# Matematika II – přednáška 9

## Co bude dneska?

Dělení obdélníku a jeho norma.

Riemanovy součty a jejich limita.

Dvojný integrál na obdélníku a na obecné množině.

Měřitelná množina a Jordanova míra množiny.

Základní vlastnosti dvojného integrálu. (Fubiniho věta)

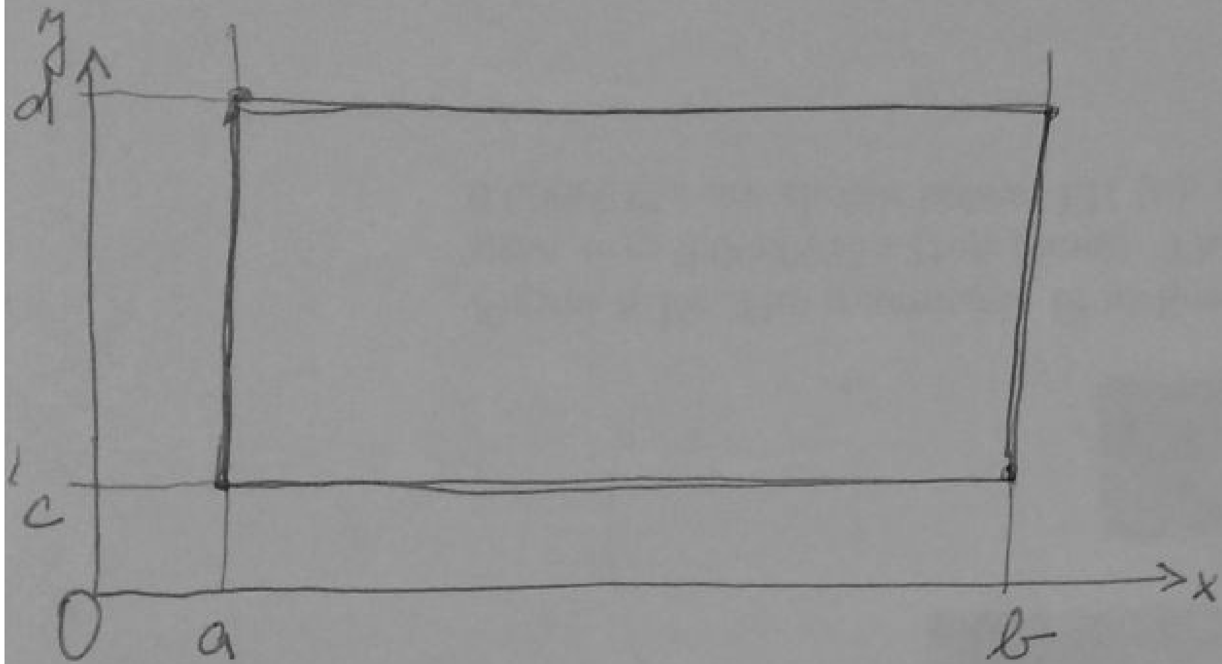
Tyto slidy jsou na adrese
$http://marian.fsik.cvut.cz/\tilde{}neustupa/M2\_Neu\_prednaska09.pdf$
(pro osobní potřeby).

## Dělení obdélníku a norma dělení

Na tabuli.

