) & 0 \\ \eta_x(t) & \eta_y(t) & \eta_z(t) & 0 \\ \zeta_x(t) & \zeta_y(t) & \zeta_z(t) & 0 \\ x_\Omega(t) & y_\Omega(t) & z_\Omega(t) & 1 \end{pmatrix},$$

je analytickou reprezentací pohybu po trajektorii

$$\mathbf{T}(t) = (x(t), y(t), z(t), 1), \quad t \in [t_1, t_2].$$

Potom tímto pohybem vznikne těleso

$$\mathbf{B}(u, v, t) = (x(u, v, t), y(u, v, t), z(u, v, t), 1), \quad u \in [u_1, u_2], \quad v \in [v_1, v_2], \quad t \in [t_1, t_2],$$

jehož část povrchu

$$\mathbf{E}(s, t), \quad s \in [s_1, s_2], \quad t \in [t_1, t_2],$$

nazveme *obalovou plochou*, jestliže platí:

- Obalová plocha a každá parametrická uv -plocha tělesa se dotýkají podél parametrické s -křivky obalové plochy. Tuto křivku nazýváme *charakteristika obalové plochy*.
- V každém bodě obalové plochy existuje společná tečná rovina a normála obalové plochy a jediné parametrické uv -plochy tělesa.
- Neexistuje plocha, která by byla současně částí obalové plochy a některé parametrické uv -plochy tělesa.

Hledání analytické reprezentace obalové plochy při zcela obecných podmínkách představuje značně komplikovanou úlohu [15]. Zde se omezíme na obalové plochy, jejichž analytická reprezentace je předem známá. Budou to obalové plochy generované pohybem roviny a kulové plochy.

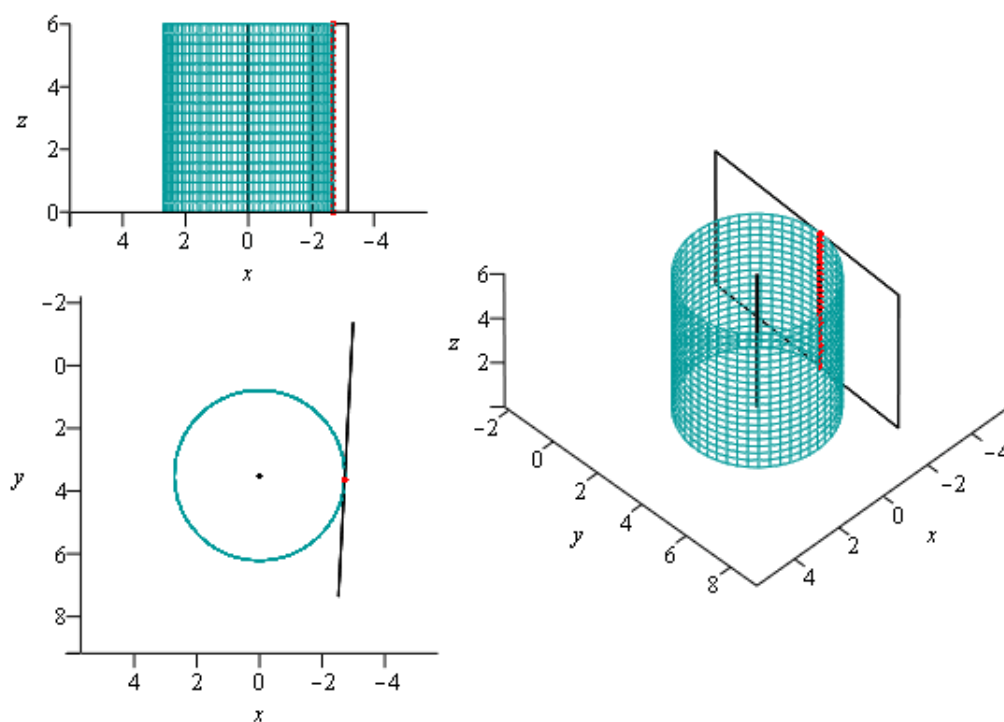
7.1 Obalové plochy generované pohybem roviny

Obalové plochy generované pohybem roviny mají v technické praxi značný význam při vyšetřování kolizí pohybujících se objektů, kdy pohybující objekt nahrazujeme jeho konvexním obalem – mnohostěnem tvořeným částmi roviny. Zde budeme uvažovat rotační a šroubový pohyb roviny.

7.1.1 Obalová plocha generovaná rotací roviny

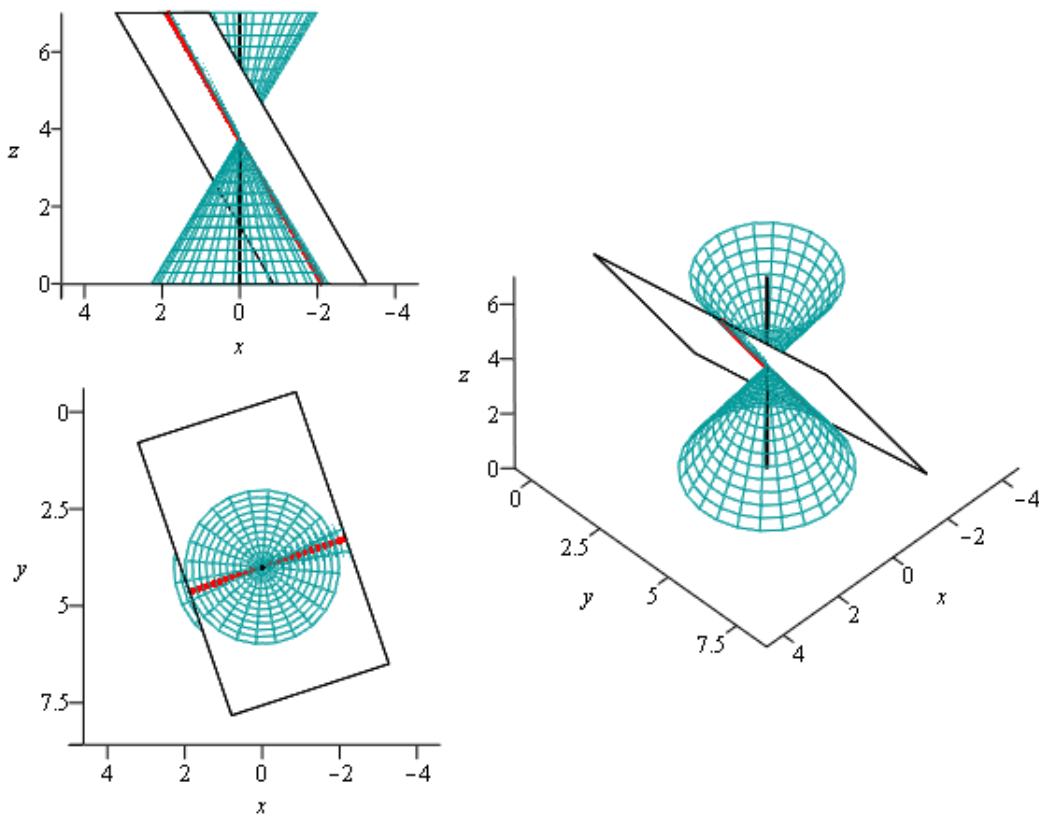
Tvořící rovina může být rovnoběžná s osou rotace nebo s ní může být různoběžná. Neuvažujeme případy, kdy osa rotace náleží tvořící rovině (obalová plocha se redukuje na osu rotace) ani tvořící rovinu kolmou k ose rotace (obalová plocha je totožná s tvořící rovinou).

