Matematika II – přednáška 20

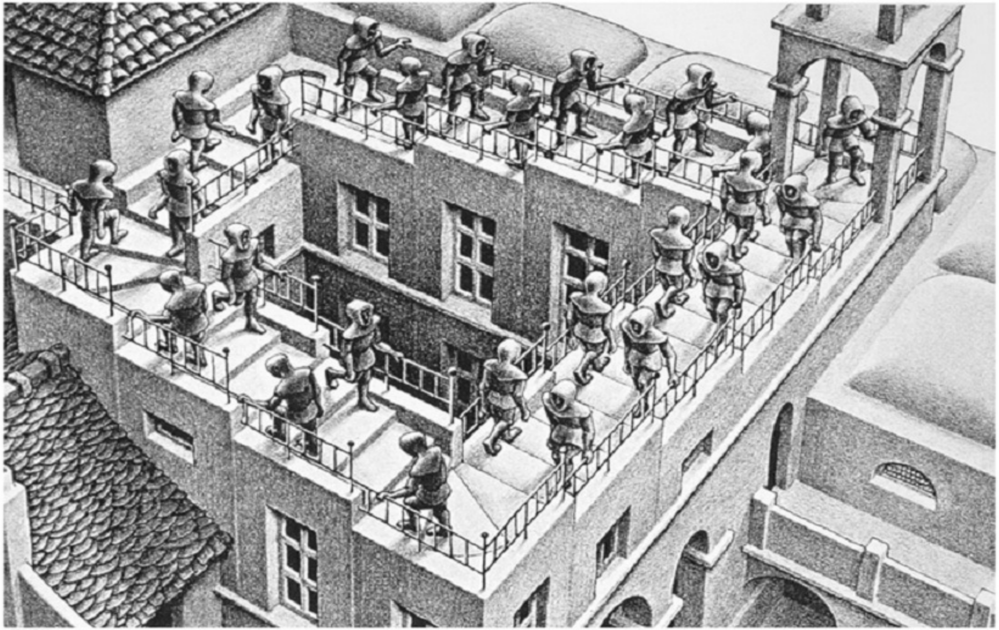
Co bude dneska?

Výpočet potenciálu. Více postupů, hodí se v jiných situacích.

Použití potenciálu v příkladech.

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php
(pro osobní potřeby).

Jak by to vypadalo, kdyby gravitacni pole nebylo potencialni?



M.S.Escher "Ascending and Descending"

Shrnutí co bylo minule

Potenciální vektorové pole. Vlastnosti, souvislost s nezávislostí křivkového integrálu na integrační cestě.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby vektorové pole bylo potenciální.

Potenciální pole - opakování

Definice (Potenciální vektorové pole.). Vektorové pole $\mathbf{f}$ v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$ ($k = 2$ nebo $k = 3$) nazýváme *potenciální pole* v D, jestliže existuje skalární pole (= skalární funkce) φ v D takové, že

$$\mathbf{f} \;=\; \operatorname{grad} \varphi$$

v D. Skalární funkci φ nazýváme *potenciál* vektorového pole $\mathbf{f}$ v D.

Věta. *Je-li* $\mathbf{f}$ *potenciální a spojité vektorové pole v oblasti* D, φ *je potenciál* $\mathbf{f}$ *v* D *a* C *je křivka v* D, *pak*

$$\int_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} \;=\; \varphi(k.b.\,C) - \varphi(p.b.\,C).$$

Potenciální pole - opakování

Věta. $\mathbf{f}$ *je potenciální vektorové pole v oblasti* D $\Leftrightarrow$ *Křivkový integrál vektorové funkce* $\mathbf{f}$ *nezávisí v* D *na integrační cestě.*

Potenciální pole v $\mathbf{E}_2$

Věta (Potenciální pole v $\mathbb{E}_2$ – NUTNÁ podmínka.). *Nechť*

Nechť $\mathbf{f}$ *je potenciální pole v* D.

Pak $\mathbf{f} = (U, V)$ *je vektorové pole v* D*, jehož souřadnicové funkce* U *a* V *mají v* D *spojité parciální derivace a splňují podmínku:*

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \text{v } D.$$

Tj. máme

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \text{v } D.$$

?

NEplatí. Pak **f** není potenciální.

ANO, platí. Pak **f** může ale nemusí být potenciální.

Potencialni vektorove pole f tedy splnuje

$$\mathbf{f} = \operatorname{grad} \varphi$$

jiz drive jsme mluvili o diferencialnich operatorech,
krome jineho tez o rotaci.

