

## Matematika II – přednáška 3

### Co bude dneska?

Připomenutí plus příklad spojitě složené funkce více proměnných, parciální derivace, vlastnosti parciální derivace.

Parciální derivace a spojitost funkce více proměnných.

Diferenciál funkce. Parciální derivace složené funkce.

P.S.: Nějaké příklady.

Tyto slidy jsou na adrese

[http://marian.fsik.cvut.cz/~neustupa/M2\\_Neu\\_prednaska03.pdf](http://marian.fsik.cvut.cz/~neustupa/M2_Neu_prednaska03.pdf)

Slidy nenahrazují skripta ani zápisky ani účast na přednášce a jsou pouze pro osobní potřeby.

**Spojitě složené funkce více proměnných - příklad**

Najděme kde všude je spojitá funkce:

$$h(x, y, z) = \sqrt{x + y} + \sin(z + x)$$

## Parciální derivace - definice, připomenutí

**Definice (parciální derivace v bodě  $A$ ).** Předpokládejme, že  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  je funkce  $n$  proměnných,  $A = [a_1, \dots, a_n] \in D(f)$ ,  $i$  je jedno z čísel  $1, \dots, n$  a  $\mathbf{e}_i$  je jednotkový vektor v  $\mathbb{E}_n$ , orientovaný souhlasně se souřadnou osou  $x_i$ . Existuje-li

konečná limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A + h\mathbf{e}_i) - f(A)}{h},$$

pak její hodnotu nazýváme *parciální derivací* funkce  $f$  *podle proměnné  $x_i$  v bodě  $A$*  a označujeme ji

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} f(A) \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial y}{\partial x_i}(A).$$

Příklady PD.

PD jako funkce. Jak je to s definičním oborem?

## Parciální derivace - definice, připomenutí

Příklady PD.

PD jako funkce. Jak je to s definičním oborem?

Vždy platí

$$D\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \subseteq D(f)$$

## Parciální derivace a spojitost funkce více proměnných

U funkce jedné proměnné platí, že z existence derivace v bodě  $x_0$  plyne spojitost funkce v tomto bodě a existence tečny. (Totéž platí pro interval)

Je totéž pravda pro funkci více proměnných?

Tedy: Plyne z existence parciálních derivací funkce více proměnných v bodě  $A \in \mathbb{E}_n$  spojitost této funkce v bodě  $A$ ?

Příklad na tabuli.

## Parciální derivace a spojitost funkce více proměnných

U funkce jedné proměnné platí, že z existence derivace v bodě  $x_0$  plyne spojitost funkce v tomto bodě a existence tečny. (Totéž platí pro interval)

Je totéž pravda pro funkci více proměnných?

Tedy: Plyne z existence parciálních derivací funkce více proměnných v bodě  $A \in \mathbb{E}_n$  spojitost této funkce v bodě  $A$ ?

NE.

- 1) *Co zajišťuje u funkce více proměnných spojitost?*
- 2) *Co zajišťuje u funkce více proměnných existenci tečné roviny a jaká je její rovnice?*

## Diferencovatelnost funkce

U funkce jedné proměnné, se se funkce  $y = f(x)$  mající derivaci v bodě  $a$  nazývá diferencovatelná v bodě  $a$ .

U funkce více proměnných je k tomu potřeba něco více.

**Tečná rovina, diferencovatelná funkce – motivace.**

Nechť  $y = f(x_1, x_2)$  je funkce dvou proměnných, jejímž grafem je plocha  $\sigma$ , a  $A = [a_1, a_2]$  je bod v  $D(f)$ .

$P$  je bod v  $\mathbb{E}_3$ , jehož souřadnice jsou  $x_1 = a_1$ ,  $x_2 = a_2$  a  $y = f(a_1, a_2)$ . Tj.  $P = [a_1, a_2, f(a_1, a_2)] = [A, f(A)] \in \sigma$ .

Přirozené požadavky na tečnou rovinu k ploše  $\sigma$  v bodě  $P$  jsou:

- a) *Tečná rovina prochází bodem  $P$ .*
- b) *Tečná rovina není rovnoběžná s osou  $y$ .*
- c) *Plocha  $\sigma$  se k tečné rovině v bodě  $P$  “přimyká”.*



Rovin splňující první dva požadavky je nekonečně mnoho. Co tedy znamená třetí podmínka. Jak ji matematicky zapsat?

Jsou to grafy všech možných lineárních funkcí  $y = L(X)$ , kde  $X = [x_1, x_2]$ ,

$$L(X) = f(A) + k_1 \cdot (x_1 - a_1) + k_2 \cdot (x_2 - a_2)$$

a  $k_1$  a  $k_2$  jsou reálné koeficienty.

Rovin splňující první dva požadavky je nekonečně mnoho. Co tedy znamená třetí podmínka. Jak ji matematicky zapsat?

Jsou to grafy všech možných lineárních funkcí  $y = L(X)$ , kde  $X = [x_1, x_2]$ ,

$$L(X) = f(A) + k_1 \cdot (x_1 - a_1) + k_2 \cdot (x_2 - a_2)$$

a  $k_1$  a  $k_2$  jsou reálné koeficienty.

Body na tečné rovině mají souřadnice  $[X, L(X)]$ . Body na ploše  $\sigma$  mají souřadnice  $[X, f(X)]$ . Tyto body se liší ve třetí souřadnici. Rozdíl třetích souřadnic je  $f(X) - L(X)$ .