V případě, že tvořící rovina je rovnoběžná s osou rotace, je obalovou plochou rotační válcová plocha (obr. 7.1), s jejíž analytickou reprezentací jsme se seznámili v kap. chapter 5. Charakteristika této obalové plochy je dotyková přímka – meridián rotační válcové plochy.



Obrázek 7.1: Rotační válcová plocha generovaná rotací roviny rovnoběžné s osou rotace (animace)

Je-li tvořící rovina různoběžná s osou rotace, je obalovou plochou rotační kuželová plocha (obr. 7.2), s jejíž analytickou reprezentací jsme se seznámili v kap. 5. Charakteristika této obalové plochy je dotyková přímka – meridián rotační kuželové plochy.



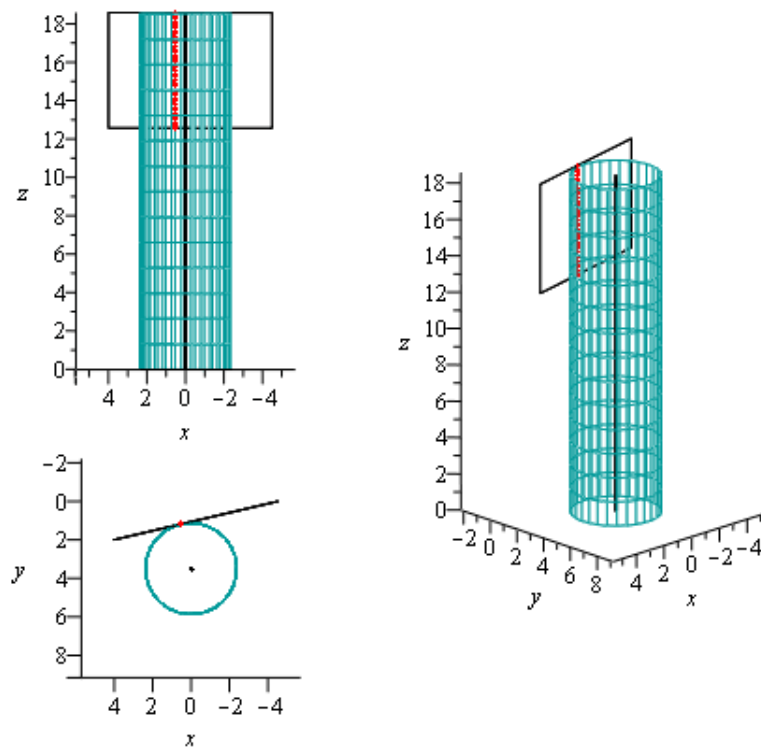
Obrázek 7.2: Rotační kuželová plocha generovaná rotací roviny různoběžné s osou rotace ([animace](#))

7.1.2 Obalová plocha generovaná šroubovým pohybem roviny

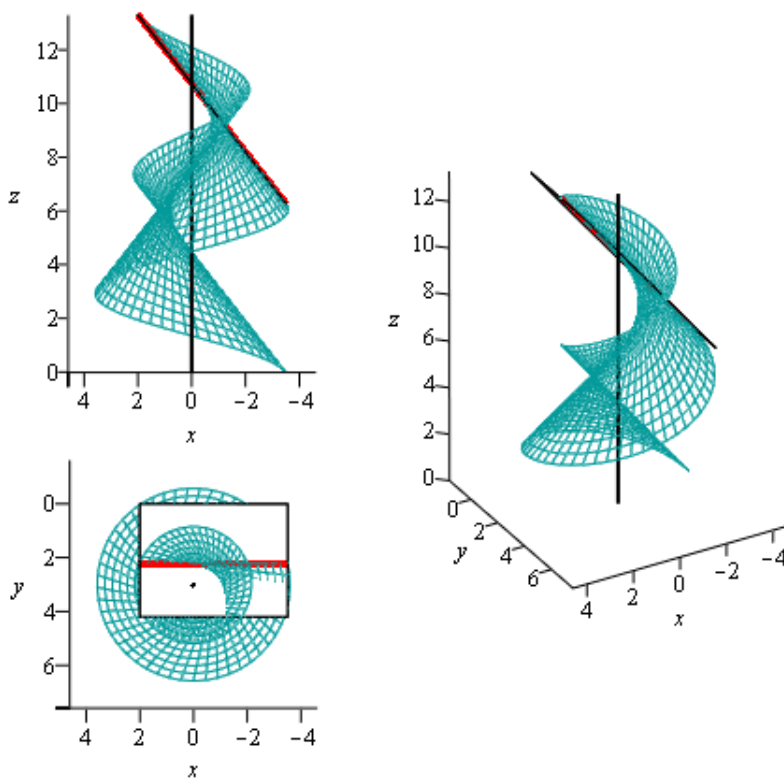
Tvořící rovina může být opět rovnoběžná s osou šroubového pohybu nebo s ní může být různoběžná. Neuvažujeme případy, kdy osa šroubového pohybu náleží tvořící rovině (obalová plocha se redukuje na osu šroubového pohybu) ani tvořící rovinu kolmou k ose rotace (obalová plocha nevzniká).

V případě, že tvořící rovina je rovnoběžná s osou šroubového pohybu, je obalovou plochou rotační válcová plocha (obr. 7.3), s jejíž analytickou reprezentací jsme se seznámili v kapitole Rotační plochy. Charakteristika obalové plochy je dotyková přímka - meridián rotační válcové plochy.

V případě, že je tvořící rovina různoběžná s osou šroubového pohybu, je obalovou plochou plocha tečen šroubovice, což je otevřená kosoúhlá šroubová plocha (obr. 7.4), s jejíž analytickou reprezentací jsme se seznámili v kap. 6. Charakteristika obalové plochy je tečna šroubovice – tvořící přímka otevřené kosoúhlé šroubové plochy.



