Úvod

1 Normy vektorů a matic, vlastnosti matic

Příklad 1.1 Pro dané vektory $\mathbf{x} = (-1; 2; 1)^T, \mathbf{y} = (2; -3; -1)^T$ určete

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = ? \qquad \|\mathbf{x}\|_2 = ? \qquad \|\mathbf{x}\|_1 = ? \qquad \|\mathbf{y}\|_\infty = ? \qquad \|\mathbf{y}\|_2 = ? \qquad \|\mathbf{y}\|_1 = ?$$

Příklad 1.2 Je dán vektor $\mathbf{x} = (-1; p; 2)^T$, $p \in \mathbb{R}$. Určete všechny hodnoty p tak, aby

$$\text{a)} \quad \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 4, \qquad \text{b)} \quad \|\mathbf{x}\|_2 \leq 3, \qquad \text{c)} \quad \|\mathbf{x}\|_1 \leq 7$$

Příklad 1.3 Graficky znázorněte množinu vektorů $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ takových, že

$$\text{a)} \quad \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 1, \qquad \text{b)} \quad \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1, \qquad \text{c)} \quad \|\mathbf{x}\|_1 \leq 1, \qquad \text{d)} \quad 1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \text{ a } \|\mathbf{x}\|_\infty \leq 2,$$

Příklad 1.4 Rozhodněte, které z následujících nerovností jsou platné pro všechny $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2, \qquad \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1, \qquad \|\mathbf{x}\|_1 \leq 2\|\mathbf{x}\|_\infty,$$

Je dána $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Volte $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^T$ a rozhodněte o platnosti nerovností

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 \leq \|\boldsymbol{A}\|_E, \qquad \|\boldsymbol{A}\|_E \leq \|\boldsymbol{A}\|_\infty.$$

Příklad 1.5 Jsou dány matice ($a \in \mathbb{R}$)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

a) Určete řádkovou, sloupcovou i Frobeniovu normu daných matic. Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory. Spočtěte spektrální poloměr. Pro které matice jsou vlastní vektory na sebe kolmé?

b) Zapište jak je definován pojem matice ostře diagonálně dominantní(ODD) a matice symetrická pozitivně definitní (SPD). Rozhodněte zda dané matice jsou ODD nebo SPD.

Příklad 1.6 Jsou dány matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

a) Určete řádkovou, sloupcovou i Frobeniovu normu daných matic. Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory. Spočtěte spektrální poloměr. Pro které matice jsou vlastní vektory na sebe kolmé?

b) Zapište jak je definován pojem matice ostře diagonálně dominantní(ODD) a matice symetrická pozitivně definitní (SPD). Rozhodněte zda dané matice jsou ODD nebo SPD.

Příklad 1.7 (MATLAB) Jsou dány matice a vektory pravých stran (matice $\boldsymbol{A}$ je stejná jako v Př. 1.5)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1.001 & -1 \\ -1 & 1.001 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}^* = \mathbf{b} + (10^{-5}) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Rozhodněte, zda matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou ODD nebo SPD ?

b) Spočtete řešení soustavy rovnic $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\boldsymbol{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$, $\boldsymbol{B}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}$ a $\boldsymbol{B}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_1$. Srovnejte rozdíl $\mathbf{b} - \mathbf{b}_1$ oproti $\mathbf{x} - \mathbf{x}_1$ respektive $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3$.

c) Zakreslete množinu $\mathcal{M} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{y} = \boldsymbol{A}\mathbf{x}, \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1\}$ (bez užití MATLABu). Návod: Pro přibližné vyjádření užijte bázi složenou z normovaných vlastních vektorů matice $\boldsymbol{A}$, tj $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2$, $\|\mathbf{u}_i\| = 1$. Vyjádřete vektor $\boldsymbol{A}\mathbf{x}$ v souřadném systému vlastních vektorů matice $\boldsymbol{A}$, tj. $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2$. Ukažte, jaká nerovnost platí pro β_i.

d) Zakreslete množinu $\mathcal{M}$ v MATLABu: Užijte polární souřadnice pro parametrizaci jednotkové kružnice, násobení maticí $\boldsymbol{A}$ a užijte příkaz `plot`.

e) Zakreslete množinu $\mathcal{M}_1 = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{y} = \boldsymbol{B}\mathbf{x}, \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1\}$.

f) Spočtěte číslo podmíněnnosti $\kappa = \lambda_{max}/\lambda_{min}$ pro matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$.

Příklad 1.8 (MATLAB) Je dána matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n = 10, 20, 50, 100, 200)$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Určete řádkovou, sloupcovou i Frobeniovu normu dané matice. Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory. Spočtěte spektrální poloměr.

b) Rozhodněte zda daná matice je ODD nebo SPD. Zdůvodněte.

c) Příkazem `eig` určete vlastní vektory matice. Vyberte vlastní vektory příslušné 2 největším a 2 nejmenším vlastním číslům dané matice. Pro tyto vektory $\mathbf{u} = (u_i)$ zobrazte jejich složky jako graf $[i, u_i]$, tj. např. příkazem `plot(u)`.

d) Spočtěte číslo podmíněnnosti $\kappa(\boldsymbol{A}) = \lambda_{max}/\lambda_{min}$.

Příklad 1.9 (MATLAB) Je dána matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kde $(n = m^2, m = 5, 10, 20)$ jako blokově třídiagonální matice $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times m})$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{E} & 0 & & \dots & 0 \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{E} & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{E} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}, \text{ kde } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Určete řádkovou, sloupcovou i Frobeniovu normu dané matice. Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory. Spočtěte spektrální poloměr.

b) Rozhodněte zda daná matice je ODD nebo SPD. Zdůvodněte.

c) Příkazem `eig` určete vlastní vektory matice. Vyberte vlastní vektory příslušné 2 největším a 2 nejmenším vlastním číslům dané matice.

d) Spočtěte číslo podmíněnnosti $\kappa(\boldsymbol{A}) = \lambda_{max}/\lambda_{min}$.

Příklad 1.10 (Domácí úkol na 2. cvičení) Je dána soustava ve tvaru $X = \boldsymbol{U}X + V$.

a) Definujte pojem spektrální poloměr matice $\boldsymbol{U}$.

b) Jak se počítají aproximace řešení pomocí prosté iterační metody?

c) Definujte, co znamená, že prostá iterační metoda je pro danou soustavu konvergentní?

d) Jaká je nutná a postačující podmínka konvergence této metody?

e) Jaká podmínka pro normu matice $\boldsymbol{U}$ zaručuje konvergenci této metody?

f) Uveďte v jakém případě není metoda konvergentní.

2 Prostá iterační metoda

Příklad 2.1 Je dána soustava rovnic $\mathbf{x} = \boldsymbol{U}\mathbf{x} + \mathbf{v}$, kde

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0. \\ 0. & 0.9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Určete vlastní čísla matice $\boldsymbol{U}$ a její spektrální poloměr.

b) Volte počáteční přiblížení $\mathbf{x}^0 = (10, 1)^T$ a spočtěte $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$, $\mathbf{x}^3$ prostou iterační metodou.

c) Určete přesné řešení dané soustavy $\mathbf{x}^*$ a spočtěte chybu $\mathbf{e}^j = \mathbf{x}^j - \mathbf{x}^*$ pro $j = 0, 1, 2, 3$.

d) Určete $n-$tou iteraci $\mathbf{x}^n$ prosté iterační metody a spočtěte chybu $\mathbf{e}^n = \mathbf{x}^n - \mathbf{x}^*$.

Příklad 2.2 Je dána soustava rovnic typu $\mathbf{x} = \boldsymbol{U}\mathbf{x} + \mathbf{v}$, kde

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ -0.6 & 0.35 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Rozhodněte, zda pro danou soustavu rovnice je prostá iterační metoda konvergentní. V kladném případě určete $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ touto metodou při volbě $\mathbf{x}^{(0)} = \vec{0}$

b) Užitím vzorce

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \le \frac{\|\boldsymbol{U}\|^k}{1 - \|\boldsymbol{U}\|} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|,$$

odhadněte chybu $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(2)}\|$, kde $\mathbf{x}^*$ je přesné řešení soustavy.

c) Odhadněte přibližný počet iterací k k tomu, aby $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k)}\| < 10^{-5}$. Jak se tento odhad změní, když v odhadu místo normy matice užijete spektrální poloměr?

