Matematika II – přednáška 16

Co bude dneska?

Křivka zadaná průnikem dvou ploch.

Křivkový integrál skalární funkce.

Základní vlastnosti křivkového integrálu skal. funkce.

Délka křivky. Vybrané mechanické charakteristiky křivek.

Nějaké příklady

Tyto slidy jsou na adrese
http://marian.fsik.cvut.cz/~valasek/teaching.php
(pro osobní potřeby).

Shrnutí co bylo minule

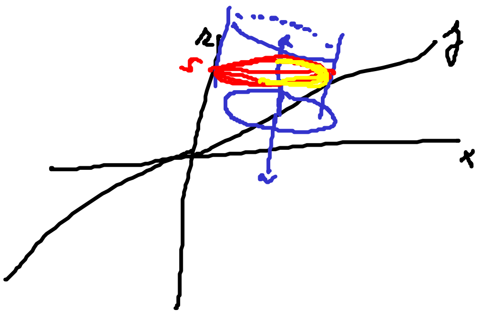
Jednoduchá hladká křivka.

Parametrizace - definice, vlastnosti, základní typy.

Př: Křivka $C \subset E_3$ je dána $\boxed{x^2 + (y-2)^2 = 1}$; $\boxed{x \geq 0}$; $\boxed{z = 5}$

$A = [0,3,5]$

$B = ?$ $\Rightarrow P(t) = ?$



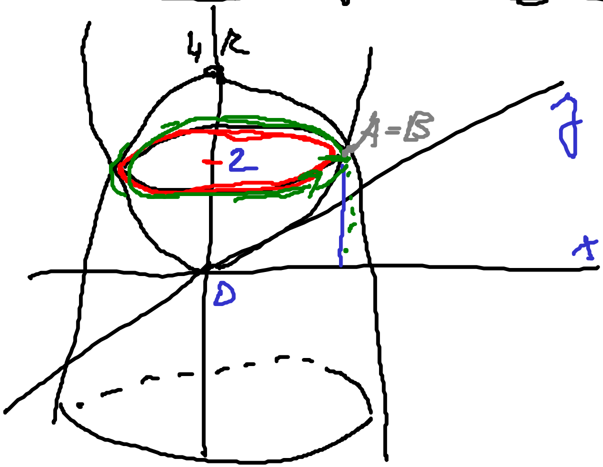
$P(\varphi) = ?$

Křivka zadaná průnikem dvou ploch v $\mathbb{E}_3$

Ukážeme na příkladu na tabuli.

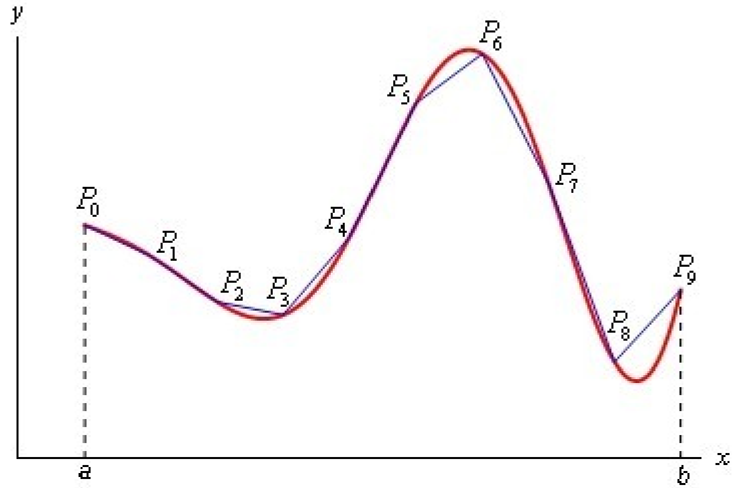
Př.: 1, 2 plochy $z = x^2 + y^2$ a $z = 4 - x^2 - y^2$ $\Rightarrow$ parametr. průsečnice?

+ info o orientaci křivky



Křivkový integrál ze skaláru

Moment setrvačnosti švihadla



Délka křivky

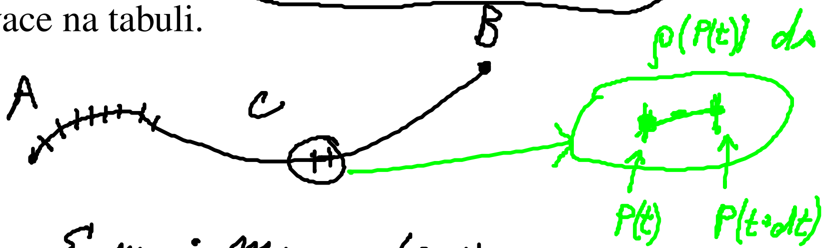
Váha cívky

Tento příklad použijeme v dále motivaci.

Křivkový integrál skalární funkce (KI 1.druhu)

hmotnost drátu $\rightarrow$ $m = \int_C \rho(t)\, ds$

Motivace na tabuli.