Obrázek 7.3: Rotační válcová plocha generovaná šroubovým pohybem roviny rovnoběžné s osou šroubového pohybu (animace)



Obrázek 7.4: Plocha tečen šroubovice generovaná šroubovým pohybem roviny různoběžné s osou šroubového pohybu (animace)

7.2 Obalové plochy generované pohybem kulové plochy

Obalové plochy generované pohybem kulové plochy mají široké uplatnění při praktických aplikacích, neboť obrobená plocha, která vzniká při CNC (Computer Numerical Control) frézování kulovou frézou je z geometrického hlediska množina obalových ploch generovaných obecným pohybem kulové plochy. Příklad obrábění je uveden na obr. 7.5 (převzato z [16]).



Obrázek 7.5: CNC frézování kulovou frézou

V této části se zaměříme na obalové plochy generované přímočarým, rotačním a šroubovým pohybem kulové plochy.

7.2.1 Obalová plocha generovaná přímočarým pohybem kulové plochy

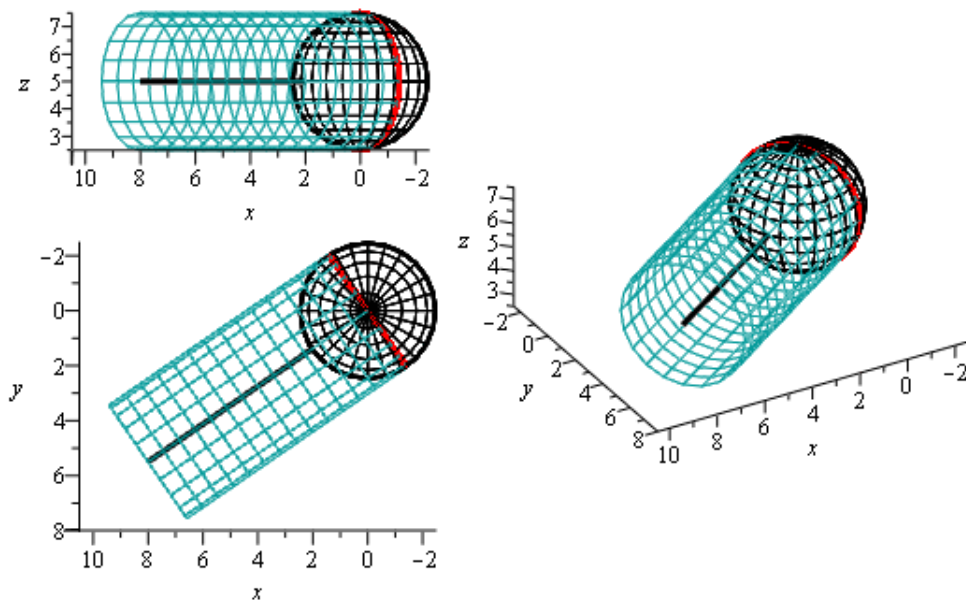
Přímočarým pohybem kulové plochy je generována rotační válcová plocha (obr. 6) s osou rotace totožnou s trajektorií (přímkou) středu kulové plochy. S analytickou reprezentací rotační válcové plochy jsme se setkali v kap. 5. Charakteristika je v tomto případě hlavní kružnice kulové plochy ležící v rovině kolmé trajektorii středu kulové plochy.

7.2.2 Obalová plocha generovaná rotačním pohybem kulové plochy

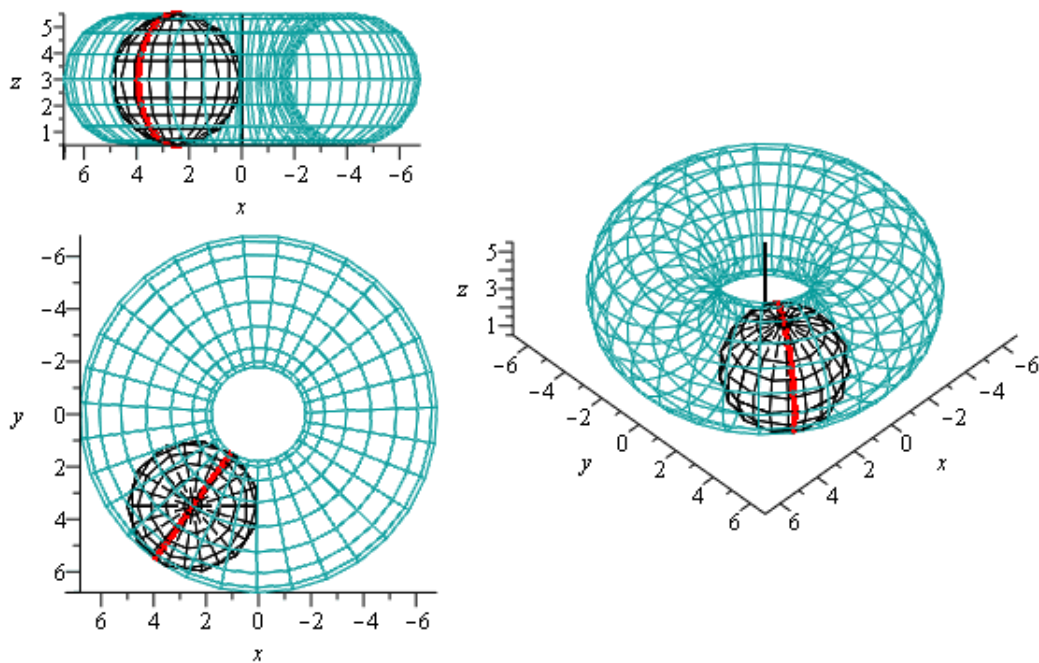
Rotačním pohybem kulové plochy vznikne anuloid (obr. 7.7), jehož charakteristika je hlavní kružnice kulové plochy ležící v rovině kolmé na trajektorii (kružnici) středu kulové plochy. S analytickou reprezentací anuloidu jsme se setkali v kap. 5.