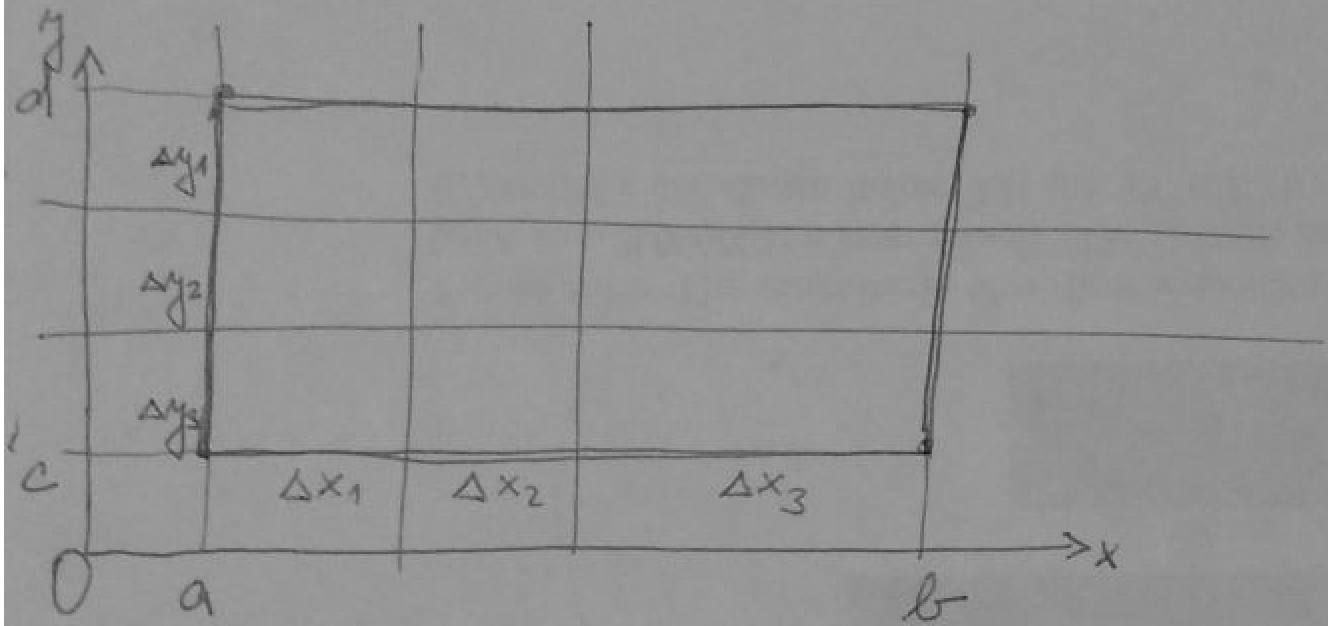
# Obdélník a jeho dělení

$$O = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \subset \mathbb{E}_2$$



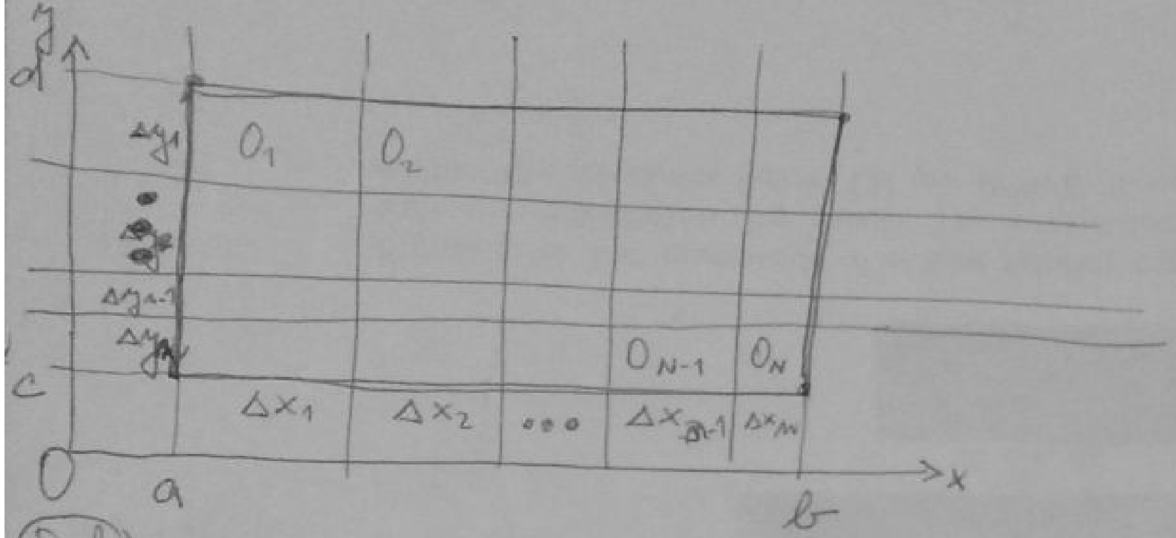
# Obdélník a jeho dělení

$$O = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \subset \mathbb{E}_2$$



# Obdélník a jeho dělení

$$O = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \subset \mathbb{E}_2$$




**Def:** Systém rozdělení obdélníku $O$ na dílčí obdélníky $O_1, O_2 \dots O_N$ nazveme __dělení obd. $O$.__ (daném sítí úseček $\Delta x_1 \dots \Delta x_m$ a $\Delta y_1 \dots \Delta y_n$)

Tomuto dělení $D$ přiřadíme číslo zvané __norma dělení $D$__

jako

$$\|D\| = \max \{\Delta x_1, \dots, \Delta x_m, \Delta y_1, \dots \Delta y_n\}.$$

(tj. největší stranu malých obdélníků).