Příklad 2.3 Je dána soustava rovnic $\mathbf{x} = \boldsymbol{U}\mathbf{x} + \mathbf{v}$, kde

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} -0.7 & 0 & 0.2 \\ -0.5 & 0.4 & 0 \\ -0.5 & 0 & -0.45 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Je prostá iterační metoda pro danou soustavu konvergentní? V kladném případě určete $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ touto metodou při volbě $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

Užitím vzorce

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \le \frac{\|\boldsymbol{U}\|^k}{1 - \|\boldsymbol{U}\|} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|,$$

odhadněte chybu $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(2)}\|$, kde $\mathbf{x}^*$ je přesné řešení soustavy.

Odhadněte přibližný počet iterací k k tomu, aby $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k)}\| < 10^{-5}$. Jak se tento odhad změní, když v odhadu místo normy matice užijete spektrální poloměr?

Příklad 2.4 Určete, zda konverguje prostá iterační metoda pro soustavu tvaru $\mathbf{x} = \boldsymbol{U}\mathbf{x} + \mathbf{v}$, kde

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} -0.8 & 0.1 & 0 \\ 1 & 0.8 & 0 \\ 1 & -1 & 0.4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0.5 \end{pmatrix},$$

určete $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ touto metodou při volbě $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

Příklad 2.5 (MATLAB) Je dána matice typu $n \times n$ ($n = 10, 20, 50, 100, 200$)

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Určete řádkovou, sloupcovou i Frobeniovu normu dané matice. Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory. Spočtěte spektrální poloměr.

b) Rozhodněte zda daná matice je ODD nebo SPD.

c) Užijte vzorce pro odhad chyby z příkladu 2.2c a odhadněte kolik je potřeba iterací prosté iterační metody pro dosažení přesnosti $\varepsilon = 10^{-6}$. V odhadu místo normy užijte spektrální poloměr.

Příklad 2.6 (MATLAB) Je dána matice $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kde $(n = m^2, m = 5, 10, 20)$ jako blokově třídiagonální matice $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times m})$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & -\frac{1}{4}\boldsymbol{E} & 0 & & \dots & 0 \\ -\frac{1}{4}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} & -\frac{1}{4}\boldsymbol{E} & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{4}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} & -\frac{1}{4}\boldsymbol{E} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{4}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}, \text{ kde } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & 0 & & \dots & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Určete řádkovou, sloupcovou i Frobeniovu normu dané matice. Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory. Spočtěte spektrální poloměr.

b) Rozhodněte zda daná matice je ODD nebo SPD. Zdůvodněte.

c) Příkazem `eig` určete vlastní vektory matice. Vyberte vlastní vektory příslušné 2 největším a 2 nejmenším vlastním číslům dané matice. Pro tyto vektory $\mathbf{u} = (u_i)$ zobrazte jejich složky jako graf $[i, u_i]$, tj. např. příkazem `plot(u)`.

d) Spočtěte číslo podmíněnnosti $\kappa(\boldsymbol{A}) = \lambda_{max}/\lambda_{min}$.

DÚ: Jacobiova a Gaussova-Seidelova iterační metoda

Příklad 2.7 (Domácí úkol na 3. cvičení) Je dána soustava rovnic $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

a) Zapište tři rovnice, které jsou dány maticovým zápisem $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (zápis po složkách).

b) Vezměte výsledek a) a z 1. rovnice vyjádřete x_1, z druhé rovnice x_2 a ze třetí x_3.

c) Užijte výsledek b) a definujte jakým iteračním postupem se počítají aproximace řešení dané soustavy rovnic pomocí Jacobiovy iterační metody.

d) Užijte výsledek b) a definujte jakým iteračním postupem se počítají aproximace řešení dané soustavy rovnic pomocí Gaussovy-Seidelovy iterační metody.

e) Uveďte jaké vlastnosti matice $\boldsymbol{A}$ jsou postačující k tomu, aby byla Jacobiova iterační metoda konvergentní.

f) Uveďte jaké vlastnosti matice $\boldsymbol{A}$ jsou postačující k tomu, aby byla Gaussova-Seidelova iterační metoda konvergentní.

g) Uveďte, co jsou iterační matice Jacobiovy $\boldsymbol{U}_J$ a Gauss-Seidelovy $\boldsymbol{U}_{GS}$ metody. Jakým způsobem lze počítat jejich spektrální poloměr pouze se znalostí matice $\boldsymbol{A}$?

h) Jaká je nutná a postačující podmínka konvergence Jacobiovy metody?

i) Jaká je nutná a postačující podmínka konvergence Gaussovy-Seidelovy metody?

3 Jacobiova a Gaussova-Seidelova iterační metoda

Příklad 3.1 Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

Rozhodněte, zda pro danou soustavu rovnic je Jacobiova iterační metoda konvergentní. Volte $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$ a spočtěte $\mathbf{x}^{(1)}$ touto metodou.

Příklad 3.2 Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Je Jacobiova iterační metoda konvergentní? Volte $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$ a spočtěte $\mathbf{x}^{(1)}$ touto metodou.

Příklad 3.3 (*) Nechť matice $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{P}$ je ODD v řádcích. ($\boldsymbol{D}$ - diagonála, $\boldsymbol{L}$ prvky pod diagonálou, $\boldsymbol{P}$ - prvky nad diagonálou). Označme $\boldsymbol{U}_J = -\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{P})$ iterační matici Jacobiova metody. Ukažte, že pak platí $\|\boldsymbol{U}_J\|_\infty < 1$.

Příklad 3.4 Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & 1 \\ \frac{5}{2} & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ -2 \end{pmatrix},$$

Určete, zda pro danou soustavu je Gaussova-Seidelova iterační metoda konvergentní.

Příklad 3.5 Zdůvodněte, že pro soustavu lineárních rovnic tvaru $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

konverguje Jacobiova i Gaussova-Seidelova(GS) iterační metoda. Určete $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ GS metodou, $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

Příklad 3.6 Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} p & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix},$$

a) Uveďte aspoň 2 postačující podmínky pro konvergenci Gaussovy-Seidelovy iterační metody. Určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$, pro něž je některá z nich splněna.

b) Určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$, pro něž je splněna nutná a postačující podmínka Gaussovy-Seidelovy iterační metody.

Příklad 3.7 Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\text{(i) } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{nebo} \qquad \text{(ii) } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

a) Ověřte, zda pro danou matici $\boldsymbol{A}$ je Gauss-Seidelova iterační metoda konvergetní.

b) Ověřte, zda pro danou matici $\boldsymbol{A}$ je Jacobiova iterační metoda konvergetní.

Pro (i) řešte bez MATLABu, (ii) s MATLABem.

Příklad 3.8 (MATLAB) Je dána matice typu $n \times n$ ($n = 10, 20, 50, 100, 200, 1000$)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Rozhodněte, zda pro danou matici je Gaussova-Seidelova iterační metoda konvergentní.

b) Rozhodněte, zda pro danou matici je Jacobiova iterační metoda konvergentní.

c) Volte $\mathbf{b} = (1, \dots, 1)^T$. Řešte soustavu rovnic s maticí $\boldsymbol{A}$ pomocí Jacobiova iterační metody. Výpočet realizujte pomocí programu (zde lépe v jazyce C než v MATLABu) tak, aby nebylo nutné matici $\boldsymbol{A}$ v programu ukládat. Spočtěte 100 iterací a určete reziduum.

d) Program z části c) upravte tak, aby řešení bylo realizováno užitím Gaussovy-Seidelovy iterační metody. Srovnejte rychlost konvergence.