7.2.3 Obalová plocha generovaná šroubovým pohybem kulové plochy

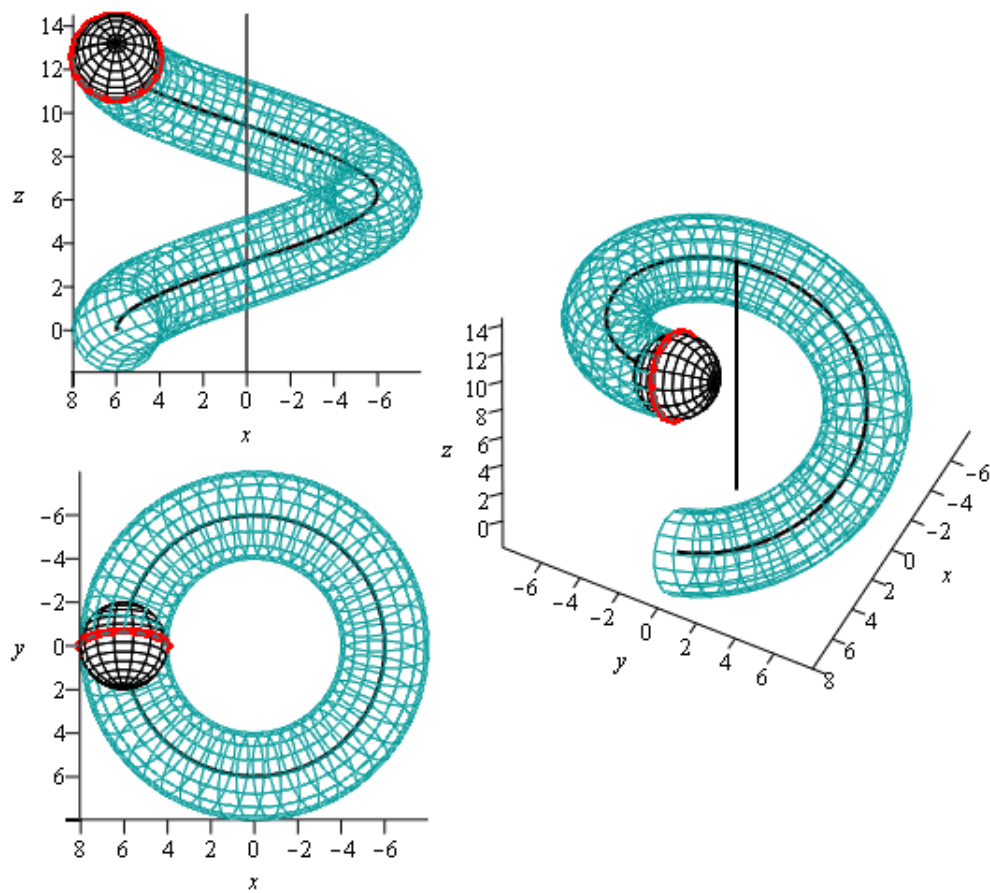
Šroubovým pohybem kulové plochy vznikne Archimédova serpentýna (obr. 7.8), jejíž charakteristika je hlavní kružnice ležící v normálové rovině trajektorie (šroubovice) středu kulové plochy. S analytickou reprezentací Archimédovy serpentýny jsme se seznámili v kap. 6.



Obrázek 7.6: Rotační válcová plocha generovaná přímočarým pohybem kulové plochy ([animace](#))



Obrázek 7.7: Anuloid generovaný rotačním pohybem kulové plochy ([animace](#))



Obrázek 7.8: Archimédova serpentýna generovaná šroubovým pohybem kulové plochy ([animace](#))

Kapitola 8

Rozvinutelné plochy a rozvinutelné přechodové plochy

Rozvinutí je zobrazení části plochy na část jiné plochy, které zachovává délky oblouků a úhly křivek na ploše (úhel dvou křivek je definován jako úhel jejich tečen). Zde budeme uvažovat pouze plochy rozvinutelné do roviny, které mají velké uplatnění při konstrukci vzduchotechnického potrubí, přechodových dílů, apod. (obr. 8.1). Při praktické aplikaci znamená zachování délky oblouků a úhlů křivek skutečnost, že při rozvinutí nesmí dojít k žádnému pomačkání ani natržení plochy, která má být rozvinuta. Naopak, máme-li rovinný rozvinutý tvar vystřižený např. z plechu, je možné z něj bez jakéhokoliv pomačkání nebo natržení složit požadovanou plochu.

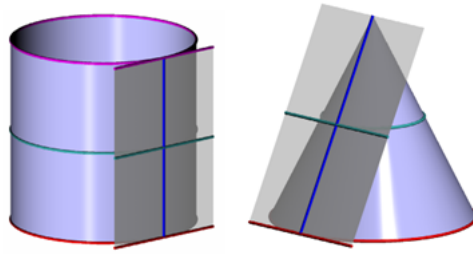


Obrázek 8.1: Ukázky aplikace rozvinutelných a přechodových ploch

Lze dokázat, že plochy rozvinutelné do roviny jsou pouze *přímkové plochy*, které vznikají jako obalové plochy při pohybu roviny. Konkrétně jsou to kuželové plochy, válcové plochy a plochy tečen prostorových křivek.

Přímkovou plochu lze považovat za jednoparametrickou množinu přímek. Tyto přímky nazveme *površkami*. Přímková plocha se označuje jako *rozvinutelná* právě tehdy, jestliže má podél každé površky právě jedinou tečnou rovinu. V opačném případě, kdy má přímková plocha podél každé površky nekonečně mnoho tečných rovin, se označuje jako *zborcená*.

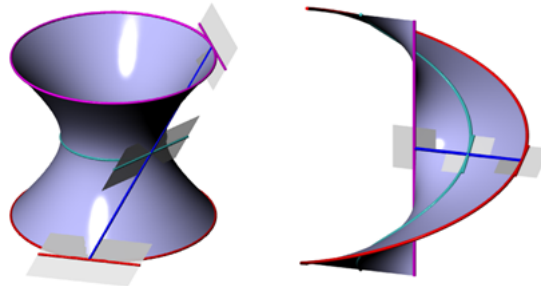
Na obr. 8.2 je uveden příklad rozvinutelných přímkových ploch – rotační válcová plocha a rotační kuželová plocha jsou zde nakresleny včetně jediné tečné roviny podél zvolené površky. Tečná rovina na rotačních plochách je určena tečnou k tvořící křivce (v tomto případě je tvořící křivkou přímka, tzn. tečna je s ní totožná) a tečnou k rovnoběžkové kružnici. Tečny k rovnoběžkovým kružnicím v libovolném bodě površky jsou rovnoběžné, tudíž podél celé površky existuje jediná tečná rovina.



Obrázek 8.2: Jediná tečná rovina podél povrchu rozvinutelných přímkových ploch

Na obr. 8.3 je uveden příklad zborcených přímkových ploch – rotační jednodílný hyperboloid a pravoúhlá šroubová plochy včetně několika tečných rovin podél zvolené povrchu. U rotačního jednodílného hyperboloidu je tečná rovina v bodě povrchu opět určena samotnou povrchkou a tečnou k rovnoběžkové kružnici. V tomto případě ale nejsou tečny k rovnoběžkovým kružnicím bodů povrchu rovnoběžné, tudíž podél povrchu existuje nekonečně mnoho tečných rovin – svazek rovin se společnou přímkou (površkou).

Podobná situace nastává u pravoúhlé šroubové plochy. Tečná rovina v bodě šroubové plochy je určena tečnou k tvořící křivce (v tomto případě je tečnou opět samotná površka) a tečnou ke šroubovici. Tečny ke šroubovicím v bodech povrchu nejsou rovnoběžné, tudíž podél povrchu existuje opět svazek rovin se společnou přímkou (površkou).