Ukazovali jsme, ze plati: rot grad f = 0

Z toho, ale tedy plyne, ze rotace kazdeho potencialniho pole je tedy 0.

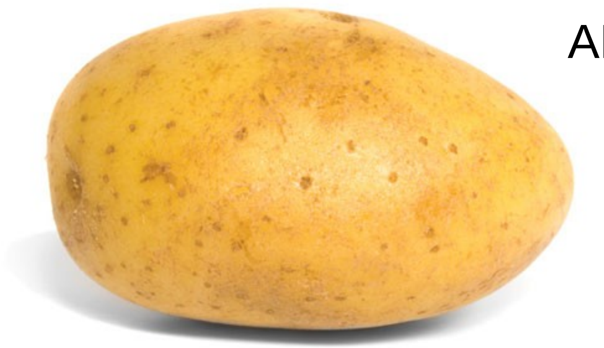
Tato vlastnost se popisuje tak, ze pole neviri.

Potencialni pole se tez nazyvaji neviriva.

Jednoduše souvislá oblast

nebo též v E2

Definice (Jednoduše souvislá oblast v E_3.). Oblast $D \subset \mathbb{E}_3$ nazýváme *jednoduše souvislou*, pokud každou uzavřenou křivku C v D můžeme spojitě změnit (stáhnout) v bod v D, aniž přitom kdykoliv oblast D opustíme.



ANO

NE

Potenciální pole - opakování

Věta. $\mathbf{f}$ *je potenciální vektorové pole v oblasti* $D \quad \Leftrightarrow \quad$ *Křivkový integrál vektorové funkce* $\mathbf{f}$ *nezávisí v* D *na integrační cestě.*

Věta (Potenciální pole v $\mathbb{E}_2$ – postačující podmínka.). *Nechť*

a) D *je jednoduše souvislá oblast v* $\mathbb{E}_2$ *a*

b) $\mathbf{f} = (U, V)$ *je vektorové pole v* D*, jehož souřadnicové funkce* U *a* V *mají v* D *spojité parciální derivace a splňují podmínku:*

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \text{v } D.$$

Pak $\mathbf{f}$ *je potenciální pole v* D.

Potenciální pole v $\mathbf{E}_2$

Věta (Potenciální pole v $\mathbb{E}_2$ – postačující podmínka.). *Nechť*

a) *D je jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{E}_2$ a*

b) *$\mathbf{f} = (U, V)$ je vektorové pole v D, jehož souřadnicové funkce U a V mají v D spojité parciální derivace a splňují podmínku:*

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \text{v } D.$$

Pak $\mathbf{f}$ je potenciální pole v D.

Tj. máme

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \text{v } D.$$ **?**

→ **NE**. Pak **f** není potenciální.

→ **ANO.** ***Je D jednoduše souv. oblast?***

→ **NE, f** není v D potenciální.

→ **ANO, f** je v D pot.

Metody nalezení potenciálu potenciálního vektorového pole

Na tabuli. 0) ověření post. podmínky

Metoda 1

$\vec{f} = \operatorname{grad} \varphi$

$\dfrac{U}{V} = \dfrac{\partial_x \varphi}{\partial_y \varphi}$

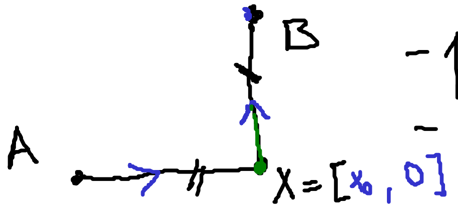
$\Longrightarrow$ a) $\tilde{\varphi}_1(x,y) = \int \partial_x \varphi \, dx = \int U(x,y)\, dx + C(y)$

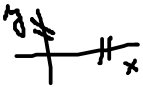
$\tilde{\varphi}_2(x,y) = \int \partial_y \varphi \, dy = \int V(x,y)\, dy + C(x)$

b) porovnáním kandidátů $\tilde{\varphi}_1$ a $\tilde{\varphi}_2$ určím $C(x)$ a $C(y)$ $\longrightarrow \varphi(x,y)$.