Příklad 3.9 (MATLAB) Je dána matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, kde ($n = m^2$, $m = 5, 10, 20$) jako blokově třídiagonální matice ($\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times m}$)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{E} & 0 & & \dots & 0 \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{E} & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{E} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}, \text{ kde } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Rozhodněte, zda pro danou matici je Gaussova-Seidelova iterační metoda konvergentní.

b) Rozhodněte, zda pro danou matici je Jacobiova iterační metoda konvergentní.

c) Volte $\mathbf{b} = (1, \dots, 1)^T$. Řešte soustavu rovnic s maticí $\boldsymbol{A}$ pomocí Jacobiova iterační metody. Výpočet realizujte pomocí programu (zde lépe v jazyce C než v MATLABu) tak, aby nebylo nutné matici $\boldsymbol{A}$ v programu ukládat. Spočtěte 100 iterací a určete reziduum.

d) Program z části c) upravte tak, aby řešení bylo realizováno užitím Gaussovy-Seidelovy iterační metody. Srovnejte rychlost konvergence.

DÚ: Metoda nejmenších čtverců.

Příklad 3.10 (Domácí úkol na 4. cvičení) Je dána tabulka hodnot x_i, y_i, $i = 1, \dots n$.

a) Vysvětlete princip metody nejmenších čtverců při aproximaci dané tabulkou hodnot polynomem nejvýše 1. stupně.

b) Zapište kvadratickou odchylku $\delta^2(p(x))$ polynomu $p(x)$ nejvýše prvního stupně od dané tabulky hodnot.

c) Uveďte jaká podmínka má platit pro kvadratickou odchylku polynomu nejvýše 1. stupně $p^*(x)$, který danou tabulku hodnot aproximuje nejlépe ve smyslu nejmenších čtverců.

d) Zdůvodněte jak se z části c) odvodí soustava normálních rovnic. Odvoďte soustavu normálních rovnic pro daný případ.

e) Vysvětlete princip metody nejmenších čtverců při aproximaci dané tabulkou hodnot polynomem nejvýše 2. stupně a odvoďte soustavu normálních rovnic pro daný případ.

---

4 Metoda nejmenších čtverců.

Příklad 4.1 a) Vysvětlete princip metody nejmenších čtverců při aproximaci dané tabulkou hodnot polynomem nejvýše 1. stupně.

b) Odvodte soustavu normálních rovnic pro tento případ.

c) Sestavte soustavu normálních rovnic pro zadanou tabulku hodnot.

x_i	-1	0	1	2	2
y_i	-2	0.6	1	2.8	2.6

Příklad 4.2 a) Užijte metodu nejmenších čtverců pro aproximaci polynomem nejvýše 1. stupně a odvodte soustavu normálních rovnic.

b) Sestavte soustavu normálních rovnic pro zadanou tabulku hodnot.

x_i	0	0.5	1	1	1.5	2
‘y_i	-0.9	0	0.9	0.9	2	3.1

Příklad 4.3 a) Vysvětlete princip metody nejmenších čtverců při aproximaci dané tabulkou hodnot polynomem nejvýše 2. stupně.

b) Odvodte soustavu normálních rovnic pro tento případ.

c) Sestavte soustavu normálních rovnic pro zadanou tabulku hodnot.

x_i	-2	-1	0	0	1	2
y_i	9.1	3.8	0.7	1.3	0.2	0.9

Příklad 4.4 a) Určete polynom nejvýše 2. stupně, který ve smyslu nejmenších čtverců nejlépe aproximuje tabulku hodnot.

b) Stanovte odpovídající kvadratickou odchylku.

x_i	-2	-1	0	0	1	2
y_i	2.9	0.2	-1.1	-0.9	-0.2	3.1

Příklad 4.5 (MATLAB) a) Vysvětlete princip metody nejmenších čtverců při aproximaci dané tabulkou hodnot polynomem nejvýše n-tého stupně ($n > 2$)

b) Odvodte soustavu normálních rovnic pro tento případ.

c) Sestavte soustavu normálních rovnic pro tabulku hodnot uloženou v souboru `cviceni4.dat` a pro n = 1, 2, 3, 4.

d) Příkazem `plot` zobrazte data z tabulky hodnot, a zobrazte polynom nejlepší aproximace.

Příklad 4.6 (*) Je daná tabulka hodnot x_i, y_i, kde $y_i > 0$. Hledáme funkci ve tvaru $y = e^{Ax+B}$, které co možná nejlépe aproximuje danou tabulku dat. Užitím přirozeného logaritmu přeformulujte tento problém jako problém aproximace polynomem 1. stupně, který řešte pomocí metody nejmenších čtverců. Zapište kvadratickou odchylku pro tento případ a odvoďte systém normálních rovnic.

Příklad 4.7 (*) Je daná tabulka hodnot x_i, y_i kde $x_i > 0, y_i > 0$. Hledáme funkci ve tvaru $y = Ax^B$, které co možná nejlépe aproximuje danou tabulku dat. Užitím přirozeného logaritmu přeformulujte tento problém jako problém aproximace polynomem 1. stupně, který řešte pomocí metody nejmenších čtverců. Zapište kvadratickou odchylku pro tento případ a odvoďte systém normálních rovnic.

DÚ: Nelineární rovnice a Newtonova metoda

Příklad 4.8 (Domácí úkol na 5. cvičení)

I. Je dána rovnice

$$f(x) = 0$$

a) Zapište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_n.

b) Graficky znázorněte graf funkce $f(x)$ a tečnu ke grafu funkce v bodě x_n. Zakreslete průsečík této tečny s osou x (tj. $y = 0$), označte ho jako $[x_{n+1}, 0]$.

c) Z rovnice tečny a) vyjádřete x_{n+1}.

II. Jsou dány rovnice

$$f(x,y) = 0, \qquad g(x,y) = 0$$

d) Zapište rovnici tečné roviny $\mathcal{T}_1$ ke grafu funkce $f(x,y)$ v bodě $X^{(n)} = (x_n, y_n)^T$.

e) Zapište rovnici tečné roviny $\mathcal{T}_2$ ke grafu funkce $g(x,y)$ v bodě $X^{(n)} = (x_n, y_n)^T$.

f) Sestavte soustavu lineárních rovnic pro společný průsečík P rovin $z = 0$ a rovin $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$.

g) Označme $X^{(n+1)} = (x_{n+1}, y_{n+1})^T = P$ a z předchozí rovnice vyjádřete $X^{(n+1)}$.

5 Nelineární rovnice a Newtonova metoda

Příklad 5.1 Uvažujme funkci

$$f(x) = x^5 + x^4 - 1.$$

a) Ukažte, že v intervalu $< -1, 1 >$ existuje alespoň jeden kořen rovnice $f(x) = 0$. Zdůvodněte.

b) Volte $x_0 = 1$ a spočtete x_1 Newtonovou iterační metodou.

c) Volte $x_1 = -1$ a spočtete x_1, x_2 Newtonovou iterační metodou. Proč je tato volba nevhodná ?

d) Volte $x_1 = -5$ a počítejte iterace pomocí Newtonovy iterační metody. (MATLAB)

Příklad 5.2 a) Určete graficky přibližnou polohu kořenů soustavy

$$2xy - 3 = 0, \qquad x^2 - y^2 = 0.$$

b) Stanovte aproximaci $X^{(1)} = (x^{(1)}, y^{(1)})$ jednoho z kořenů soustavy a) Newtonovou metodou při volbě $X^{(0)} = (1; 0)^T$.

Příklad 5.3 a) Určete graficky přibližnou polohu kořenů soustavy

$$\frac{1}{x} - 10y = 0, \qquad x^2 + 16y^2 = 4.$$

b) Stanovte aproximaci $X^{(1)} = (x^{(1)}, y^{(1)})$ jednoho z kořenů soustavy a) Newtonovou metodou při volbě $X^{(0)} = (1; 1)^T$.

Příklad 5.4 a) Určete graficky přibližnou polohu kořenů soustavy

$$x^2 + y = 2, \qquad e^{-x} = \frac{1}{2}y.$$

b) Stanovte aproximaci $X^{(1)} = (x^{(1)}, y^{(1)})$ jednoho z kořenů soustavy a) Newtonovou metodou při volbě $X^{(0)} = (0; 1)^T$.