## Dělení obdélníku a norma dělení

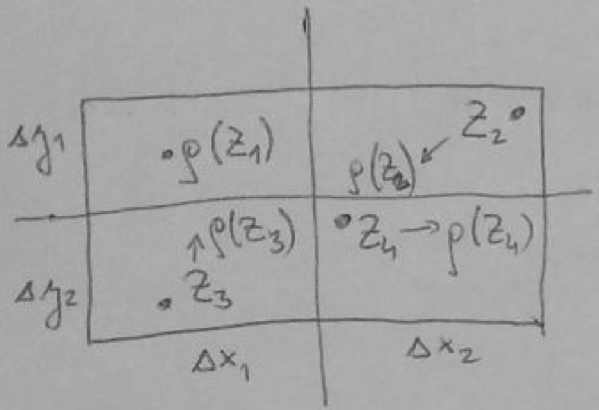
Na tabuli.

Motivace pro dvojný integrál.

# Fyzikální motivace

Chceme spočítat váhu obdélníkové desky (s proměnnou hustotou $\rho(x,y)$).

Jak na to?

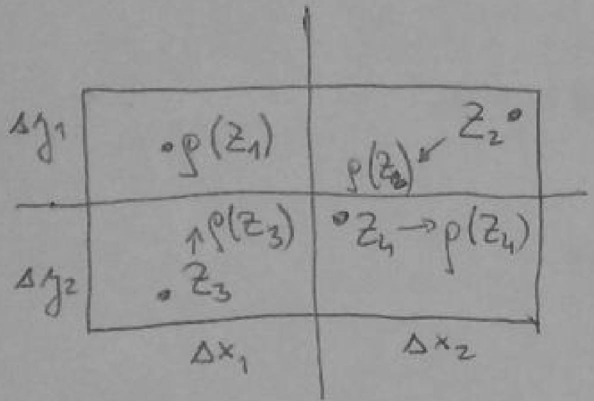



$$m_{odhad} = \sum_{i=1}^{4} m_i = \sum_{i=1}^{4} \rho(Z_i)\cdot O_i$$

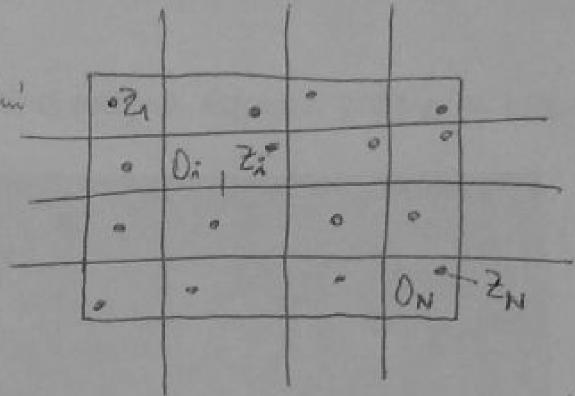
# Fyzikální motivace

Chceme spočítat váhu obdélníkové desky (s proměnnou hustotou $\rho(x,y)$).

Jak na to?




Zjemnění Dělení $\Longrightarrow$




$\Longrightarrow$ ?

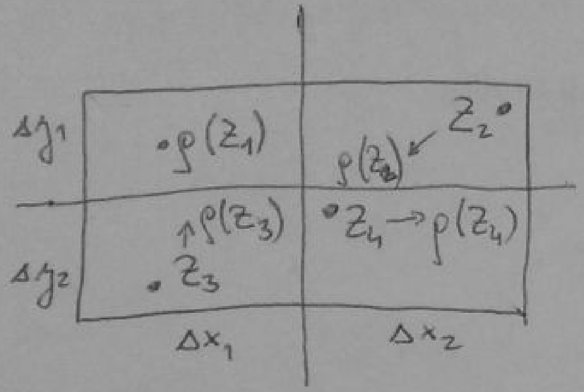
$$m_{odhad} = \sum_{i=1}^{4} m_i = \sum_{i=1}^{4} \rho(Z_i)\cdot O_i$$

$$m_{odhad2} = \sum_{i=1}^{N} \rho(Z_i)\cdot O_i = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

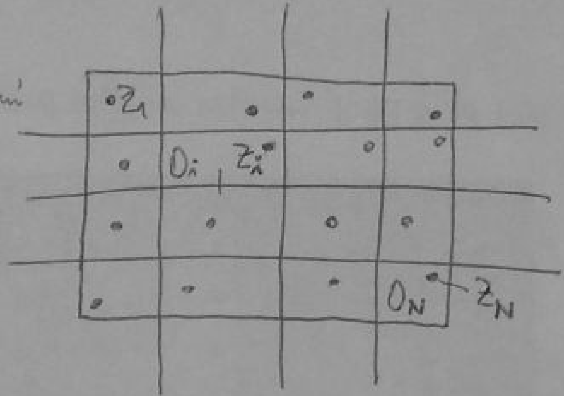
# Fyzikální motivace (dvojného integrálu)

Chceme spočítat váhu obdélníkové desky (s proměnnou hustotou $\rho(x,y)$).