$- \; m = \sum m_i \; ; \; m_i = \rho(P(t))\, ds$

$ds = ?$

$m = \sum \rho(P(t)) \cdot (?)$

Křivkový integrál skalární funkce (KI 1.druhu)

Definice (křivkový integrál skalární funkce na jednoduché hladké křivce). Nechť C je jednoduchá hladká křivka v $\mathbb{E}_2$ nebo v $\mathbb{E}_3$ a P je její parametrizace, definovaná v intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť f je funkce, která je definovaná a omezená na křivce C. Existuje-li Riemannův integrál $\int_a^b f(P(t)) \cdot \|\dot{P}(t)\| \, dt$, pak o funkci f říkáme, že je *integrovatelná* na křivce C. *Křivkový integrál* skalární funkce f na křivce C pak označujeme $\int_C f \, ds$ a definujeme jej rovnicí

$$\int_C f \, ds = \int_a^b f(P(t)) \cdot \|\dot{P}(t)\| \, dt.$$

Říkáme, že "funkce f je integrovatelná na křivce C" či, že "křivkový integrál funkce f na C existuje".

Křivkový integrál skalární funkce (KI 1.druhu)

Definice (křivkový integrál skalární funkce na jednoduché hladké křivce). Nechť C je jednoduchá hladká křivka v $\mathbb{E}_2$ nebo v $\mathbb{E}_3$ a P je její parametrizace, definovaná v intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť f je funkce, která je definovaná a omezená na křivce C. Existuje-li Riemannův integrál $\int_a^b f(P(t)) \cdot \|\dot{P}(t)\|\, dt$, pak o funkci f říkáme, že je *integrovatelná* na křivce C. *Křivkový integrál* skalární funkce f na křivce C pak označujeme $\int_C f\, ds$ a definujeme jej rovnicí

$$\int_C f\, ds = \int_a^b f(P(t)) \cdot \|\dot{P}(t)\|\, dt.$$

Říkáme, že "funkce f je integrovatelná na křivce C" či, že "křivkový integrál funkce f na C existuje".

Poznámka: Existence ani hodnota křivkového integrálu nezávisí na zvolené paramatrizaci křivky C.

Jednoduchá po částech hladká křivka

Buď $C_i,\ i = 1 \ldots n$, hladká jednoduchá křivka. Buď dále $C = \bigcup_{i=1}^{n}$. Pak C nazýváme jednoduchá po částech hladká křivka.

Příklady na tabuli.

Jednoduchá po částech hladká křivka

Buď $C_i,\ i = 1 \dots n$, hladká jednoduchá křivka. Buď dále $C = \bigcup_{i=1}^{n}$. Pak C nazýváme jednoduchá po částech hladká křivka.

Příklady na tabuli.

Definice (křivkový integrál skalární funkce na jednoduché po částech hladké křivce). Nechť C je jednoduchá po částech hladká křivka v $\mathbb{E}_2$ nebo v $\mathbb{E}_3$, která je složena z jednoduchých hladkých křivek $C_1, \dots, C_n$. Nechť f je skalární funkce, která je definovaná a omezená na křivce C. Je-li funkce f integrovatelná na každé z křivek $C_1, \dots, C_n$, pak říkáme, že je *integrovatelná* na křivce C. *Křivkový integrál* skalární funkce f na křivce C pak definujeme rovnicí

$$\int_C f\ ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f\ ds.$$

Místo “křivkový integrál skalární funkce” se často používá název *křivkový integrál 1. druhu*.

Délka křivky

Je-li C jednoduchá po částech hladká křivka v $\mathbb{E}_2$ nebo v $\mathbb{E}_3$, pak integrálem $\int_C 1\, ds$ definujeme *délku* křivky C. Značíme ji $l(C)$.

Z předešlých úvah plyne, že ve speciálním případě, kdy C je jednoduchá hladká křivka a P je její parametrizace definovaná v intervalu $\langle a, b \rangle$, můžeme délku křivky C vyjádřit:

$$l(C) = \int_C 1\, ds = \int_a^b 1 \cdot \|\dot{P}(t)\|\, dt.$$

Důležité vlastnosti křivkového integrálu skalární funkce

Křivkový integrál je definován pomocí jednorozměrného Riemanova integrálu. Většina vlastností obou integrálů je tedy stejná.

a) **Postačující podmínka pro existenci křivkového integrálu skalární funkce.** Je-li funkce f spojitá na jednoduché po částech hladké křivce C, pak je na křivce C integrovatelná (tj. integrál $\int_C f\ ds$ existuje).

b) **Linearita křivkového integrálu.** Jsou-li f a g integrovatelné funkce na křivce C a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak $f+g$ a αf jsou také integrovatelné funkce na C a

$$\int_C (f+g)\ ds = \int_C f\ ds + \int_C g\ ds,$$

$$\int_C \alpha \cdot f\ ds = \alpha \cdot \int_C f\ ds.$$

c) Je-li f integrovatelná funkce na křivce C a funkce g se liší od f nejvýše v konečně mnoha bodech, pak g je také integrovatelná funkce na křivce C a

$$\int_C g\, ds = \int_C f\, ds.$$

!

