

Matematika II – přednáška 22

Co bude dneska?

Různé konkrétní parametrizace ploch (začali jsme minule).

Plošný integrál skalární funkce (plošný integrál 1. druhu)

Obsah plochy, mechanické charakteristiky plochy.

Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese

<http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php>

(pro osobní potřeby).

Shrnutí co bylo minule

Jednoduchá hladká plocha.

Parametrizace plochy.

Jednoduchá po částech hladká plocha. Uzavřená plocha.

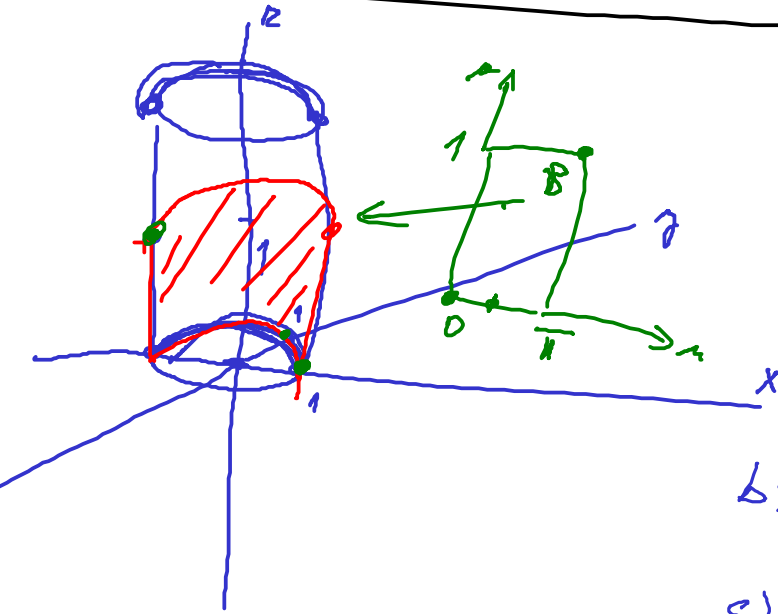
Pr:

$$P(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ v \end{bmatrix}$$

$$B = \{ u \in \langle 0, 2\pi \rangle, v \in \langle 0, 1 \rangle \}$$

Otvorete, \mathbb{R}^3 $P(u, v)$ je parametrizovana plocha G :

$$G: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z \geq 0 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$



1) Svrstaj $P(u, v)$ na ce G ?

b) P_u, P_v spojite? PD + omerene!

c) $P_u \times P_v \neq \vec{0}$ u B

Pf: Rovnoběžník ABCD; $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

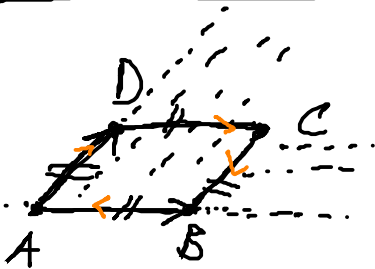
• \vec{v}_i orientovaná! $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ 'křes'

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P(u, v) = ?$$

u, v 'sčítání'
 \Downarrow $A_3 = \oplus$

$$X = A + u \cdot (B - A) + v \cdot (D - A)$$



Pr:

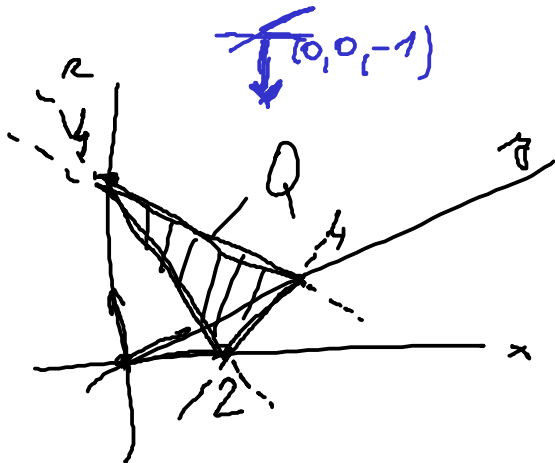
$$2x + y + z = 4$$

$$Q = \{ [x, y, z] \in E_3 \mid z = 4 - 2x - y, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \}$$