Jak na to?




Zjemníme Dělení $\Longrightarrow$




$\Longrightarrow$ ?

$$m_{odhad} = \sum_{i=1}^{4} m_i = \sum_{i=1}^{4} \rho(z_i)\cdot O_i$$

$$m_{odhad2} = \sum_{i=1}^{N} \rho(z_i)\cdot O_i = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

"nekonečně jemné D"

$m_{desky}$

---

velká chyba odhadu $\longrightarrow$ menší $\longrightarrow$ $m_{desky} = \lim_{\|D\|\to 0^+} m_{odhad} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} \rho(z_i) O_i$

Pozor, nazpět k matematice!

$$m_{desky} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} \rho(z_i)\cdot O_i$$ bude platit pouze při splnění NĚJAKÝCH PŘEDPOKLADŮ (později).

Dále nahraďme značení

$$A\Big(\underset{\substack{\uparrow\\ \rho}}{f},\ \underset{\substack{\uparrow\\ \{\Delta x_i, \Delta y_i\}}}{D},\ \underset{\substack{\nwarrow\\ \{z_i\}}}{V}\Big) := m_{odhad} = \sum_{i=1}^{N} \rho(z_i)\cdot \underbrace{\Delta x_i \Delta y_i}_{\text{plocha } O_i}$$

## Riemanovy součty a jejich limita

Nechť je $f(x,y)$ funkce omezená na obdélníku $O = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$ v $\mathbb{E}_2$.

Nechť $D$ je dělení $O$ na dílčí obdélníky $O_1, \dots, O_n$, jejichž strany mají délky $\Delta x_1$, $\Delta y_1$, $\dots$, $\Delta x_n$, $\Delta y_n$.

## Riemanovy součty a jejich limita

Nechť je $f(x,y)$ funkce omezená na obdélníku $O = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$ v $\mathbb{E}_2$.

Nechť $D$ je dělení $O$ na dílčí obdélníky $O_1, \dots, O_n$, jejichž strany mají délky $\Delta x_1$, $\Delta y_1$, $\dots$, $\Delta x_n$, $\Delta y_n$.

Nyní vyberme v každém z obdélníků jeden bod a označme $\mathcal{V}$ systém vybraných bodů $Z_i \in O_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Pak *Riemannovým součtem* funkce $f$ na obdélníku $O$, odpovídajícím dělení $D$ a systému bodů $\mathcal{V}$, nazýváme

$$s(f, D, \mathcal{V}) = \sum_{i=1}^{n} f(Z_i) \cdot \Delta x_i \, \Delta y_i \, .$$

Říkáme, že číslo $S$ je *limitou Riemannových součtů* $s(f, P, V)$ *pro* $\|D\| \to 0+$, jestliže ke každému danému $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení $D$ obdélníku $O$ a pro každý zvolený systém $\mathcal{V}$ platí:

$$\|D\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |s(f, D, \mathcal{V}) - S| < \epsilon.$$

Píšeme:

$$\lim_{\|D\| \to 0+} s(f, D, \mathcal{V}) \;=\; S.$$

Říkáme, že číslo $S$ je *limitou Riemannových součtů* $s(f, P, V)$ *pro* $\|D\| \to 0+$, jestliže ke každému danému $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení $D$ obdélníku $O$ a pro každý zvolený systém $\mathcal{V}$ platí:

$$\|D\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |s(f, D, \mathcal{V}) - S| < \epsilon.$$

Píšeme:

$$\lim_{\|D\| \to 0+} s(f, D, \mathcal{V}) = S.$$

## Dvojný integrál na obdélníku

Jestliže tato limita existuje, pak číslo $S$ nazýváme *dvojným integrálem* funkce $f$ *na obdélníku* $O$. Integrál obvykle značíme

$$\iint_O f(x, y)\, dx\, dy \qquad \text{nebo} \qquad \iint_O f\, dx\, dy.$$

Jestliže limita existuje, říkáme, že "dvojný integrál $\iint_O f\, dx\, dy$ existuje" nebo že "funkce $f$ je *integrovatelná* na obdélníku $O$".