Metoda ② (založená dle V.1.6)

- volím body A a B libovolně, ale pevně
- pak počítám křivk. int. z $\vec{f}$ po úsečkách // se SS
- typicky $\underline{A=[0,0]}$, $\underline{B=[x_0,y_0]}$ $\Rightarrow \varphi(x_0,y_0)$.





$$\vec{f}: \quad U = 2x - y^2, \qquad V = 3 - 2xy$$

$$\int_{AX} (2x-y^2)\,dx + \cancel{(3-2xy)\,dy}$$

a) $I_1 = \int_A^X \vec{f}\cdot d\vec{s} = \left|\begin{array}{l} \text{úsečka } AX: \\ p(t):\ x = 0 + t \\ \quad\quad\ \ \cancel{y = 0} \\ \dot{p}(t) = (1,0) \\ t \in \langle 0, x_0\rangle \end{array}\right| = \int_0^{x_0} (2t - 0^2, 3 - 2t\cdot 0)\cdot(1,0)\,dt = \int_0^{x_0} 2t + 0\,dt = [t^2]_0^{x_0} = x_0^2$

$$\int_A^B \vec{f}\cdot d\vec{s} = I_1 + I_2$$

$$(1,0)\,dt = \dot{p}(t)\,dt = (dx, dy)$$

$$dt = dx \qquad dy = 0$$

b) $$I_2 = \int_{\overline{XB}} \vec{f}\cdot d\vec{s} = \left| \begin{array}{l} \text{param. úsečky } \overline{XB} \\ p(t):\ \begin{array}{l} x = x_0 \\ y = 0 + t \end{array} \\ t \in \langle 0, y_0 \rangle \\ \dot{p}(t) = (0,1) \end{array} \right| = \int_0^{y_0} \left(\cancel{2x_0 - t^2},\ 3 - 2x_0 t\right)\cdot(0,1)\, dt$$

$$= \int_0^{y_0} 3 - 2x_0 t \, dt = \left[3t - 2x_0 \frac{t^2}{2}\right]_0^{y_0} = 3y_0 - x_0 y_0^2$$

$B = [x_0, y_0]$

$X = [x_0, 0]$

$$= \int_{\overline{XB}} \cancel{(2x - y^2)\,dx} + (3 - 2xy)\,dy =$$

c) $$\int_A^B \vec{f}\cdot d\vec{s} = I_1 + I_2 = x_0^2 + 3y_0 - x_0 y_0^2$$

$$\left(\varphi(B) - \varphi(A)\right)$$
$$\varphi(B) = \varphi([x_0, y_0])$$

d) $[x_0, y_0] \to [x, y]$

$$\varphi(x,y) = x^2 + 3y - xy^2 + C$$

Metoda 3 (viz M3)

$$U = \partial_x \varphi \implies \tilde{\varphi}_1 = \int U\,dx + C(y)$$

$$V = \partial_y \varphi \qquad \tilde{\varphi}_2 = \int V\,dy + C(x)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial y} = V \implies C'(y) = \ldots\ldots \implies C(y)$$

Pr.:

$$U = (2x - y^2) \implies \tilde{\varphi}_1(x,y) = \int U\,dx = \int 2x - y^2\,dx = x^2 - xy^2 + C(y)$$

$$V = (3 - 2xy)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial y} = 0 - \cancel{2xy} + C'(y) = V = 3 - \cancel{2xy}$$

$$C'(y) = 3 \implies C(y) = \int C'(y)\,dy = \int 3\,dy = 3y + C \qquad \boxed{\varphi = x^2 - xy^2 + 3y + C}$$

Pr.:

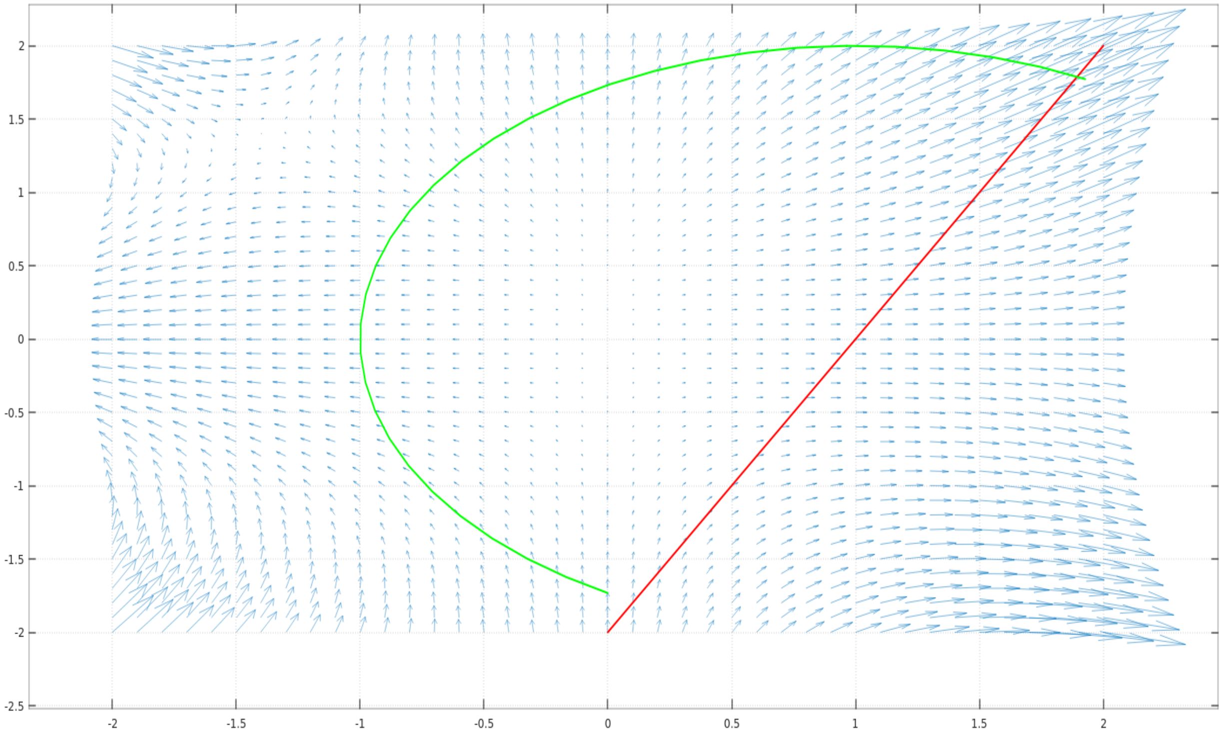
$\vec{f}$: $U = \frac{3}{4}x^2y^2 + 2x$ $\longrightarrow$ a) $\varphi(x,y) = ?$

$V = \frac{1}{2}x^3y + y^2$ b) $\int_{[0,-2]}^{[1,2]} \vec{f} \cdot d\vec{s} = ?$

$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}y^2x^3 + x^2 + \frac{y^3}{3} + ?$

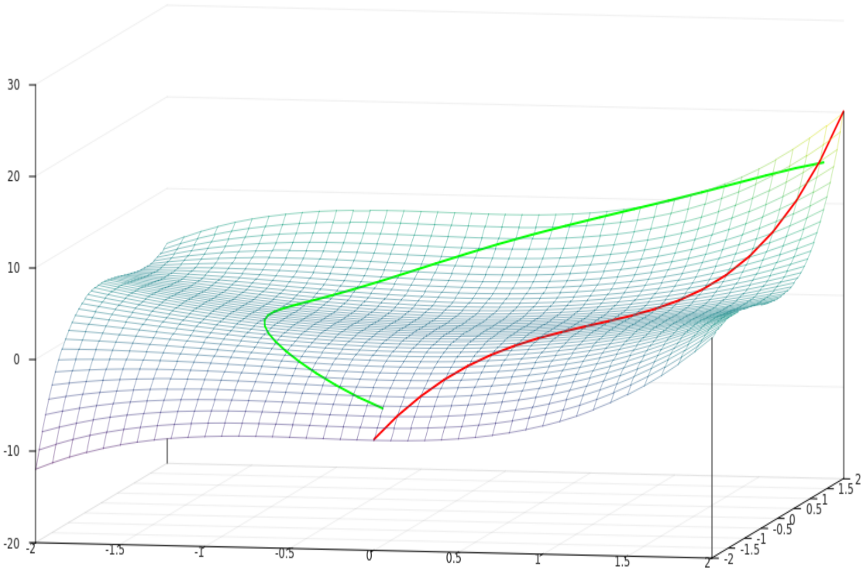
Pr.:

f = (3/4*x^2*y^2+2x, 1/2*x^3*y+y^2); prace mezi body A = [0, -2] a B = [2, 2]?



zobrazeni vektoroveho pole, jak pusobi v kazdem bode v okoli pocatku souradnic

pole f je potencialni
zobrazeni nalezeneho potencialu a zvyrazneni pohybu po primce a kruznici
mezi body A a B; vysledna prace je stejna :)



Křivkový integrál skalární funkce.

Křivkový integrál vektorové funkce.

Křivkový integrál vektorové funkce přes uzavřenou křivku. Greenova Věta.

Potenciální vektorové pole, nalezení potenciálu a aplikace na výpočet křivkového integrálu.

Na tabuli příklady.