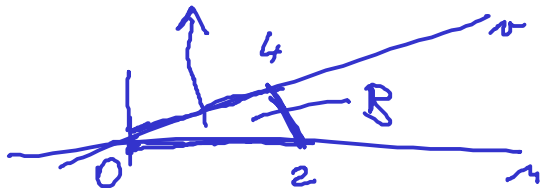
$$P(\mu, \sigma) = ?$$

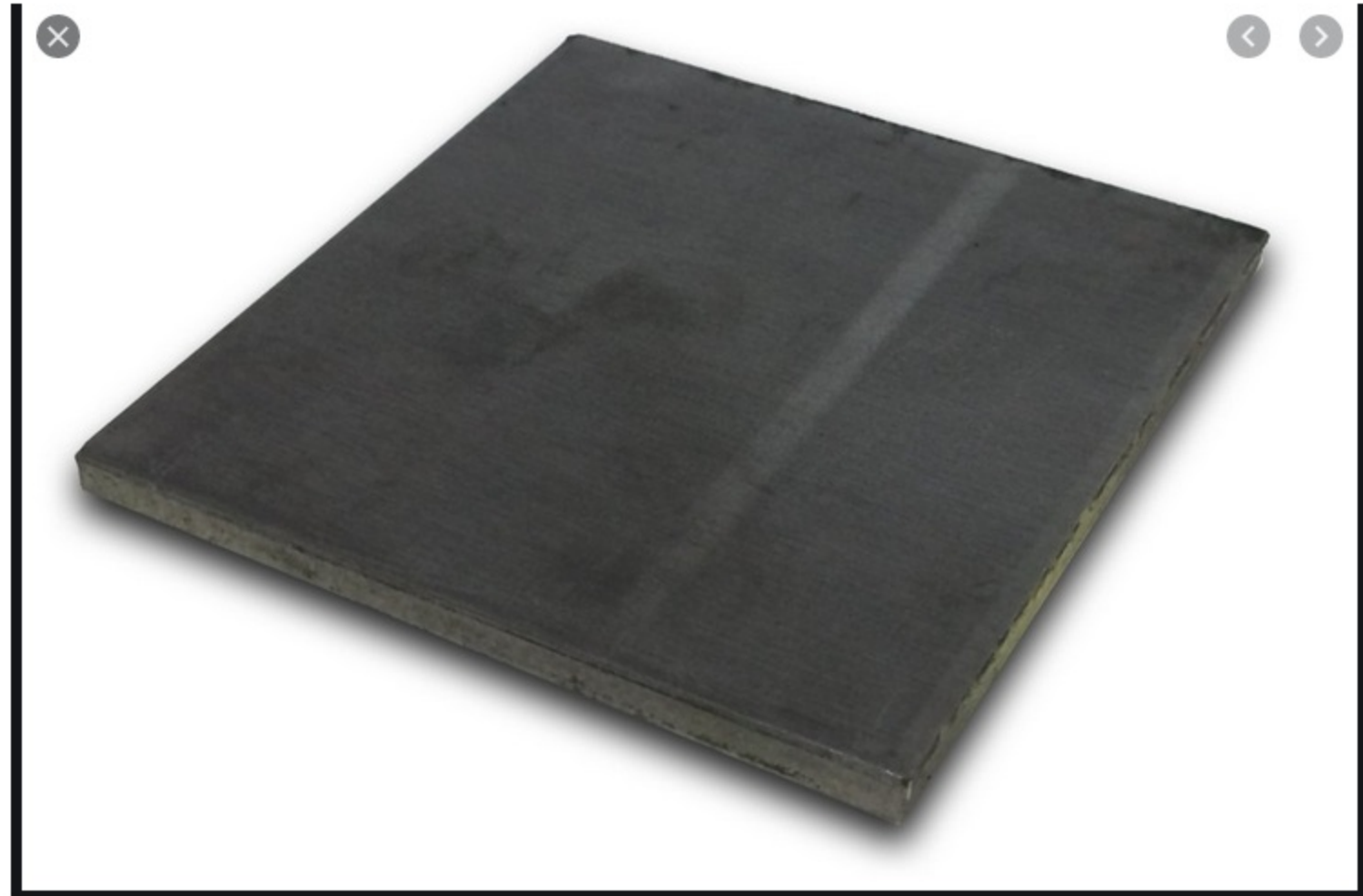
$$z = z(x, y)$$

→ mira's setoren $(0, 0, 4)$ atky'ibel

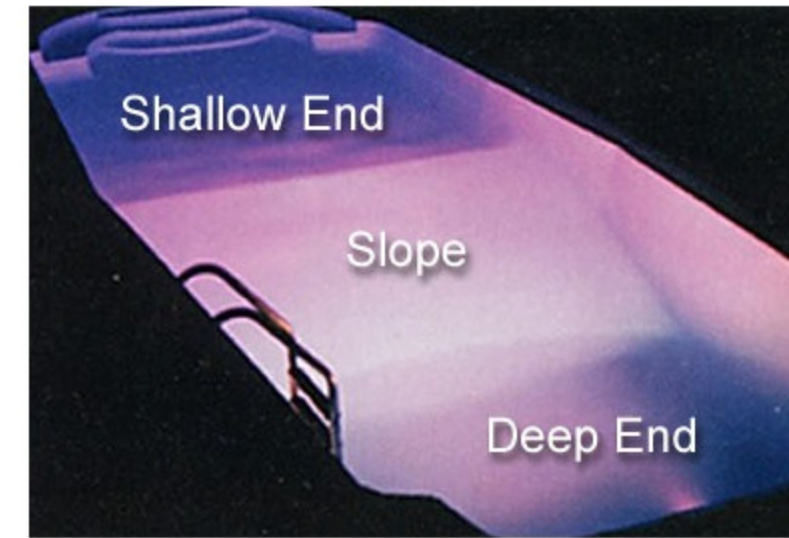


$$P(\mu, \sigma): \begin{aligned} x &= \mu \\ y &= \sigma \\ z &= 4 - 2\mu - \sigma \end{aligned}$$





Jaka je plocha platu ocele? -> 2D integral