Obrázek 8.3: Nekonečně mnoho tečných rovin podél povrchu zborcených přímkových ploch

V dalším se zaměříme na rozvinutí části válcové a kuželové plochy. Při konstrukci rozvinutého tvaru nahrazujeme válcové plochy vepsanou n -bokou hranolovou plochou a sestrojujeme její stěny ve skutečné velikosti. Kuželové plochy nahrazujeme vepsanou n -bokou jehlanovou plochou a sestrojujeme její trojúhelníkové stěny ve skutečné velikosti.

8.1 Rozvinutí části válcové plochy

V homogenních souřadnicích prostoru E_∞^3 je válcová plocha dána řídicí křivkou

$$\mathbf{P}(v) = (x(v), y(v), z(v), 1), \quad v \in [v_1, v_2]$$

a směrem, jehož analytickou reprezentací je směrový vektor

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3, 0).$$

Válcovou plochu vytvoříme přímočarým pohybem řídicí křivky ve směru \mathbf{s} (tažením řídicí křivky podél přímky). Analytická reprezentace válcové plochy je potom

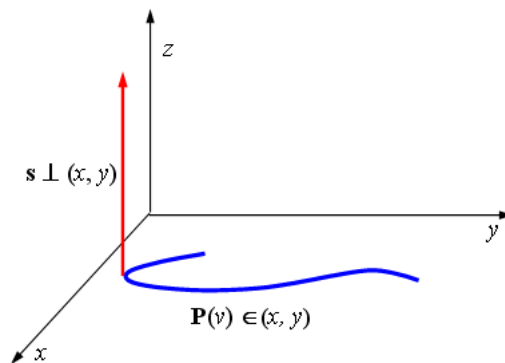
$$\mathbf{S}(u, v) = \mathbf{P}(v) + \mathbf{s}u = (x(v) + s_1u, y(v) + s_2u, z(v) + s_3u, 1), \quad u \in [u_1, u_2], \quad v \in [v_1, v_2].$$

Rozlišujeme následující typy válcových ploch:

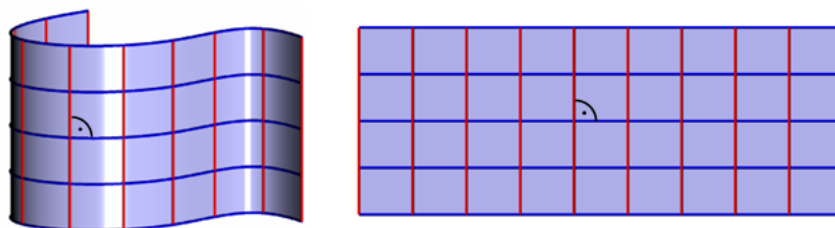
- Obecná válcová plocha – řídicí křivka je křivka obecného tvaru, směr je libovolný.
- Rotační válcová plocha – řídicí křivkou je kružnice, směr je kolmý na rovinu, ve které tato kružnice leží.
- Kosá válcová plocha – řídicí křivkou je kružnice, směr není kolmý na rovinu, ve které tato kružnice leží a ani s ní není rovnoběžný.

8.1.1 Rozvinutí části obecné válcové plochy

Na obr. 8.4 je nakreslena rovinná řídicí křivka obecného tvaru $\mathbf{P}(v)$ ležící v půdorysně (x, y) a směr \mathbf{s} kolmý (bez újmy na obecnosti) na půdorysnu. Obecná válcová plocha, která vznikne tažením řídicí křivky ve směru \mathbf{s} , je nakreslena na obr. 8.5 vlevo společně s několika polohami rovnoběžných řídicích křivek (zobrazených modrou barvou) a několika površkami rovnoběžnými se směrem \mathbf{s} (jsou zobrazeny červenou barvou). Je zřejmé, že každým bodem obecné válcové plochy tedy prochází řídicí křivka (rovnoběžná s původní řídicí křivkou) a površka (rovnoběžná se směrem \mathbf{s}). Rozvinutým tvarem je obdélník, protože směr \mathbf{s} je kolmý na rovinu řídicí křivky. Délka obdélníka je rovna délce řídicí křivky a výška je rovna výšce površky, viz ?? vpravo.



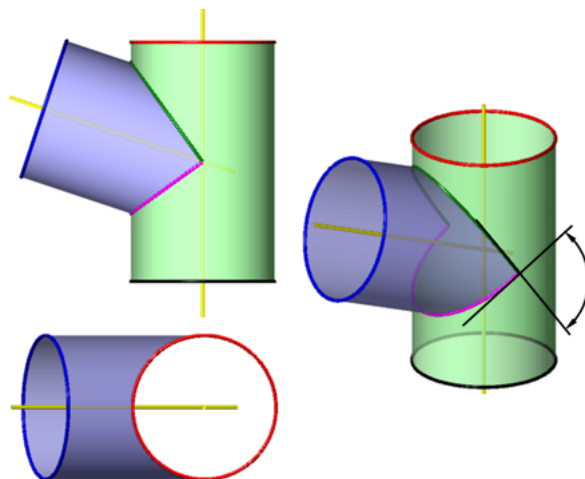
Obrázek 8.4: Zadání obecné válcové plochy



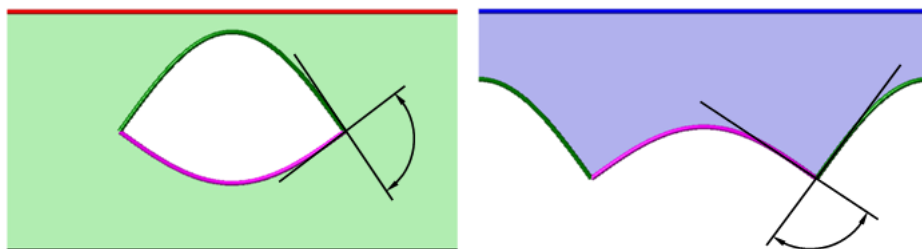
Obrázek 8.5: Obecná válcová plocha (vlevo) a její rozvinutý tvar (vpravo)

8.1.2 Rozvinutí části rotační válcové plochy

Na obr. 8.6 je v narysu, půdorysu a axonometrickém pohledu nakreslen "Y"-kus potrubí vytvořený ze dvou rotačních válcových ploch stejného průměru. Rozvinuté tvary rotačních válcových ploch z obr. 8.6 je nakresleno na obr. 8.7 – délky stejně barevných křivek si odpovídají. Při rozvinutí se podstavy válcových ploch rozvinou do úseček, jejichž délka odpovídá obvodu kružnice, povrchy jsou k nim kolmé. Zachovávají se také ostatní úhly křivek na ploše, jak je v obr. 8.6 a obr. 8.7 vyznačeno.