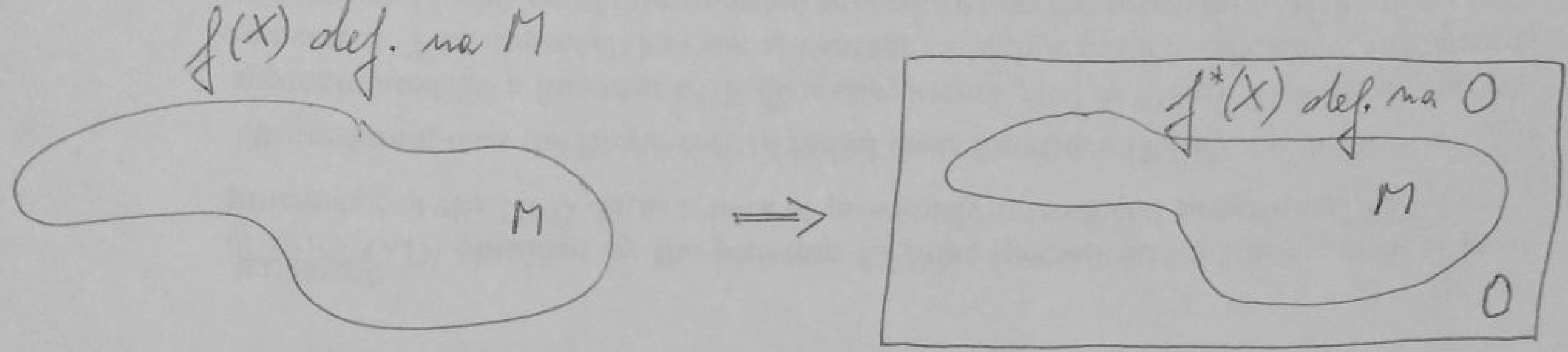
## Dvojný integrál na obecné množině

Na tabuli.

# Dělení obecné množiny

Využijeme stejnou konstrukci i pro integraci obecné množiny $M \subset \mathbb{E}_2$.
Jen najdeme obdélník $O$, aby $M \subset O$.
A rozšíříme definici f-ce $f(x,y)$ na $O$, tj. $f \to f^*$ tak, že

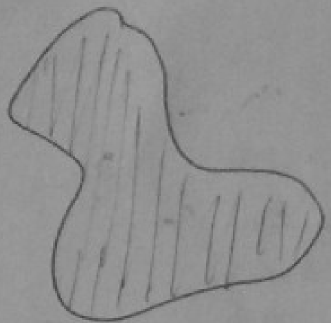
$$f^*(X) = \begin{cases} f(X) & X \in M. \\ 0 & X \notin M, \text{ tj. } X \in O \setminus M. \end{cases}$$



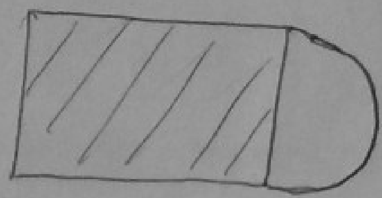

to už umíme!
(integrovat)

## Obecná množina

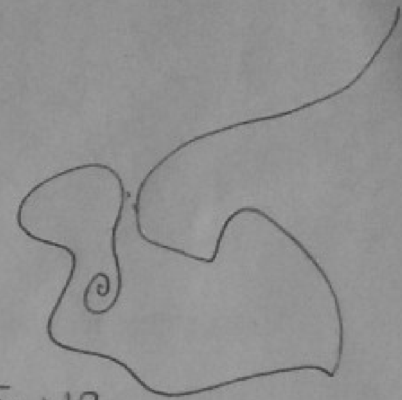
**Př.:**



ok



co s touto ~~[illegible]~~ půlenou kružnicí?
jak ji pokryju obdélníky?



A úplně obecnou křivkou?

→ Proto **Jordanova míra.**

## Měřitelná množina v $E_2$ a její Jordanova míra

Omezená množina není dostatečné omezení. (Př.) Abychom se tedy omezili jen na "rozumné" množiny zavádíme:

**Definice (měřitelná množina).** *Předpokládejme, že $M$ je omezená množina v $\mathbb{E}_2$. Říkáme, že tato množina je měřitelná (v Jordanově smyslu), jestliže dvojný integrál konstantní funkce $f(x,y) = 1$ na $M$ existuje. V tomto případě nazýváme číslo*

$$\mu_2(M) \; = \; \iint_M dx\, dy$$

*dvourozměrnou Jordanovou mírou množiny $M$.*

## Množiny míry nula:

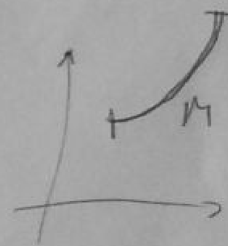
a) $\emptyset$ – prázdná množina

$M = \{X_1, X_2\}$ – konečný počet bodů

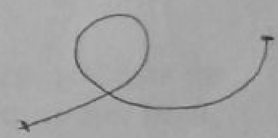

b) úsečky

grafy f-ce jedné proměnné na uzavřeném int.