DÚ: Obyčejné diferenciální rovnice, Cauchyova úloha

Příklad 5.5 (Domácí úkol na 6. cvičení)

I. Uveďte postačující předpoklady pro existenci a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy pro případ

a) $y' = f(x, y)$, $\quad y(x_0) = y_0$,

b) $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$, $\quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$, $\quad (\mathbf{y} = (y_1, y_2))$,

c) $y'' = F(x, y, y')$, $\quad y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$

Úlohu c) tj. počáteční úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu převeďte na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu zapsaných v normálním tvaru, tedy tvar b).

II. Eulerova metoda

a) Zapište Taylorův polynom $T_1(x)$ stupně 1 pro aproximaci funkce $y(x)$ blízko bodu x_0. Označme $x = x_0 + h$ a zapišme tento polynom jako $T_1(h)$. Zapište Lagrangeův tvar zbytku $R_2(h)$, tj. tak aby platilo

$$y(x + h) = T_1(h) + R_2(h)$$

b) Označme $y(x)$ řešení ODR $y' = f(x, y)$. Užijte vztah $y(x + h) \approx T_1(h)$, pro derivaci y' užijte fakt, že $y(x)$ je řešení diferenciální rovnice a odvoďte vztah pro Eulerovu explicitní metodu.

6 Obyčejné diferenciální rovnice, Cauchyova úloha

Příklad 6.1 (Opakování)

Určete přesné řešení úlohy s počáteční podmínkou $y(0) = D > 0$. Načrtněte graf.

$$\text{a)} \quad y' = 1, \qquad \text{b)} \quad y' = y, \qquad \text{c)} \quad y' = -4y,$$

Příklad 6.2 (Opakování) Zopakujte si postup řešení

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} & y'' - 3y' + 2y = 0, & y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \\
\text{b)} & \ddot{x} + \omega^2 x = 0, & x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = 0, (\omega > 0) \\
\text{c)} & \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = f(t), & x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = 0
\end{array}$$

Příklad 6.3

Je dána Cauchyova úloha $y' = -y + x, y(0) = 1$

a) Užijte krok $h = 0.5$ a spočtěte aproximaci řešení $y(1)$ pomocí explicitní Eulerovy metody.

b) Užijte krok $h = 1$ a spočtěte aproximaci řešení $y(1)$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

Příklad 6.4 Je dána Cauchyova úloha $y' = e^{-x} - y^2, \qquad y(0) = 1$. Užijte krok $h = 0.5$ a spočtěte aproximaci řešení $y(0.5)$ pomocí explicitní Eulerovy metody.

Příklad 6.5 Je dána Cauchyova úloha $y'' + y = xe^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

a) Užijte krok $h = 1$ a spočtěte aproximaci řešení $y(2)$ pomocí explicitní Eulerovy metody.

b) Užijte krok $h = 1$ a spočtěte aproximaci řešení $y(1)$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

Příklad 6.6 (MATLAB: c-g) Je dána Cauchyova úloha

$$X' = \begin{pmatrix} -0.5 & 20 \\ -20 & -0.5 \end{pmatrix} X, \qquad X(0) = (1, 0)^T$$

a) Užijte krok $h = 0.1$ a spočtěte aproximaci řešení $X(0.2)$ pomocí explicitní Eulerovy metody.

b) Užijte krok $h = 0.5$ a spočtěte aproximaci řešení $X(0.5)$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

c) Užijte krok $h = 0.01$ a spočtěte aproximaci řešení na $< 0, 2 >$ pomocí explicitní Eulerovy metody.

d) Užijte krok $h = 0.01$ a spočtěte aproximaci řešení na $< 0, 2 >$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

e) Příkazem plot zobrazte graf 1. a 2. složky přibližného řešení z c), d).

f) Užijte krok $h = 0.005$ a spočtěte aproximaci řešení na $< 0, 2 >$ pomocí explicitní Eulerovy metody. Srovnejte s výsledkem c).

g) Výsledky z c) a d) srovnejte s přesným řešením.

DÚ: Collatzova metoda

Příklad 6.7 (Domácí úkol na 7. cvičení)

I. Pro zadané typy ODR stručně popište postup řešení v případě homogenních rovnic ($\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, homogenní rovnice znamená $g(x) \equiv 0, f \equiv 0, b \equiv 0$)

$$y' + p(x)y = g(x), \qquad \dot{X} = \boldsymbol{A}X + b, \qquad \ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t).$$

V posledních dvou případech rozeberte speciálně případ komplexních vlastních čísel resp. komplexních kořenů charakteristické rovnice.

1. Definujte, co znamená $\eta(h) = \mathcal{O}(h^p)$.
2. Ukažte, že pro dostatečně hladkou funkci $y(x)$ platí oba následující vztahy
$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = y'(x) + \mathcal{O}(h), \qquad \frac{y(x) - y(x-h)}{h} = y'(x) + \mathcal{O}(h).$$
Upřesněte, co v tomto případě znamená dostatečně hladká funkce.
3. Užijte 2. vztah a odvoďte vztah pro implicitní Eulerovu metodu.
4. Ukažte, že pro dostatečně hladkou funkci $y(x)$ platí
$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = y'(x + h/2) + \mathcal{O}(h^2).$$
Upřesněte, co v tomto případě znamená dostatečně hladká funkce.
5. Užijte předchozí vztah a odvoďte vzorce pro Collatzovu metodu.

7 Numerické řešení Cauchyovy úlohy. Eulerova a Collatzova metoda.

Příklad 7.1

Je dána Cauchyova úloha

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad X(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Užijte krok $h = 0.2$ a spočtěte aproximaci řešení $X(0.2)$ pomocí explicitní Eulerovy metody.

b) Užijte krok $h = 0.2$ a spočtěte aproximaci řešení $X(0.2)$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

Příklad 7.2 Je dána Cauchyova úloha

$$y' = x\sqrt[3]{y}, \qquad y(0) = 1$$

a) Uveďte předpoklady zaručující existenci a jednoznačnost řešení dané Cauchyovy úlohy. Zapište oblast, kde jsou splněny.

b) Určete s krokem $h = 0,1$ pomocí Collatzovy přibližnou hodnotu řešení $y(0,2)$.

Příklad 7.3 Je dána Cauchyova úloha

$$y'' + \frac{y'}{2} + 4|y|y = 0 \qquad y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

a) Ověřte, zda jsou splněny podmínky zaručující existenci a jednoznačnost řešení.

b) Volte krok $h = 0.2$ a určete přibližnou hodnotu řešení $y(0.2)$, $y'(0.2)$ pomocí Collatzovy metody.

Příklad 7.4 Je dáno $h > 0$, $D > 0$ a Cauchyova úloha $y' = -4.2y$, $\;y(0) = D$.

a) Užitím explicitní Eulerovy metody a kroku h spočítejte Y_E^j aproximaci řešení v bodech $x_j = jh$, $j = 1, 2, 3$ a $j = n$.

b) Užitím implicitní Eulerovy metody spočítejte Y_I^j aproximaci řešení v bodech x_j pro $j = 1, 2$ a $j = n$.

c) Určete přesné řešení $y(x)$ dané Cauchyovy úlohy a načrtněte jeho graf v intervalu $\langle 0, 2\rangle$. Pro krok $h = 0.5$ zakreslete také výsledky z a). Uveďte, proč je volba $h = 0.5$ nevhodná pro explicitní Eulerovu metodu!

Příklad 7.5 Je dána Cauchyova úloha $\dot{X} = AX$, $X(0) = u$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Ukažte, že vektor u je vlastním vektorem matice A. Určete příslušné vlastní číslo. Užijte vlastní vektor a vlastní číslo a určete přesné řešení dané Cauchyovy úlohy.

b) Užijte krok $h = 0.1$ a spočtěte aproximaci řešení $X^{10} \approx X(1)$ pomocí explicitní Eulerovy metody.

c) Užijte krok $h = 0.05$ a spočtěte aproximaci řešení $X^{20} \approx X(1)$ pomocí explicitní Eulerovy metody.

d) Užijte krok $h = 0.1$ a spočtěte aproximaci řešení $X^{10} \approx X(1)$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

e) Užijte krok $h = 0.05$ a spočtěte aproximaci řešení $X^{20} \approx X(1)$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

f) Určete odhad chyby pomocí metody polovičního kroku pro Eulerovu explicitní nebo implicitní metodu. Srovnejte se skutečnou chybou.