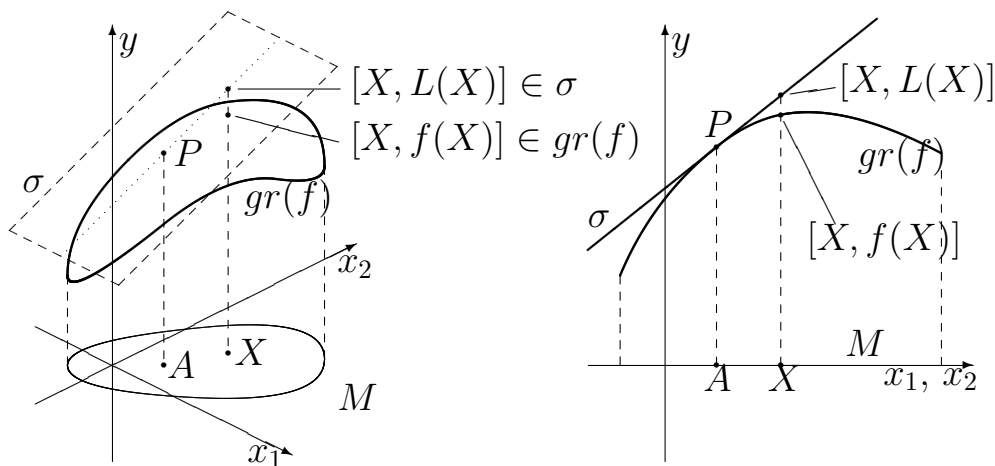
Zajímá nás TR v bodě  $P$ .

Blížíme-li se k bodu  $P$ , pro první dvě souřadnice bodů platí  $x_1 \rightarrow a_1$  a  $x_2 \rightarrow a_2$ .

Pak  $X \rightarrow A$ , tj.  $\|X - A\| \rightarrow 0$ .

Chceme, aby v blízkosti bodu  $P$  splývala tečná rovina s grafem funkce a to rychleji než se blíží bod  $X$  k bodu  $A$  (rychleji než  $\|X - A\|$ ). Tj. aby

$$\lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X) - L(X)}{\|X - A\|} = 0.$$



Obrázek ze skript

Shrnutí: Rovina  $y = L(X)$ , kde

$$L(X) = f(A) + k_1 \cdot (x_1 - a_1) + k_2 \cdot (x_2 - a_2)$$

splňuje požadavky a), b) a c) a můžeme ji tudíž nazvat tečnou rovinou k ploše  $\sigma$  v bodě  $P$ , jestliže je splněna podmínka

$$\lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X) - L(X)}{\|X - A\|} = 0.$$

Lze dokázat, že pak jsou koeficienty  $k_1$  a  $k_2$  jednoznačně určeny a tečná rovina je tudíž také jednoznačně určená.

Vše lze zobecnit pro funkci  $n$ -proměnných, pak  $L(X)$  má tvar

$$L(X) = f(A) + k_1 \cdot (x_1 - a_1) + \dots + k_n \cdot (x_n - a_n).$$

**Definice (diferencovatelná funkce).** Předpokládejme, že  $y = f(X) = f(x_1, \dots, x_n)$  je funkce  $n$  proměnných a  $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{E}_n$ . O funkci  $f$  říkáme, že je *diferencovatelná v bodě  $A$* , jestliže existuje lineární funkce  $L(X)$  taková, že

$$\lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X) - L(X)}{\|X - A\|} = 0.$$

O funkci  $f$  říkáme, že je *diferencovatelná v množině  $M \subset \mathbb{E}_n$* , jestliže je diferencovatelná v každém bodě množiny  $M$ .

**Věta.** Je-li funkce  $f$  ( $n$  proměnných) diferencovatelná v bodě  $A \in \mathbb{E}_n$ , pak je v bodě  $A$  spojitá.

Důkaz na tabuli

**Věta.** *Je-li funkce  $f$  ( $n$  proměnných) diferencovatelná v bodě  $A \in \mathbb{E}_n$ , pak má v bodě  $A$  parciální derivace podle všech proměnných.*

**Věta.** Je-li funkce  $f$  ( $n$  proměnných) diferencovatelná v bodě  $A \in \mathbb{E}_n$ , pak má v bodě  $A$  parciální derivace podle všech proměnných.

### Diferenciál funkce.

Chci nahradit funkci  $n$ -proměnných lineární funkcí (u funkce 2 proměnných plochou). Nejlepší aproximací je zřejmě ta jejímž grafem je tečná rovina.

Pro  $X = [x_1, \dots, x_n]$  “blízko”  $A$  tedy přibližně platí (pro  $n = 2$ )

$$L(X) = f(A) + k_1 \cdot (x_1 - a_1) + k_2 \cdot (x_2 - a_2).$$

toto lze přibližně zapsat jako  $f(X) \doteq f(A) + df$ , kde

$$df = k_1 \cdot (x_1 - a_1) + k_2 \cdot (x_2 - a_2).$$

Jak konkrétně vypočítat hodnotu  $k_i$  bude příště.

**Jak poznáme, že funkce je diferencovatelná.**

**Věta.** Předpokládejme, že  $f$  je funkce  $n$  proměnných.

- a) Má-li funkce  $f$  spojité parciální derivace podle všech proměnných v bodě  $A \in \mathbb{E}_n$ , pak je diferencovatelná v bodě  $A$ .
- b) Je-li  $M$  otevřená množina v  $\mathbb{E}_n$  a funkce  $f$  má spojité parciální derivace podle všech proměnných v množině  $M$ , pak je diferencovatelná v množině  $M$ .

Příklad.  $f(x, y) = 2 \ln x - y^2$



## Parciální derivace složené funkce.

Na tabuli.