$\hookrightarrow M = \{X = [x,y] \in \mathbb{E}_2 \mid y = f(x),\ x \in \langle a, b \rangle\}$




c) jednoduché hladké křivky



Geometrická interpretace dvourozměrné míry je obsah množiny $M$.

Množiny, které mají míru $0$.

**Věta.** a) *Sjednocení konečně mnoha množin míry nula je množina míry nula.*

b) *Je-li $N$ množina míry nula a $M \subset N$, pak $M$ je také množina míry nula.*

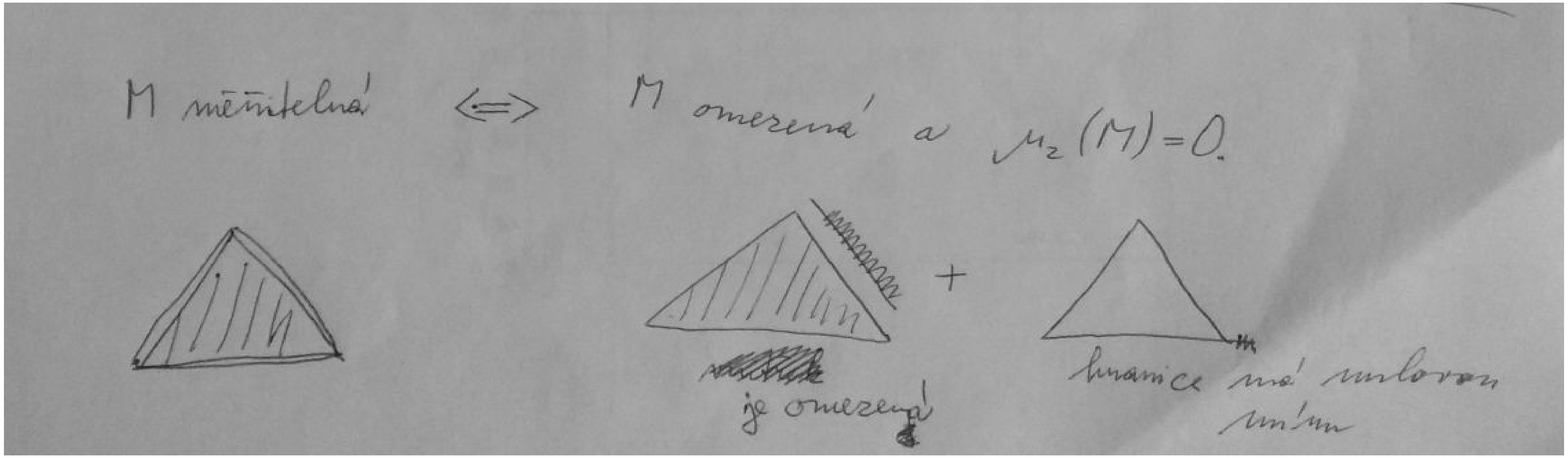
Geometrická interpretace dvourozměrné míry je obsah množiny $M$.

Množiny, které mají míru $0$.

**Věta.** a) *Sjednocení konečně mnoha množin míry nula je množina míry nula.*
b) *Je-li $N$ množina míry nula a $M \subset N$, pak $M$ je také množina míry nula.*

**Věta (Nutná a postačující podmínka pro měřitelnost množiny v $\mathbb{E}_2$).** *Množina $M \subset \mathbb{E}_2$ je měřitelná (v Jordanově smyslu) právě tehdy, je-li omezená a $\mu_2(\partial M) = 0$.*

# Obrázek k větě:



## Existence a vlastnosti dvojného integrálu

**Věta (Postačující podmínka pro existenci dvojného integrálu).**
*Nechť $M$ je měřitelná množina v $\mathbb{E}_2$ a $f$ je omezená a spojitá funkce na $M$. Pak dvojný integrál $\iint_M f \, dx \, dy$ existuje.*

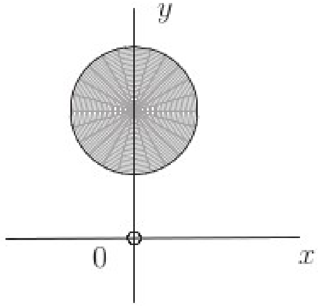
viz Sbírka

***Příklad* 237**. Rozhodněte, zda daný integrál $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ existuje, jestliže :

a) $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + (y-1)^2 \le \frac{1}{4}\}$;
b) $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \le 1\}$;
c) $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + (y-1)^2 \le 2\}$.