Obrázek 8.6: "Y"-kus

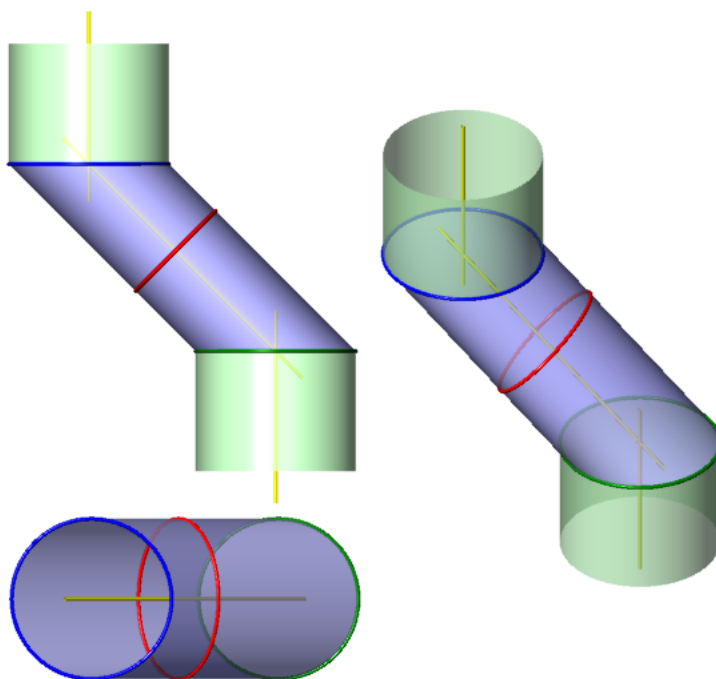


Obrázek 8.7: Rozvinutý tvar "Y"-kusu

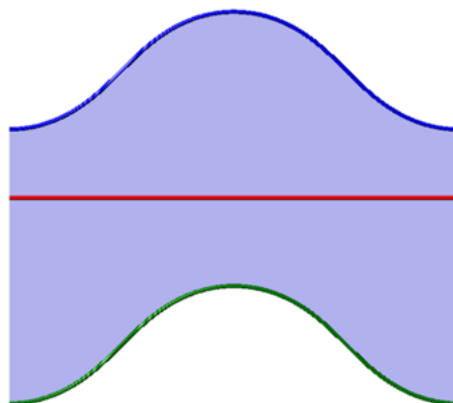
8.1.3 Rozvinutí části kosé válcové plochy

Kosou válcovou plochu si můžeme představit jako trubku eliptického průřezu spojující dvě nesusosé trubky stejného kruhového průřezu. Průřez získáme jako řez plochy rovinou kolmou na povrchy válcové plochy (tzv. *normálový řez*). Příklad tohoto přechodu je uveden na obr. 8.8. Modrou barvou je nakreslena kosá válcová plochy, červenou barvou její eliptický průřez, světle zelenou barvou jsou nakresleny rotační válcové plochy.

Kosou válcovou plochu rozvineme tak, že elipsu (křivku normálového řezu) rozvineme do úsečky, jejíž délka odpovídá obvodu elipsy a povrchy jsou k ní kolmé. Rozvinutý tvar kosé válcové plochy z obr. 8.8 je nakreslen na obr. 8.9.



Obrázek 8.8: Kosá válcová přechodová plocha mezi dvěma nesousými kruhovými průřezy



Obrázek 8.9: Rozvinutý tvar kosé válcové plochy

8.2 Rozvinutí části kuželové plochy

V homogenních souřadnicích prostoru E_{∞}^3 je kuželová plocha dána řídicí křivkou

$$\mathbf{P}(v) = (x(v), y(v), z(v), 1), \quad v \in [v_1, v_2]$$

a vrcholem, jehož analytickou reprezentací je bod

$$\mathbf{V} = (x_{\mathbf{V}}, y_{\mathbf{V}}, z_{\mathbf{V}}, 1).$$

Kuželovou plochu vytvoříme tak, že každý bod řídicí křivky spojíme s vrcholem \mathbf{V} (vytvoříme plochu vytažením křivky do bodu). Analytická reprezentace kuželové plochy je potom *přímková přechodová plocha*

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(u, v) &= (1 - u)\mathbf{P}(v) + u\mathbf{V} = \\ &= ((1 - u)x(v) + ux_{\mathbf{V}}, (1 - u)y(v) + uy_{\mathbf{V}}, (1 - u)z(v) + uz_{\mathbf{V}}, 1), \\ &u \in [0, 1], v \in [v_1, v_2]. \end{aligned}$$

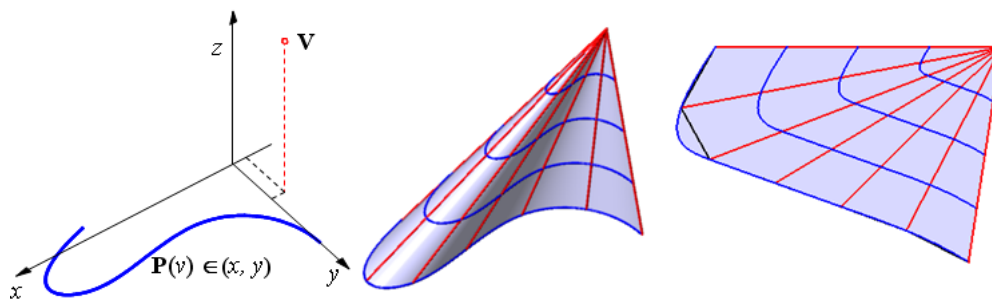
Rozlišujeme následující typy kuželových ploch:

- Obecná kuželová plocha – řídicí křivka je křivka obecného tvaru, poloha vrcholu je libovolná.
- Rotační kuželová plocha – řídicí křivkou je kružnice, spojnice středu kružnice a vrcholu je kolmá na rovinu, ve které tato kružnice leží.
- Kosá kuželová plocha – řídicí křivkou je kružnice, spojnice středu kružnice a vrcholu není kolmá na rovinu, ve které tato kružnice leží a ani s ní není rovnoběžná.

8.2.1 Rozvinutí části obecné kuželové plochy

Na obr. 8.10 vlevo je nakreslena rovinná řídicí křivka obecného tvaru $\mathbf{P}(v)$ ležící v půdorysně (x, y) a vrchol \mathbf{V} . Obecná kuželová plocha, která vznikne vytažením řídicí křivky do vrcholu \mathbf{V} je nakreslena na obr. 8.10 uprostřed společně s několika polohami stejnohých řídicích křivek (zobrazených modrou barvou) se středem stejnohlosti ve vrcholu \mathbf{V} a několika površkami (jsou zobrazeny červenou barvou). Je zřejmé, že každým bodem obecné kuželové plochy prochází řídicí křivka, jejíž tvar je modifikovaný stejnohlostí a površka. Úhly mezi křivkami jsou různé.