Příklad 7.6 Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ je vlastní vektor matice $\boldsymbol{A}$ příslušný reálnému vlastnímu číslu $\lambda < 0$. Je dána Cauchyova úloha

$$Y' = \boldsymbol{A}Y, Y(0) = \mathbf{u},$$

a) Určete řešení Cauchyovy úlohy a ukažte, že platí $|Y(x)| \leq |Y(0)|$ pro $x > 0$.

b) Je dáno $h > 0$. Určete aproximaci řešení Y^j v bodech $x_j = jh$ pomocí explicitní Eulerovy metody. Určete jaká podmínka musí platit pro h tak, aby platilo $|Y^j| \leq |Y^0|$ pro $j \geq 0$.

c) Je dáno $h > 0$. Určete aproximaci řešení Y^j v bodech $x_j = jh$ pomocí implicitní Eulerovy metody. Určete jaká podmínka musí platit pro h tak, aby platilo $|Y^j| \leq |Y^0|$ pro $j \geq 0$.

d) Jak se podmínka (pro λh) z části b) nebo c) změní v případě, že vlastní číslo λ a vlastní vektor $\mathbf{u}$ budou komplexní, $\operatorname{Re} \lambda < 0$? Zakreslete oblasti v komplexní rovině, v kterých číslo $z = \lambda h$ musí v těchto případech ležet.

Příklad 7.7 Je dána úloha

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \dot{X} = X + \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix}, \qquad X(0) = (1, -1)^T,$$

a) Volte krok $h = 0.1$ a užijte explicitní Eulerovu metodu pro určení aproximaci přesného řešení $X^1 \approx X(h)$.

b) Volte krok $h = 0.1$ a užijte implicitní Eulerovu metodu pro určení aproximaci přesného řešení $X^1 \approx X(h)$.

c) Volte krok $h = 0.1$ a užijte Collatzovu metodu pro určení aproximaci přesného řešení $X^1 \approx X(h)$.

Příklad 7.8 Je dána Cauchyova úloha

$$y' = 100y(1 - y), \quad y(0) = 0.5$$

a) Ověřte, zda a v jaké oblasti má daná úloha má právě jedno řešení.

b) Ukažte, že pro řešení dané úlohy platí $0 \leq y(x) \leq 1$ pro $x \in (-\infty, \infty)$.

c) Volte $h = 0.1$ a určete přibližné řešení $y(0.1)$ explicitní Eulerovou metodou.

d) Volte $h = 0.1$ a určete přibližné řešení $y(0.1)$ Collatzovou metodou.

Příklad 7.9 (Domácí úkol na 8. cvičení) a) Zapište vzorce pro Collatzovu metodu a metodu Runge-Kutta 4. řádu.

b) Zapište, jak se postupuje při transformaci rovnice vyššího řádu na soustavu ODR 1. řádu.

c) Rozmyslete si, jak se bude transformat soustava 2 rovnic vyššího řádu.

d) Úlohy z 8. týdne převeďte na soustavu ODR 1. řádu.

8 Numerické řešení Cauchyovy úlohy, metody Runge-Kutty (MATLAB)

Příklad 8.1 Je dána Cauchyova úloha

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2x - y_1^2 + x^2 \\ 2y_1y_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Zapište oblast $\mathcal{G}$ v níž jsou splněny podmínky existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy

b) Užitím Collatzovy metody určete přibližně hodnotu řešení v bodě $x = 0.1$ s krokem $h = 0.1$

Příklad 8.2 Výchylka mechanického oscilátoru $x(t)$ v bezrozměrném tvaru je popsána

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = \frac{1}{10t+1}\sin(50\pi t), \qquad x(0) = 0.05, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

kde $m = 0.1$, $k = 4.2$.

a) Určete fundamentální systém řešení homogenní rovnice a určete frekvenci jeho kmitů (pro tento účel položme $d = 0$).

b) Pro $d = 0.001$ určete přibližně kořeny charakteristické rovnice. Na základě výsledků a) a kořenů charakteristické rovnice rozhodněte, zda volba kroku $h = 0.2$ je vhodná pro Eulerovu explicitní metodu.

c) MATLAB: Volte krok h vhodně a užijte Collatzovu metodu pro určení hodnot řešení v intervalu $[0, 3]$.

d) MATLAB: Volte krok h vhodně a užijte RK4 pro určení hodnot řešení v intervalu $[0, 3]$.

Příklad 8.3 * Kmity matematického kyvadla ($g = 9.81$, $l = 50$) jsou popsány rovnicí

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0, \qquad \varphi(0) = \frac{\pi}{3}, \dot{\varphi} = 0.$$

a) Volte krok $h = 0.01$. Užijte explicitní Eulerovu metodu a určete přibližnou hodnotu φ v čase $t = 0.01$.

b) Řešte numericky linearizovnou rovnici $\sin\varphi \approx \varphi$. Volte krok $h = 0.01$. Užijte explicitní Eulerovu metodu a určete přibližnou hodnotu φ v čase $t = 0.01$.

c) Na základě odhadu vlastní frekvence dané rovnice rozhodněte, zda je volba kroku h pro danou rovnici vhodná?

d) MATLAB: Volte krok h vhodně. Nalezněte přibližné řešení s krokem h v intervalu $< 0, 5 >$. Užijte Collatzovu metodu a RK4. Výsledné hodnoty zobrazte příkazem `plot`. Srovnejte výsledky s řešením linearozované rovnice ($\sin\varphi \approx \alpha$).

Příklad 8.4 * Uvažujme tuhé (rovinné) těleso o hmotnosti $m = 0.2$, momentu setrvačnosti $I_\alpha = 0.001$ a statickém momentu $S_\alpha = me = 0.$. Tuhosti pružin jsou dány $k_h = 0.105$, $k_\alpha = 103$. Deformace (pohyb) tělesa je popsána pomocí rotace α a výchylky h rovnicí

$$\begin{pmatrix} m & S_\alpha \\ S_\alpha & I_\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05\,\sin(100\pi t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} h(0) = 0.01, & \dot{h}(0) = 0, \\ \alpha(0) = 0.01, & \dot{\alpha}(0) = 0, \end{matrix}$$

a) MATLAB: Volte krok $\tau = 0.01$. Užijte explicitní Eulerovu metodu a určete přibližnou hodnotu natočení α a výchylky h v čase $t = 0.01$. (Pozn. Pozor na výpočet hodnot funkce sinus, argument udáván v rad)

b) MATLAB: Volte krok $\tau = 0.01$, užijte Collatzovu metodu a určete přibližnou hodnotu natočení α a výchylky h v čase $\tau = 0.01$.

c) MATLAB: Nalezněte přibližné řešení s krokem $\tau = 0.001$ v intervalu $< 0, 5 >$. Užijte Collatzovu metodu a RK4. Volte poloviční krok $\tau/2$ a srovnejte výsledky. Grafy řešení zobrazte.

Příklad 8.5 Poloha hmotného bodu o hmotnosti m v rovinném gravitačním poli s koeficientem odporu prostředí $k = 0.01$ je popsána systémem ODR

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \qquad m\ddot{y} = -mg - k\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \qquad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = A,\ y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 4,$$

kde $m = 0.1$, $g = 9.81$.

a) MATLAB: Nechť $A = 0$. Volte krok $h = 0.05$. Užijte explicitní Eulerovu metodu a určete přibližnou polohu hmotného bodu v čase $t = 0.1$.

b) MATLAB: Nechť $A = 0$. Volte krok $h = 0.05$, užijte Collatzovu metodu a určete přibližnou polohu hmotného bodu v čase $t = 0.05$.

c) MATLAB: Určete čas dopadu a rychlost dopadu pro $A = 0$. Volte vhodně krok h a užijte Collatzovu metodu a RK4.

d) MATLAB: Volte $A = 3$. Určete čas, místo a rychlost dopadu. Nakreslete trajektorii.