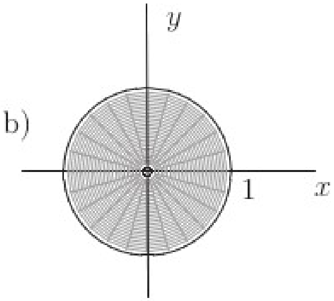
*Řešení :* Budeme vycházet z toho, že dvojný a trojný integrál (vlastní) je definován pouze pro funkce omezené na omezené množině $D$ a dále budeme používat větu o existenci.

a)



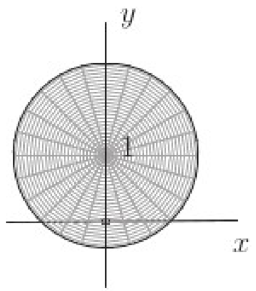

Množina $D$ je měřitelná, tedy $D$ je omezená a její hranice má míru 0 a $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ je spojitá a omezená na $D$. Integrál existuje.

b)




Množina $D$ je měřitelná, ale $f(x, y)$ není omezená v $D$, protože $[0, 0] \in D$ a $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty$. Integrál neexistuje.

c)




$f(x, y)$ opět není omezená na $D$ $([0, 0] \in D)$, integrál neexistuje.

■

## Existence a vlastnosti dvojného integrálu

**Věta (Postačující podmínka pro existenci dvojného integrálu).**
*Nechť* $M$ *je měřitelná množina v* $\mathbb{E}_2$ *a* $f$ *je omezená a spojitá funkce na* $M$*. Pak dvojný integrál* $\iint_M f \, dx \, dy$ *existuje.*

## Některé vlastnosti dvojného integrálu

Na tabuli.

# Vlastnosti dvojného integrálu

- Linearita

$$\iint_M (f+g)\,dx\,dy = \iint_M f\,dx\,dy + \iint_M g\,dx\,dy$$

$$\iint_M (\alpha \cdot f)\,dx\,dy = \alpha \cdot \iint_M f\,dx\,dy \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- Aditivita

$$\iint_{M_1 \cup M_2} f\,dx\,dy = \iint_{M_1} f\,dx\,dy + \iint_{M_2} f\,dx\,dy,$$

pokud se $M_1$ a $M_2$ překrývají nejvýše na mn. míry nula, tj. $N = M_1 \cap M_2$ a $\mu_2(N) = 0$ nebo $N = \emptyset$.

- $f$ a $g$ se liší na množině míry nula.

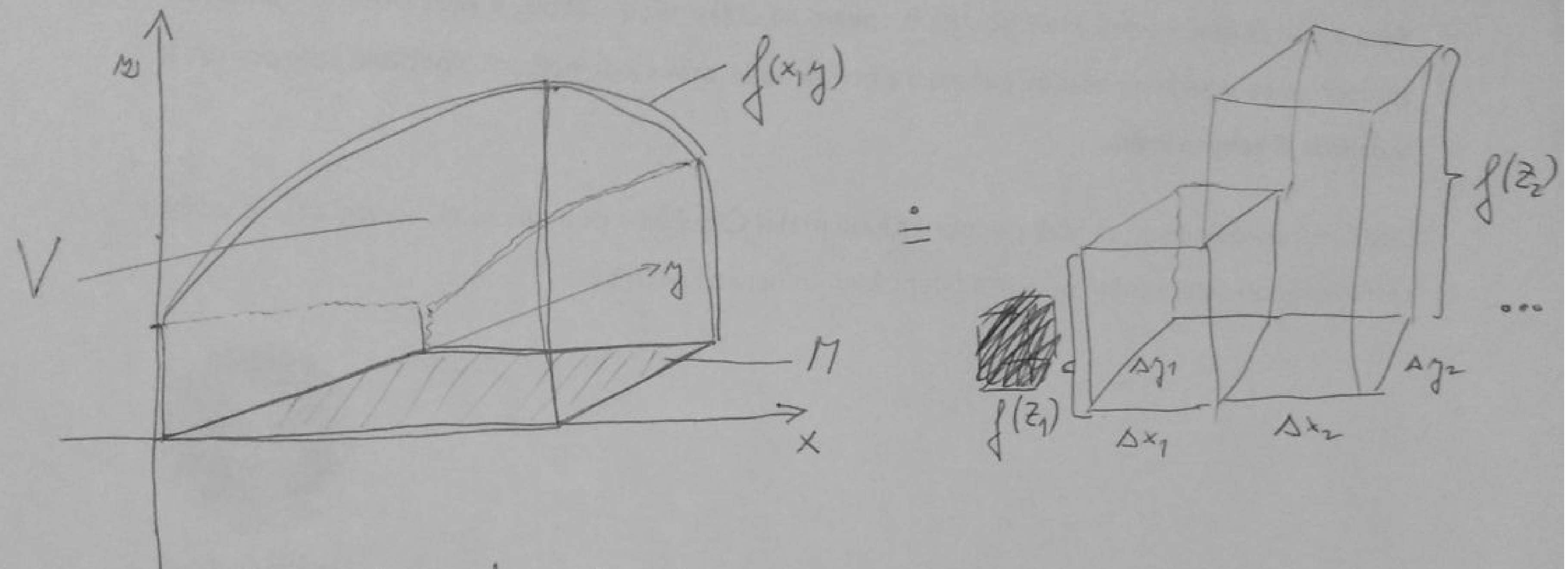
Pak $\iint_M f\,dx\,dy = \iint_M g\,dx\,dy$ (nezávisí na hodnotě f-ce na hranicích množiny).