Give It A Try For Yourself !

Length = X Width = X Average Depth = X Gallon Multiplier =

[Click To Calculate](#)

The Approximate Gallons Of Water In Your Pool Is =

Jak spocist prumernou hloubku bazenu -> 2D intergal

Ale jak spocist povrch trupu lodi?



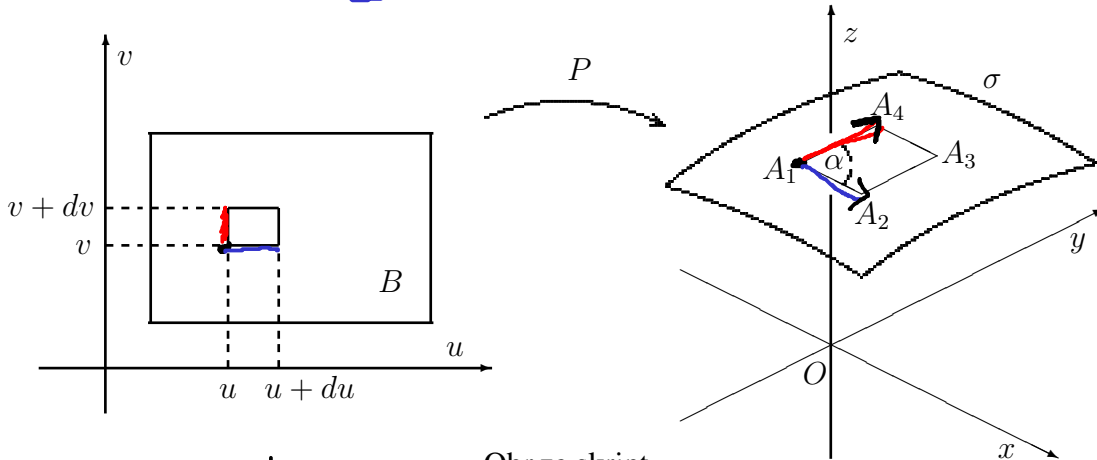
A jak spocist treba prumernou hloubku Tyrhenskeho more?