DÚ: Okrajová úloha pro ODR

Příklad 8.6 (Domácí úkol na 9. cvičení) Je dána Dirichletova okrajová úloha v samoadjungovaném tvaru

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x) \qquad y(a) = A, y(b) = B.$$

a) Zapište postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení této okrajové úlohy.

b) Užitím Taylorova rozvoje určete koeficienty α, β, δ a neznámou funkci $\eta(x^*, h)$ tak aby platilo

$$g(x^* + h) - g(x^* - h) = \alpha h g'(x^*) + \beta h^2 g''(x^*) + \eta(x^*, h)h^\delta$$

c) Užitím Taylorova rozvoje ukažte, že (uveďte za jakých předpokladů na funkci g)

$$g(x^* + h) - 2g(x^*) + g(x^* - h) = h^2 g''(x^*) + O(h^4).$$

d) Odvoďte náhradu v uzlu $x = x_i$ výrazu $-(p(x)y')'$ a určete jaké chyby se dopustíte.

$$-(p(x)y')'|_{x=x_i} \approx$$

e) Odvoďte náhradu rovnice v uzlu $x = x_i$.

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x).$$

9 Okrajová úloha pro ODR. Metoda sítí.

Příklad 9.1 Je dána Dirichletova okrajová úloha

$$-y'' = 4 - x^2, \qquad y(-2) = 2, y(2) = 0.$$

a) Zapište postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení okrajové úlohy v samoadjungovaném tvaru. Ověřte, zda jsou splněny.

b) Určete přesné řešení dané úlohy. Návod: Užijte integraci a určete integrační konstanty.

c) Užitím Taylorova rozvoje odvoďte náhradu $y''(x)$ pomocí hodnot funkce $y(x), y(x \pm h)$.

d) Volte krok $h = 1$ a zapište síťové rovnice pro aproximaci dané úlohy. Proveďte jeden krok Gaussovy-Seidelovy iterační metody, X^0 volte jako pravou stranu soustavy.

Příklad 9.2 Je dána Dirichletova okrajová úloha v samoadjungovaném tvaru

$$-(xy')' + (x+1)y = 4 \qquad y(1) = 0, y(5) = 1.$$

a) Zapište postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení okrajové úlohy v samoadjungovaném tvaru. Ověřte, zda jsou splněny.

b) Užitím Taylorova rozvoje odvoďte náhradu $y'(x)$ pomocí hodnot funkce $y(x), y(x \pm h)$.

c) Zapište síťové rovnice pro krok $h = 1$. Proveďte jeden krok Jacobiovy iterační metody, X^0 volte jako pravou stranu soustavy.

Příklad 9.3 Rovnice popisující rozložení teploty v 1D tělese ($\kappa = 0.35$)

$$-\frac{d}{dx}\left(\kappa \frac{dT}{dx}\right) = 0 \qquad T(-2) = 10, T(2) = 0,$$

a) Zapište postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení okrajové úlohy v samoadjungovaném tvaru. Ověřte, zda jsou splněny.

b) Užitím Taylorova rozvoje odvoďte náhradu $y'(x)$ pomocí hodnot funkce $y(x), y(x \pm h)$.

c) Zapište síťové rovnice pro krok $h = 1$. Proveďte jeden krok Jacobiovy iterační metody, X^0 volte jako pravou stranu soustavy.

Příklad 9.4 Rovnice popisující rozložení teploty je zapsána ve tvaru

$$-\frac{d}{dr}\left(0.1r \frac{d\theta}{dr}\right) = 0 \qquad \theta(1) = 100, \theta(2) = 20,$$

a) Zapište postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení okrajové úlohy v samoadjungovaném tvaru. Ověřte, zda jsou splněny.

b) Zapište síťové rovnice pro krok $h = 0.25$. Proveďte jeden krok Jacobiovy iterační metody, X^0 volte jako pravou stranu soustavy.

Příklad 9.5 (MATLAB) Je dána Dirichletova okrajová úloha

$$-y'' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad y(-4) = -3, y(4) = 2.$$

a) Volte krok $h = 0.2$, sestavte soustavu rovnic a nalezněte přibližné řešení.

b) Volte krok $h = 0.1$, sestavte soustavu rovnic a nalezněte přibližné řešení.

c) Volte krok $h = 0.05$, sestavte soustavu rovnic a nalezněte přibližné řešení.

d) Volte krok $h = 0.005$, sestavte soustavu rovnic a nalezněte přibližné řešení.

e) Srovnejte předchozí řešení s řešením přesným. Zobrazte chybu.

DÚ: Poissonova rovnice

Příklad 9.6 (Domácí úkol na 10. cvičení) Je dána Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\triangle u = f \text{ v oblasti } \Omega.$$

a) Uveďte o jaký typ rovnice se jedná a pomocí parciálních derivací rozepište symbol $\triangle u$.

b) Zapište Dirichletovu okrajovou podmínku.

c) Vysvětlete princip metody sítí.

d) Vysvětlete pojem regulární, neregulární a hraniční uzel sítě.

e) Ukažte, že pro dostatečně hladkou funkci $y = y(x)$ je výraz $\frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1})$ aproximací $y'(x_i)$ 2.řádu přesnosti

f) Ukažte, že pro dostatečně hladkou funkci $y = y(x)$ je výraz $\frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$ aproximací $y''(x_i)$ 2.řádu přesnosti

g) Zapište, jak se v regulárním uzlu $P_{i,j} = [x_i, y_j]$ nahradí parciální derivace uvedené v části a). Odvoďte rovnici pro náhradu dané Poissonovy rovnice metodou sítí v regulárním uzlu $P_{i,j}$.

h) Odvoďte náhradu v neregulárním uzlu Q pomocí lineární interpolace.

10 Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

Příklad 10.1 Je dána okrajová úloha $-\triangle u = 12xy$ v oblasti tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0,0]$, $[1.8,0]$, $[0,1.5]$, $[1.5,1.5]$, na hranici je předepsána okrajová podmínka $u(x,y) = x + y$.

a) Uveďte o jaký typ rovnice se jedná a pomocí parciálních derivací rozepište symbol $\triangle u$. Ověřte, zda pro funkci $u(x,y) = xy(97 - x^2 - y^2)$ platí $-\triangle u = 12xy$.

b) Zapište, jak se v regulárním uzlu $P_{i,j} = [x_i, y_j]$ nahradí parciální derivace uvedené v části a). Odvoďte rovnici pro náhradu dané rovnice metodou sítí v uzlu $P_{i,j}$.

c) Volte krok $h = 0.5$ a síť tak, aby obsahovala bod $[0,0]$. Sestavte síťové rovnice v uzlech sítě ležících na přímce $y = 1$. V neregulárních uzlech užijte lineární interpolaci.

Příklad 10.2 Je dána Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\nabla \cdot (\nabla u) = y$$

v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dané jako vnitřek čtyřúhelníku $[0;0]$, $[2;0]$, $[0;1.5]$, $[1.5;1.5]$. Na hranici oblasti $\partial\Omega$ je daná okrajová podmínka $u(x,y) = xy$.

a) Uveďte, o jaký typ rovnice se jedná a pomocí parciálních derivací rozepište symbol ∇. Užitím tohoto zápisu rozepište levou stranu rovnice tj. $-\nabla \cdot (\nabla u)$ pomocí druhých parciálních derivací.

b) Zapište, jak se v regulárním uzlu $P_{i,j} = [x_i, y_j]$ nahradí parciální derivace uvedené v části a). Odvoďte rovnici pro náhradu dané rovnice metodou sítí v regulárním uzlu $P_{i,j}$.

c) Vysvětlete pojem neregulární uzel a odvoďte náhradu v neregulárním uzlu pomocí lineární interpolace.

d) Volte krok $h = 0.5$ a síť tak, aby bod $[0,0]$ byl uzlem sítě. Sestavte síťové rovnice na přímce $y = 0.5$.

