Matematika 2 – Příklady za písemky

Pro získání zápočtu je nutné mít 8 bodů (z 10 plánovaných). Buď z písemek, nebo je možno si je opravit spočítáním příkladů. Kdo dostane 0 bodu, musí spočítat všechny tři podpříklady, kdo 1/2 bodu, tak mu stačí pouze první ze tří. Opravu uznávám donesením správně spočítaných všech příklad za jednu písemku. Špatně spočítané opravné příklady je tedy nutno donést znovu! (již správně spočítané)! Opravy doneste nejlépe do 14 dní od testíku.

1. – PD
   - a) Určete definiční obor a vypočítejte parciální derivace funkce $f(x,y) = \ln(xy^2)$.
   - b) Určete definiční obor a vypočítejte parciální derivace funkce $f(x,y) = 3 - 7\ln(x + \ln y)$.
   - c) Vypočítejte parciální derivace funkce $f(x,y) = \frac{xy^2}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right)$.
2. – Tečná rovina
   - $\geq \frac{1}{2}$**b:** Spočíjte (nějaký) první příklad z vystavených ukázkových B-čkových zkouškových příkladů na `https://mat.nipax.cz/_media/m2_2019_ukazktestybeta.pdf`
   - $< \frac{1}{2}$**b:** Spočíjte (nějaký) první příklad z vystavených ukázkových A-čkových zkouškových příkladů na `https://mat.nipax.cz/_media/m2_2019_ukazktestyalfa.pdf`
3. – Lokální extrémy
   - a) Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$.
   - b) Nakreslete definiční obory funkcí (tj. do roviny $\mathbb{R}^2$)

     $$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \ln(xy-4), \\ z = f_2(x,y) &= -\sqrt{5y - x^2}, \\ z = f_3(x,y) &= \sqrt{18 - x^2 - 2y^2}. \end{aligned}$$

     Napište, jakou kvadratickou plochu tvoří **graf** funkce f_2, f_3, tj. plocha v $\mathbb{R}^3$.
   - c) Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + y^2 - 2x^2 - 2xy + 6$.

4. – Fubini

   - Nakreslete množinu M omezenou křivkami $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$. Pak spočítejte $\iint_M f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, kde $f(x,y) = x$.
   - Ověřte, že rovnicí $F(x,y) = xye^{x-y} - \frac{2}{e} = 0$ na okolí bodu $A = [1;2]$ je zadána implicitní funkce $y = f(x)$. Napište její tečnu v bodě $x_0 = 1$ a spočítejte hodnotu $y'' = f''(x)$ v bodě $x_2 = 1$. (nápověda: před derivací vykraťte exponencielu)
   - Nakreslete množinu $M = \{x + y \leq 1, x + 1 \geq y \geq 0\}$. Nakonec spočítejte $\iint_M f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$, kde $f(x,y) = x^2 + y^2$.
     (Pozor na EOI_x).

5. – polární souřadnice

   - Spočítejte obě souřadnice těžiště kruhové výseče s vnějším poloměrem $R = 3$ a vnitřním $r = 1$, středem v bodě $[0;0]$, která celá leží nad osou x, tj. všechny její body splňují podmínku $y \geq 0$. Hustota této výseče je dána jako $\rho(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
   - Spočítejte hmotnost desky, tj. množiny
     $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 0\}$ a $\rho(x,y) = y$.
     (obtížné v polárních souřadnicích)
   - Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose y rovinné desky $D = \{[x,y] \in \mathbb{E}^2; \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$, je-li plošná hustota rovna jedné.

6. – křivkový integrál
   Navrhněte parametrizaci křivky, která splňuje rovnice:

   - $x^2 + y^2 + z^2 = 25, z = 3$ s poč. bodem $A = [0,4,3]$.
   - $y = \ln\left(\frac{e^3}{x^2}\right)^5$, $x \in [1,3]$.
   - $(x-2)^2 + 4y^2 = 1$, orientace proti hodinovým ručičkám.

7. – plošný integrál

   - Navrhněte parametrizaci plochy $Q : z = x^2 + y^2,\ y \geq 0,\ z \leq 1$, s normálou zadanou v počátku, tj. $\vec{n}([0,0,0]) = -\vec{k}$. (Př.601)
   - Navrhněte parametrizaci plochy $Q : (y+1)^2 + (z-3)^2 \leq 16,\ x = 2$, a normálou danou $\vec{n} = (1,0,0)$. (Př.600)
   - Spočítejte $\iint_Q x\ \mathrm{d}S$ přes plochu $Q : z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$. (Př.617)