--> Plosny integral
skalarni funkce

Plošný integrál skalární funkce (plošný integrál 1. druhu) - motivace

Na tabuli.

$$dS = \sigma$$



Obr. ze skript

$$\overline{A_2 - A_1} = \underline{P(u+du, v)} - P(u, v) = \underline{P_x(u, v) + P_y(u, v) \cdot du} - P(u, v) = P_x(u, v) \cdot du$$

$$\overline{A_2 - A_1} = \sigma$$

$$dS = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} du dv$$

Plošný integrál skalární funkce (plošný integrál 1. druhu) - definice

Definice (Plošný integrál skalární funkce na jednoduché hladké ploše.). Nechť σ je jednoduchá hladká plocha v \mathbb{E}_3 a P je její parametrizace, definovaná na množině $B \subset \mathbb{E}_2$. Nechť f je funkce, která je definovaná a omezená na ploše σ . Existuje-li dvojný integrál $\iint_B f(P(u, v)) \|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\| du dv$, pak o funkci f říkáme, že je *integrovatelná* na ploše σ . *Plošný integrál* funkce f na ploše σ pak označujeme $\iint_{\sigma} f dp$ a definujeme jej rovnicí

$$\iint_{\sigma} f dp = \iint_B f(P(u, v)) \|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\| du dv.$$

Plošný integrál skalární funkce (plošný integrál 1. druhu) - definice

Definice (Plošný integrál skalární funkce na jednoduché hladké ploše.). Nechť σ je jednoduchá hladká plocha v \mathbb{E}_3 a P je její parametrizace, definovaná na množině $B \subset \mathbb{E}_2$. Nechť f je funkce, která je definovaná a omezená na ploše σ . Existuje-li dvojný integrál $\iint_B f(P(u, v)) \|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\| du dv$, pak o funkci f říkáme, že je *integrovatelná* na ploše σ . *Plošný integrál* funkce f na ploše σ pak označujeme $\iint_{\sigma} f dp$ a definujeme jej rovnicí

$$\iint_{\sigma} f dp = \iint_B f(P(u, v)) \|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\| du dv.$$

Výpočet integrálu vpravo ukážeme na příkladech.

Pozn.: Výroky “funkce f je integrovatelná na ploše σ ” a “plošný integrál f na σ existuje” mají stejný význam (jsou ekvivalentní).

Pozn.: Pro označení plošného integrálu též často objevuje dS nebo $d\sigma$ místo dp .

Poznámka: Plošný integrál skalární funkce je nezávislý na volbě parametrizace.

Plošný integrál skalární funkce na jednoduché po částech hladké ploše

Definice (Plošný integrál skalární funkce na jednoduché po částech hladké ploše.).

Nechť σ je jednoduchá po částech hladká plocha v \mathbb{E}_3 , která je složena z jednoduchých hladkých ploch $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ dle pravidel, popsanych dříve. Nechť f je funkce, která je omezená na ploše σ . Je-li f integrovatelná funkce na každé z ploch $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, pak říkáme, že je *integrovatelná* na ploše σ . *Plošný integrál* funkce f na ploše σ pak definujeme rovnicí

$$\iint_{\sigma} f \, dp = \sum_{i=1}^n \iint_{\sigma_i} f \, dp.$$

(Plošné integrály na pravé straně jsou plošnými integrály na jednoduchých hladkých plochách.)

Pozn.: Místo “plošný integrál skalární funkce” často používáme název *plošný integrál 1. druhu*.

Chceme-li zdůraznit, na kterých proměnných závisí funkce f , můžeme místo $\iint_{\sigma} f \, dp$ psát $\int_{\sigma} f(x, y, z) \, dp$.

Pozn.: Místo “plošný integrál skalární funkce” často používáme název *plošný integrál 1. druhu*.

Chceme-li zdůraznit, na kterých proměnných závisí funkce f , můžeme místo $\iint_{\sigma} f \, dp$ psát $\int_{\sigma} f(x, y, z) \, dp$.

Plošný integrál skalární funkce na jednoduché po částech hladké ploše

Definice (Obsah plochy). Je-li σ jednoduchá po částech hladká plocha, pak číslo, které je hodnotou integrálu $\iint_{\sigma} dp$, nazýváme *obsahem* plochy σ .

V případě, kdy σ je jednoduchá hladká plocha a P je její parametrizace definovaná v množině $B \subset \mathbb{E}_2$, je obsah plochy σ roven

$$p(\sigma) = \iint_{\sigma} dp = \iint_B \|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\| \, du \, dv.$$

$$S \text{ flux} = ?$$

$$\iint_Q 1 \, d\mu = \iint_B 1 \cdot \|P_u + P_v\| \, du \, dv = ?$$

Plošný integrál skalární funkce - vlastnosti

Je odvozený od dvojného integrálu, tj. také vlastnosti jsou odvozeny od dvojného integrálu.