Příklad 10.3 Je dána okrajová úloha

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4$$

v oblasti Ω tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0;0]$, $[1.5;0]$, $[1;1]$, $[0.5;1]$, a okrajová podmínka $u(x,y) = x + y$ na hranici Γ oblasti Ω. Sestavte sít'ové rovnice v uzlech sítě ležících na přímce $y = 0.25$, které vzniknou při řešení úlohy metodou sítí s krokem $h = 0.25$ (v neregulárních uzlech užijte lineární interpolaci)

Příklad 10.4 Je dána Dirichletova úloha $-\Delta u = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ v oblasti $\Omega =< 0,1 >^2$ s okrajovou podmínkou $u(x,y) = xy$ na hranici $\partial\Omega$

a) Načrtněte obrázek s číslováním uzlů pro $h = \frac{1}{3}$

b) Ověřte, zda pro $v(x,y) = \frac{1}{2\pi^2}\sin(\pi x)\sin(\pi y)$ platí $-\Delta v = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$.

c) Sestavte sít'ové rovnice.

Příklad 10.5 Je dána Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.5$$

v oblasti $\Omega = [0,3]^2$ a a okrajová podmínka $u(x,y) = xy$ na hranici $\partial\Omega$.

a) Uveďte o jaký typ rovnice se jedná.

b) Zapište, jak se v regulárním uzlu $P_{i,j} = [x_i, y_j]$ nahradí jednotlivé parciální derivace dané úlohy. Odvoďte náhradu dané rovnice metodou sítí v regulárním uzlu $P_{i,j}$.

c) Volte krok $h = 1$ a síť tak, aby obsahovala bod $[0,0]$. Sestavte síťové rovnice v dané oblasti.

d) Rozhodněte, zda pro danou soustavu rovnic je Jacobiho iterační metoda konvergentní.

e) Označme u_{ij} hodnoty přesného řešení $u \in \mathcal{C}^4(\overline{\Omega})$ v bodech $P_{i,j}$, tedy $u_{i,j} = u(P_{i,j})$. Zapište soustavu rovnic, která vznikne dosazením hodnot u_{ij} do levé strany soustavy z c). Označte chybu $e_{i,j} = u_{i,j} - U_{i,j}$ a z předchozí soustavy a soustavy c) odvoďte odhad pro chybu.

Příklad 10.6 (C/MATLAB)
Je dána Dirichletova úloha $-\Delta u = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ v oblasti $\Omega =< 0, 1 >^2$ s okrajovou podmínkou $u(x, y) = xy$ na hranici $\partial\Omega$

a) Volte $h = \frac{1}{n+1}$ pro $n = 10, 20, 40, 80, 160$.

b) Zapište síťovou rovnici v obecném vnitřním uzlu sítě $P_{i,j}$.

c) Užijte b), a řešte soustavu lineárních rovnic pomocí Gaussovy-Seidelovy iterační metody.

DÚ: Rovnice vedení tepla

Příklad 10.7 (Domácí úkol na 11. cvičení) Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla ($x \in [0, L]$, $t \geq 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(x,0) = \varphi(x), \quad u(0,t) = \alpha(t), \quad u(L,t) = \beta(t).$$

a) Zapište podmínky souhlasu pro danou úlohu a zdůvodněte, proč mají platit.

b) Pomocí Taylorova rozvoje ukažte, že výraz $\frac{1}{\tau}(U_i^{(k+1)} - U_i^{(k)})$ je aproximací $\frac{\partial u}{\partial t}$ v uzlu $P_i^{(k)}$ řádu $\mathcal{O}(\tau)$ pro $u \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$

c) Pomocí Taylorova rozvoje ukažte, že výraz $\frac{1}{h^2}(U_{i+1}^{(k)} - 2U_i^{(k)} + U_{i-1}^{(k)})$ je aproximací $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v uzlu $P_i^{(k)}$ řádu $\mathcal{O}(h^2)$ pro $u \in C^{(4)}(\bar{\Omega})$

d) Odvoďte explicitní schéma pro řešení smíšené úlohy. Zapište podmínku stability schématu.

e) Pomocí Taylorova rozvoje ukažte, že výraz $\frac{1}{\tau}(U_i^{(k+1)} - U_i^{(k)})$ je aproximací $\frac{\partial u}{\partial t}$ v uzlu $P_i^{(k+1)}$ řádu $\mathcal{O}(\tau)$ pro $u \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$

f) Odvoďte implicitní schéma pro řešení smíšené úlohy. Zapište podmínku stability schématu.

11 Rovnice vedení tepla

Příklad 11.1 Je dána smíšená úloha $\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t$, s počáteční podmínkou $u(x,0) = 1 - x^2$ pro $x \in \langle 0;1\rangle$, a okrajovými podmínkami

$$u(0,t) = 1 \qquad u(1,t) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{pro } t \geq 0$$

a) Ověřte podmínky souhlasu. Volte časový krok 0.01, prostorový krok 0.25 a určete hodnotu řešení v bodě $A = [0.5; 0.01]$ metodou sítí (užijte explicitní schema)

b) Určete maximální časový krok tak, aby explicitní schema řešení bylo pro daný prostorový krok ještě stabilní

Příklad 11.2 Je dána smíšená úloha $\frac{\partial u}{\partial t} = 0.3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + 2t$ s počáteční podmínkou $u(x,0) = x^2$ pro $x \in \langle 0;1\rangle$ a okrajovými podmínkami

$$u(0,t) = \mathrm{arctg}(t) \quad u(1,t) = \frac{1}{2t+1} \qquad \text{pro } t \geq 0$$

a) Ověřte splnění podmínek souhlasu. Určete τ a minimální krok h tak, aby při jejím řešení stabilní explicitní metodou ležel bod $P = [0.25; 0.1]$ v prvé časové vrstvě

b) Pro hodnoty τ a h z bodu (b) určete přibližnou hodnotu řešení v bodě P užitím explicitní metody

c) Při $h = \tau = 0.25$ sestavte soustavu sít'ových rovnic pro první časovou vrstvu užitím implicitní formule

Příklad 11.3 Je dána rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2.5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

a) Určete typ této rovnice

b) Při zadaných podmínkách $u(x,0) = x(2-x)$ pro $x \in \langle 0;2\rangle$ a $u(0,t) = 30t$, $u(2,t) = 0$ pro $t \geq 0$ sestavte soustavu sít'ových rovnic pro první časovou vrstvu pomocí implicitního schematu. Volte $h = 0.5$ a $\tau = 0.1$

c) Rozhodněte, zda lze volit časový krok $\tau = 0.01$, resp. $\tau = 1.0$ aby pro daný prostorový krok bylo užité schema stabilní

Příklad 11.4 Je dána smíšená úloha $\frac{\partial u}{\partial t} = 0.2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ s počáteční podmínkou $u(x,0) = ax^2 + b$ pro $x \in \langle 1;2\rangle$ a okrajovýmí podmínkami $u(1,t) = \frac{10}{t+1}$ $u(2,t) = 4e^{-t}$ pro $t \geq 0$.

a) Určete hodnoty a, b tak, aby byly splněny podmínky souhlasu

b) Rozhodněte, zda lze volit $h = 0.2$ a $\tau = 0.2$ pro řešení úlohy metodou sítí α) explicitní, β) implicitní!

Příklad 11.5 Je dána smíšená úloha $\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4$, s počáteční podmínkou $u(x,0) = \sin(\pi x) + x^2$ pro $x \in \langle 0;1\rangle$, a okrajovými podmínkami

$$u(0,t) = 0 \qquad u(1,t) = 1 \qquad \text{pro } t \geq 0$$

a) Zapište podmínky souhlasu a ověřte, zda jsou splněny. Stručně vysvětlete, co tyto podmínky znamenají a důvod, proč požadujeme, aby byly splněny.

b) Zapište jak se nahradí derivace $\frac{\partial u}{\partial t}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v bodě P_i^{k+1} při řešení rovnice vedení tepla explicitním schématem.

c) Volte časový krok 0.01, prostorový krok 0.25 a určete hodnotu řešení v bodě $A = [0.5; 0.01]$ metodou sítí užitím explicitního schematu.

d) Ověřte, zda funkce ve tvaru $u(x,t) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma t^2 + e^{-\omega t}\sin(\pi x)$ je řešením dané úlohy pro nějaká α, β, γ a ω (reálná čísla).