- $\mu_2(M) = 0$, pak $\iint_M f\,dx\,dy = 0$

- Je-li $f(x,y) \geq 0 \quad \forall\, [x,y] \in M$

pak i $\iint_M f(x,y)\,dx\,dy \geq 0$.

Kromě fyzikální i geometrická interpretace

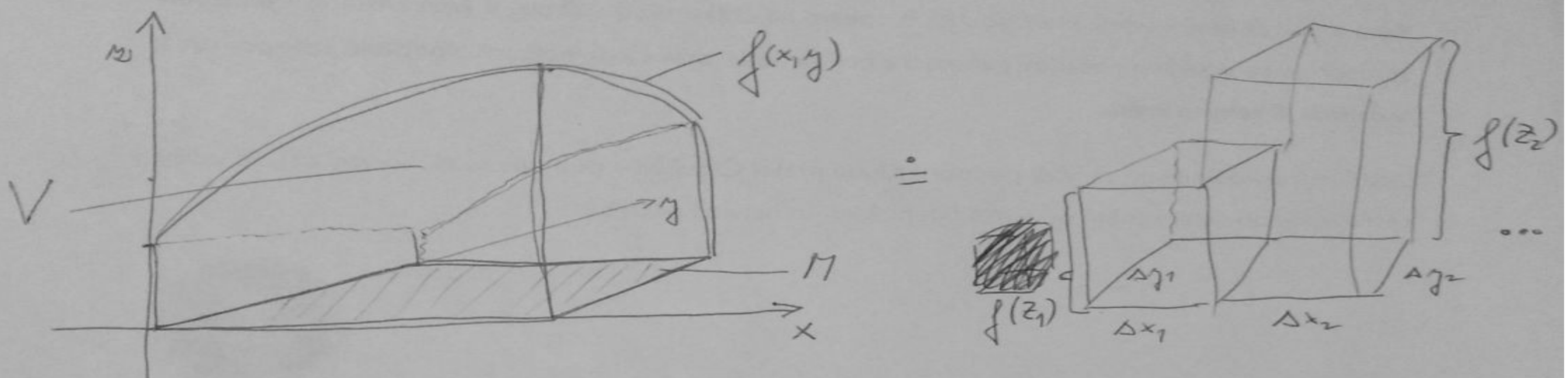



Objem V pod grafem f-ce dvou proměnných

Rozdíl fyzikálního vs. geometrického významu?
(např. hmotnost vs. objem)

Závisí na naší interpretaci f-ce f! Jaké má jednotky?

Kromě fyzikální i <u>geometrická interpretace</u>




Objem V pod grafem f-ce dvou proměnných

Rozdíl fyzikálního vs. geometrického významu?
(např. hmotnost vs. objem)

Závisí na naší interpretaci f-ce f! Jaké má jednotky?

$$m = \iint_M \rho(x,y)\,dx\,dy \rightarrow \rho \text{ má význam plošné hustoty } [kg/m^2]$$

$$V = \iint_M f(x,y)\,dx\,dy \rightarrow f \text{ má význam výšky } [m]$$

## Shrnutí:

- "obdélníková" konstrukce dvojného integrálu
  ↳ fyzikální i geometrický význam (v závislosti na interpretaci integrované f-ce)
- ~~[illegible]~~ integrál definován přes limitu
- množiny míry nula (a měřitelnost množin)
- PS. zatím neumíme (pořádně) integrál spočítat, → půlště známe jen def.