d) Je-li f integrovatelná funkce na křivce C, pak je také integrovatelnou funkcí na křivce $-C$ a

$$\int_{-C} f\, ds = \int_C f\, ds.$$

„hmotnost drátu nezávisí na orientaci křivky!“

e) Jsou-li f a g integrovatelné funkce na křivce C takové, že $f(X) \geq g(X)$ ve všech bodech $X \in C$, pak

$$\int_C f\, ds \geq \int_C g\, ds.$$

Speciálně, je-li $f(X) \geq 0$ ve všech bodech $X \in M$, pak $\displaystyle\int_C f\, ds \geq 0.$

Výpočet křivkového integrálu skalární funkce

Předpokládejme, že $P = [\phi, \psi, \vartheta]$ je parametrizace jednoduché hladké křivky C, definovaná v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Integrál počítáme pomocí předchozího vzorce.

a) dosadíme do funkce f:

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \vartheta(t),$$

b) dosadíme do integrálu za ds:

$$ds = \|\dot{P}(t)\|\,dt = \left\|\big(\dot{\phi}(t),\,\dot{\psi}(t),\,\dot{\vartheta}(t)\big)\right\|\,dt = \sqrt{\dot{\phi}(t)^2 + \dot{\psi}(t)^2 + \dot{\vartheta}(t)^2}\,dt,$$

c) integrujeme podle t na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Příklady na tabuli.

Některé aplikace křivkového integrálu skalární funkce

Předpokládejme, že drát nebo struna má tvar křivky C v $\mathbb{E}_k$ ($k = 2$ nebo $k = 3$). Na křivce je rozložena hmota s délkovou hustotou $\rho(x, y)$ (je-li $k = 2$) nebo $\rho(x, y, z)$ (je-li $k = 3$). (ρ je hmotnost, vztažená k jednotce délky.

I. $k = 2$

celková hmotnost $\quad m = \int_C \rho(x, y)\, ds \qquad$ [kg],

statický moment

vzhledem k ose x $\quad m_x = \int_C y \cdot \rho(x, y)\, ds \quad$ [kg · m],

vzhledem k ose y . $\quad m_y = \int_C x \cdot \rho(x, y)\, ds \quad$ [kg · m],

souřadnice těžiště $\quad x_T = \dfrac{m_y}{m}, \quad y_T = \dfrac{m_x}{m} \quad$ [m],

moment setrvačnosti

vzhledem k ose x ... $J_x = \int_C y^2 \cdot \rho(x,y)\, ds$ [kg · m²],

vzhledem k ose y ... $J_y = \int_C x^2 \cdot \rho(x,y)\, ds$ [kg · m²],

vzhledem k počátku . $J_0 = \int_C (x^2 + y^2) \cdot \rho(x,y)\, ds$ [kg · m²].

II. $k = 3$

celková hmotnost .. $\quad m = \int_C \rho(x,y,z)\, ds \qquad [\mathrm{kg}],$

statický moment

vzhledem k rovině $xy \quad m_{xy} = \int_C z \cdot \rho(x,y,z)\, ds \qquad [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}],$

vzhledem k rovině $xz \quad m_{xz} = \int_C y \cdot \rho(x,y,z)\, ds \qquad [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}],$

vzhledem k rovině $yz \quad m_{yz} = \int_C x \cdot \rho(x,y,z)\, ds \qquad [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}],$

souřadnice těžiště .. $\quad x_T = \frac{m_{yz}}{m}, \quad y_T = \frac{m_{xz}}{m} \quad z_T = \frac{m_{xy}}{m} \quad [\mathrm{m}],$

moment setrvačnosti

vzhledem k rovině xy $$J_{xy} = \int_C z^2 \cdot \rho(x,y,z)\, ds \qquad [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2],$$

vzhledem k rovině xz $$J_{xz} = \int_C y^2 \cdot \rho(x,y,z)\, ds \qquad [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2],$$

vzhledem k rovině yz $$J_{yz} = \int_C x^2 \cdot \rho(x,y,z)\, ds \qquad [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2],$$

vzhledem k ose x ... $$J_x = \int_C (y^2 + z^2) \cdot \rho(x,y,z)\, ds \qquad [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2],$$

vzhledem k ose y .... $$J_y = \int_C (x^2 + z^2) \cdot \rho(x,y,z)\, ds \qquad [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2],$$

vzhledem k ose z .... $$J_z = \int_C (x^2 + y^2) \cdot \rho(x,y,z)\, ds \qquad [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2],$$

vzhledem k počátku . $$J_0 = \int_C (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \rho(x,y,z)\, ds \qquad [\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2].$$