Příklad 11.6 (MATLAB) Je dána smíšená úloha $\frac{\partial u}{\partial t} = 0.5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t}$ s počáteční podmínkou $u(x,0) = \sin(\pi x)$ pro $x \in \langle 0;1\rangle$, a okrajovými podmínkami

$$u(0,t) = 0 \qquad u(1,t) = 0 \qquad \text{pro } t \geq 0$$

a) Volte krok $h = 0.2$ a $\tau = 0.05$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0,1) \times (0,1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

b) Volte krok $h = 0.2$ a $\tau = 0.025$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0,1) \times (0,1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

c) Volte krok $h = 0.1$ a $\tau = 0.01$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0,1) \times (0,1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

d) Volte krok $h = 0.05$ a $\tau = 0.01$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0,1) \times (0,1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

e) Pro stejné hodnoty řešte schematem implicitním.

DÚ: Vlnová rovnice

Příklad 11.7 (Domácí úkol na 12. cvičení)

a) Zapište podmínky souhlasu pro smíšenou úlohu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad \text{v oblasti } \Omega = (a;b) \times (0;\infty) \\
u(x,0) &= \varphi(x)\ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \qquad \text{pro } x \in \langle a;b\rangle \\
u(a,t) &= \alpha(t)\ , \quad u(b,t) = \beta(t) \qquad \text{pro } t \in \langle 0;\infty)
\end{aligned}$$

b) Užijte počáteční podmínky, Taylorův rozvoj a určete hodnoty přibližných řešení na první časové vrstvě. Členy druhého a vyšších řádů zanedbejte.

c) Odvoďte soustavu síťových rovnic pro určení přibližných hodnot řešení $(k+1)$-ní časové vrstvě $(k \geq 1)$ explicitní metodou.

d) Odvoďte soustavu síťových rovnic pro určení přibližných hodnot řešení $(k+1)$-ní časové vrstvě $(k \geq 1)$ implicitní metodou.

12 Vlnová rovnice

Příklad 12.1 Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\,t$$

$$\begin{array}{rclrclr} u(x,0) & = & x^2\ , & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & 1-x^2 & \text{pro } x \in \langle -1;1\rangle \\ u(-1,t) & = & 1\ , & u(1,t) & = & \cos t & \text{pro } t \in \langle 0;\infty) \end{array}$$

a) Ověřte splnění podmínek souhlasu (pro polohu a rychlost)

b) Určete maximální krok τ tak, aby byla splněna podmínka stability pro explicitní metodu s prostorovým krokem $h = 0.2$. Odvoďte schéma pro explicitní metodu.

c) Stanovte přibližnou hodnotu řešení v bodě $A = [0.2; 0.2]$ explicitní metodou.

d) Odvod'te soustavu sít'ových rovnic pro určení přibližných hodnot řešení $(k+1)$-ní časové vrstvě $(k \geq 1)$ implicitní metodou.

Příklad 12.2 Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x$$

$$\begin{array}{rclrclr} u(x,0) & = & x(x-1)\ , & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & (1-x)^2 & \text{pro } x \in \langle 0;1\rangle \\ u(0,t) & = & \sin t\ , & u(1,t) & = & 0 & \text{pro } t \in \langle 0;\infty) \end{array}$$

a) Pro explicitní metodu volte $h = 0.2$. Určete τ tak, aby byla splněna podmínka stability a bod $A = [0.4; 0.2]$ byl uzlem sítě. Stanovte přibližnou hodnotu řešení v bodě A.

Příklad 12.3 Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x$$

$$\begin{array}{rclrclr} u(x,0) & = & 1-x^2\ , & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & 0 & \text{pro } x \in \langle 1;2\rangle \\ u(1,t) & = & 0\ , & u(2,t) & = & \frac{-3}{t^2+1} & \text{pro } t \in \langle 0;\infty) \end{array}$$

a) Pro explicitní metodu volte $h = 0.25$. Určete τ tak, aby byla splněna podmínka stability a bod $A = [1.5; 1]$ byl uzlem sítě. Stanovte přibližnou hodnotu řešení v bodě A.

Příklad 12.4 Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x$$

$$\begin{array}{rclrclr} u(x,0) & = & 2x^2\ , & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & (1-x)\sin\frac{\pi}{2}x & \text{pro } x \in \langle -1;1\rangle \\ u(-1,t) & = & ae^{bt}\ , & u(1,t) & = & 2 & \text{pro } t \geq 0 \end{array}$$

a) Určete hodnoty a, b tak, aby byly splněny podmínky souhlasu

b) Pro explicitní metodu volte $h = 0.2$. Určete τ tak, aby byla splněna podmínka stability a bod $A = [0.8; 0.15]$ byl uzlem sítě. V které časové vrstvě leží bod A?

Příklad 12.5 V oblasti $Q_T = \{[x,t] : x \in (0,\pi),\ t \in (0,T)\}$ je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

kde $f(x,t) = xt$ a

$$u(x,0) = \sin(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0.$$

a) Rozhodněte, zda funkce $u(x,t) = \sin(x)\cos(16t)$ je nebo není řešením dané rovnice pro $f(x,t) = 0$. Zdůvodněte (např. výpočtem).

b) Užijte Taylorova polynomu a počátečních podmínek pro odvození přibližných hodnot funkce na první časové vrstvě $U_i^1 \approx u(P_i^1)$.

c) Odvoďte jak se nahradí derivace $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v bodě P_i^k při řešení rovnice vedení tepla explicitním schématem.

d) Zapište podmínku stability a odvoďte, jakým způsobem se tato podmínka odvodí. Ověřte, zda pro volbu $h = 0.5$ a $\tau = 0.2$ bude explicitní schéma stabilní? Odpověď odůvodněte.

e) Zvolte prostorový krok $h = 0.5$ a časový krok $\tau = 0.2$ a určete přibližnou hodnotu $u(0.5, 0.4)$ použitím explicitního schématu.

Příklad 12.6 (MATLAB) Je dána smíšená úloha $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t}$ s počáteční podmínkou $u(x, 0) = \sin(\pi x)$, $u_t(x, 0) = 0$ pro $x \in \langle 0; 1\rangle$, a okrajovými podmínkami

$$u(0, t) = 0 \qquad u(1, t) = 0 \qquad \text{pro } t \geq 0$$

a) Volte krok $h = 0.05$ a $\tau = 0.05$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0, 1) \times (0, 1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

b) Volte krok $h = 0.05$ a $\tau = 0.025$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0, 1) \times (0, 1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

c) Volte krok $h = 0.01$ a $\tau = 0.01$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0, 1) \times (0, 1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

d) Volte krok $h = 0.01$ a $\tau = 0.004$. Řešte explicitním schématem v oblasti $Q_T = (0, 1) \times (0, 1)$. Výsledek zobrazte. Je pro tuto volbu splněna podmínka stability?

e) Pro stejné hodnoty řešte schematem implicitním.

13 Témata semestrální práce

Tématem semestrální práce jsou vybrané úlohy z předchozích cvičení a jejich detailní zpracování dle pokynů cvičícího. Jako témata semestrální práce lze považovat např. následující seznam příkladů:

- Příklad 1.7.
- Příklad 1.8.
- Příklad 1.9.
- Příklad 2.5.
- Příklad 2.6.
- Příklad 3.8.
- Příklad 3.9.
- Příklad 4.5.
- Příklad 4.6.
- Příklad 4.7.
- Příklad 6.6.
- Příklad 8.2.
- Příklad 8.5.
- Příklad 8.4.
- Příklad 8.3.
- Příklad 9.3.
- Příklad 9.4.
- Příklad 10.6.
- Příklad 11.6.
- Příklad 12.6.