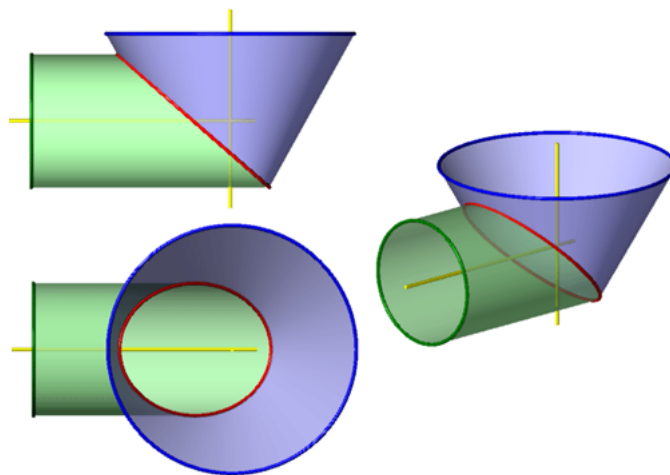
Obecnou kuželovou plochu rozvineme do roviny tak, že ji nahradíme vepsanou n -bokou jehlanovou plochou (čím větší n , tím přesnější výsledek dostaneme) a sestrojíme trojúhelníkové stěny ve skutečné velikosti. Koncové body posloupnosti úseček, do které se rozvinou strany trojúhelníků ležící na řídicí křivce, proložíme vhodnou interpolační křivkou. Rozvinutý tvar je nakreslen na obr. 8.10 vpravo.



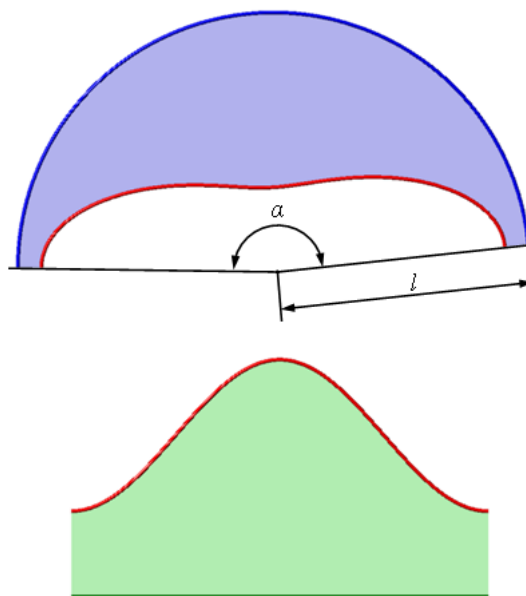
Obrázek 8.10: Zadání obecné kuželové plochy (vlevo), obecná kuželová plocha (uprostřed) a její rozvinutý tvar (vpravo)

8.2.2 Rozvinutí části rotační kuželové plochy

Na obr. 14 je v nárysu, půdorysu a axonometrickém pohledu nakreslena kuželová násypka připojená na potrubí kruhového průřezu. Z geometrického hlediska je kuželová násypka pláštěm rotačního kužele s poloměrem podstavy r a délkou strany l . Rozvine se do kruhové výseče o poloměru l a středovým úhlem $\alpha = 2\pi r/l$. Na obr. 15 je nakreslen rozvinutý tvar kuželové násypky a pro úplnost i rozvinutý tvar připojeného potrubí



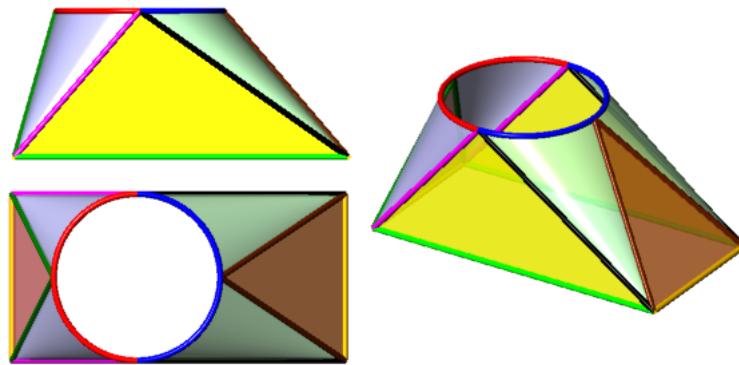
Obrázek 8.11: Kuželová násypka



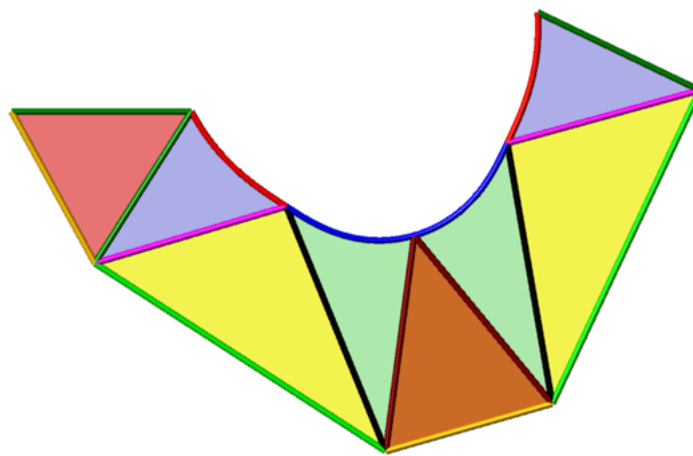
Obrázek 8.12: Rozvinutý tvar kuželové násypky a připojeného potrubí

8.2.3 Rozvinutí části kosé kuželové plochy

Části kosých kuželových ploch mají široké uplatnění při vytváření přechodů mezi kruhovými průřezy a průřezy tvořenými polygonem (lomenou čarou). Na obr. 8.2 vpravo je fotografie přechodu mezi kruhovým a obdélníkovým průřezem. Na obr. 8.13 je příklad podobného přechodu nakreslen s barevným vyznačením jednotlivých prvků rozvinutí. Hladkou přechodovou plochu vytvoříme z částí kosých kuželových ploch a trojúhelníků tak, že trojúhelník vždy leží v tečně rovině kosé kuželové plochy. Kolik stran má polygon, tolik je trojúhelníků. Kolik je vrcholů polygonu, tolik je částí kosých kuželových ploch. Každá strana polygonu náleží jednomu trojúhelníku. Třetí vrchol trojúhelníku leží na kružnici. Vrcholy trojúhelníků ležících na kružnici dělí kružnici na kružnicové oblouky, kdy každý je podstavou části kosé kuželové plochy. Vrcholy kosých kuželových ploch leží ve vrcholech polygonu. Rozvinutý tvar hladké přechodové plochy z obr. 8.13 je nakreslen na obr. 8.14.