- a) **Postačující podmínka pro existenci plošného integrálu skalární funkce.** Je-li f spojitá funkce na ploše σ , pak je na σ integrovatelná (tj. plošný integrál $\iint_{\sigma} f \, dp$ existuje).

Plošný integrál skalární funkce - vlastnosti

- b) **Linearita plošného integrálu.** Jsou-li funkce f a g integrovatelné na ploše σ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak funkce $f + g$ a αf jsou také integrovatelné na σ a

$$\iint_{\sigma} (f + g) dp = \iint_{\sigma} f dp + \iint_{\sigma} g dp,$$
$$\iint_{\sigma} \alpha \cdot f dp = \alpha \cdot \iint_{\sigma} f dp.$$

- c) Je-li f integrovatelná funkce na ploše σ a omezená funkce g se liší od f na σ nejvýše v konečně mnoha bodech nebo křivkách, pak g je také integrovatelná funkce na σ a

$$\iint_{\sigma} g dp = \iint_{\sigma} f dp.$$

Plošný integrál skalární funkce - vlastnosti

d) Je-li funkce f integrovatelná na ploše σ , pak je také integrovatelná na $-\sigma$ a

$$\iint_{-\sigma} f \, dp = \iint_{\sigma} f \, dp.$$

Plošný integrál skalární funkce - vlastnosti

d) Je-li funkce f integrovatelná na ploše σ , pak je také integrovatelná na $-\sigma$ a

$$\iint_{-\sigma} f \, dp = \iint_{\sigma} f \, dp.$$

Pozn.: Tvrzení a) lze zobecnit: *Je-li σ jednoduchá po částech hladká plocha a funkce f je spojitá na každé z hladkých částí plochy σ , pak f je integrovatelná na σ .*

Pozn.: Tvrzení d) ukazuje, že *existence ani hodnota plošného integrálu skalární funkce nezávisí na orientaci plochy.*

Výpočet plošného integrálu skalární funkce

Plošný integrál funkce f na jednoduché hladké ploše σ můžeme vypočítat užitím parametrizace $P = [\phi, \psi, \vartheta]$ plochy σ a příslušné formule z definice.

1) Do funkce f za proměnné x, y, z dosadíme

$$x = \phi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \vartheta(u, v),$$

2) za dp dosadíme

$$dp = \|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\| du dv$$

3) integrujeme podle u a v na množině $B \subset \mathbb{E}_2$, na které je parametrizace P definovaná.

Výpočet plošného integrálu skalární funkce

Plošný integrál funkce f na jednoduché hladké ploše σ můžeme vypočítat užitím parametrizace $P = [\phi, \psi, \vartheta]$ plochy σ a příslušné formule z definice.

1) Do funkce f za proměnné x, y, z dosadíme

$$x = \phi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \vartheta(u, v),$$

2) za dp dosadíme

$$dp = \|P_u(u, v) \times P_v(u, v)\| du dv$$

3) integrujeme podle u a v na množině $B \subset \mathbb{E}_2$, na které je parametrizace P definovaná.

Plošný integrál funkce f na jednoduché po částech hladké ploše, složené z jednoduchých hladkých ploch $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, vypočítáme tak, že nejprve vypočítáme integrály na plochách $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ a výsledky pak sečteme.

Příklady na tabuli.

Fyzikální aplikace plošného integrálu skalární funkce

Na tabuli - ze skript.

Znalost ploch a jejich parametrizace

- (I) {
- ① rovina (část)
 - ② paraboloid
 - ③ pl. kuželová
 - ④ pl. kulová
 - ⑤ pl. válcová
- } (II)

Typ I: parametrizace
"Univerzální"

$$\begin{aligned}x &= x \\y &= y \\z &= g(x, y) \\(x, y) &\in B\end{aligned}$$

ukázat
všude

B je průmět plochy do roviny $z=0$

Pak $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, \boxed{1} \right)$

kolmý vektor

Typ II param. pomocí cylindrn. souřadnic

(III) pl. kulovou lze též pomocí
sférických souřadnic.