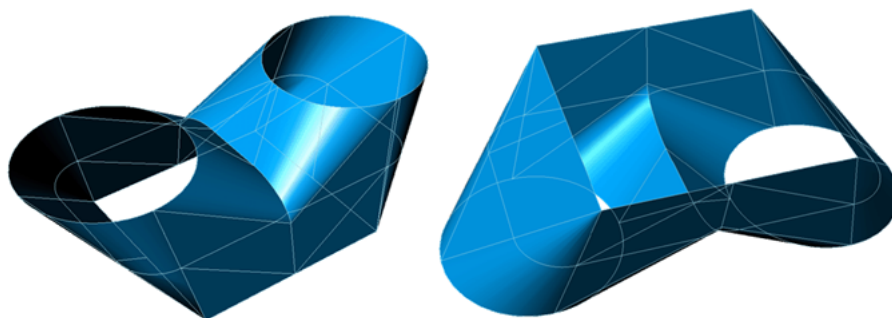


Obrázek 8.13: Přechodová plocha mezi kruhovým a obdélníkovým průřezem

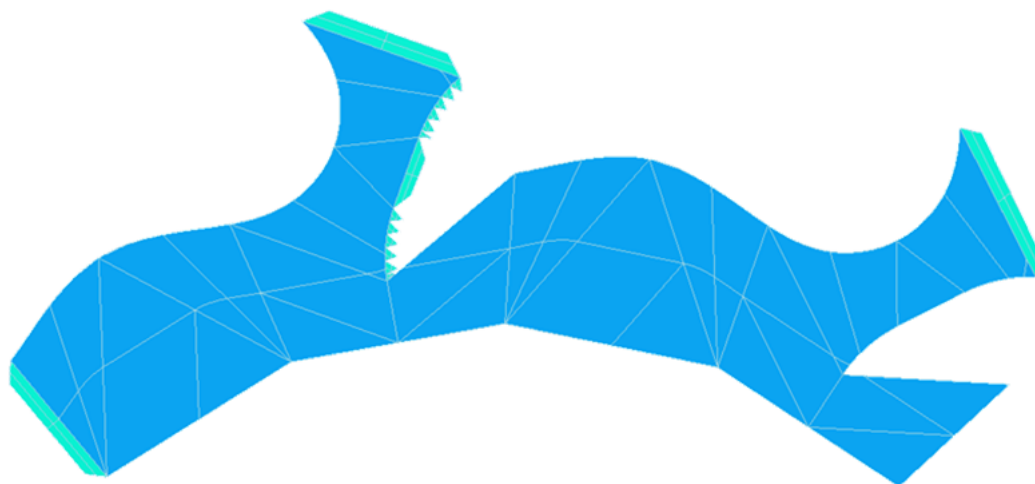


Obrázek 8.14: Rozvinutý tvar přechodové plochy mezi kruhovým a obdélníkovým průřezem

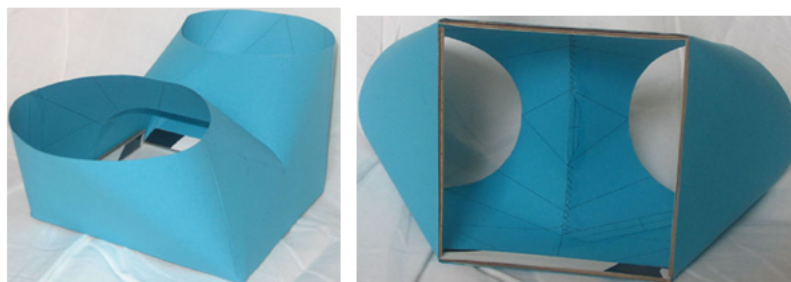
Na obr. 8.15 je zobrazen CAD model redukce počtu potrubí, která spojuje dvě potrubí s kruhovým průřezem do jednoho potrubí se čtvercovým průřezem [17]. Na obr. 8.16 je nakreslen rozvinutý tvar této redukce (včetně zeleně vyznačených záložek na slepení papírového modelu) a na obr. 8.17 je fotografie papírového modelu.



Obrázek 8.15: CAD model redukce potrubí



Obrázek 8.16: Rozvinutý tvar redukce potrubí



Obrázek 8.17: Fotografie papírového modelu redukce potrubí

Literatura

- [1] Linkeová, I.: [Základy počítačového modelování křivek a ploch¹](#)
- [2] ISO 1122-1:1998 Vocabulary of gear terms – Part 1: Definitions related to geometry
- [3] [Princip výroby ozubených kol](#) (tumlikovo.cz)
- [4] Szarková, D.: [Kuželosečky](#) (evlm.stuba.sk)
- [5] [Převod eliptickými řetězovými koly](#) (youtube.com)
- [6] Stewart J.: [Essential Calculus – Review of conic sections](#) (stewartcalculus.com)
- [7] [Research in microgravity](#) (blubblubb.net)
- [8] [Zero G in airplane](#) (youtube.com)
- [9] [Renishaw PH20 probe head coordinate measuring machine](#) (youtube.com)
- [10] Zelený, V. – Skalník, P.: NanoCMM – Universal and Flexible Coordinate Metrology for Micro and Nano Components Production, výzkumná zpráva ČMI, 2007.
- [11] [Kinematics with MicroStation – Spiral Gear Geometry](#) (youtube.com)
- [12] [Parabolový reflektor s optikou na skle](#) (cs.autolexicon.net)
- [13] Sýkora, J., Linkeová, I., Skalník, P.: [Freeform digital twin approach to develop the HP 300 freeform verification standard](#), Measurement, Volume 218, 2023, ISSN 0263-2241,
- [14] [Vztah mezi rotačním válcem, kuželem a jednodílným hyperboloidem](#) (youtube.com)
- [15] Linkeová, I.: Složité obalové plochy generované v CAD/CAM systémech obráběcím nástrojem. Habilitační práce, ČVUT v Praze, Fakulta strojní, 2009.
- [16] Jirků, S. - Kočárník, P. - Kůla, V. - Linkeová, I.: Aerodynamický výzkum spirálových hrdel pro parní turbíny [Výzkumná zpráva]. Praha: ČVUT FEL, Katedra mechaniky a materiálů, 2002. 40/21034/312 1-FD-K/011. 26 s.
- [17] Hynčica, J.: Rozvinutelná přechodová plocha. Zápočtová práce předmětu Geometrie pro CAD, Fakulta strojní ČVUT v Praze, ak. rok 2004-2005.

¹Všechny odkazy v tomto seznamu byly platné k 1. 9. 2023.