Úvod

1 Normy vektorů a matic, vlastnosti matic

Příklad 1.1 Pro dané vektory $\mathbf{x} = (-1; 2; 1)^T, \mathbf{y} = (2; -3; -1)^T$ určete

$$\|\mathbf{x}\|_\infty =? \qquad \|\mathbf{x}\|_2 =? \qquad \|\mathbf{x}\|_1 =? \qquad \|\mathbf{y}\|_\infty =? \qquad \|\mathbf{y}\|_2 =? \qquad \|\mathbf{y}\|_1 =?$$

Příklad 1.2 Rozhodněte, které z následujících nerovností jsou platné pro všechny $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2, \qquad \|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_1, \qquad \|\mathbf{x}\|_1 \le 2\|\mathbf{x}\|_\infty,$$

Je dána $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Volte $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^T$ a rozhodněte o platnosti nerovností

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 \le \|\boldsymbol{A}\|_E, \qquad \|\boldsymbol{A}\|_E \le \|\boldsymbol{A}\|_\infty.$$

Příklad 1.3 Jsou dány matice ($a \in \mathbb{R}$)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

a) Určete řádkovou, sloupcovou i Frobeniovu normu daných matic. Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory. Spočtěte spektrální poloměr. Pro které matice jsou vlastní vektory na sebe kolmé?

b) Zapište jak je definován pojem matice ostře diagonálně dominantní(ODD) a matice symetrická pozitivně definitní (SPD). Rozhodněte zda dané matice jsou ODD nebo SPD.

Příklad 1.4 Jsou dány matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}.$$

a) Určete řádkovou, sloupcovou i Frobeniovu normu daných matic. Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory. Spočtěte spektrální poloměr. Pro které matice jsou vlastní vektory na sebe kolmé?

b) Zapište jak je definován pojem matice ostře diagonálně dominantní(ODD) a matice symetrická pozitivně definitní (SPD). Rozhodněte zda dané matice jsou ODD nebo SPD.

Příklad 1.5 (MATLAB) Jsou dány matice a vektory pravých stran (matice $\boldsymbol{A}$ je stejná jako v Př. 1.3)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1.001 & -1 \\ -1 & 1.001 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}^* = \mathbf{b} + (10^{-5}) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Rozhodněte, zda matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou ODD nebo SPD ?

b) Spočtete řešení soustavy rovnic $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\boldsymbol{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$, $\boldsymbol{B}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}$ a $\boldsymbol{B}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_1$. Srovnejte rozdíl $\mathbf{b} - \mathbf{b}_1$ oproti $\mathbf{x} - \mathbf{x}_1$ respektive $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3$.

c) Spočtěte číslo podmíněnnosti $\kappa = \lambda_{max}/\lambda_{min}$ pro matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$.

Příklad 1.6 (MATLAB) Je dána matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ($n = 10, 20, 50, 100, 200$)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Určete řádkovou, sloupcovou i Frobeniovu normu dané matice. Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory. Spočtěte spektrální poloměr.

b) Rozhodněte zda daná matice je ODD nebo SPD. Zdůvodněte.

c) Příkazem `eig` určete vlastní vektory matice.

d) Spočtěte číslo podmíněnnosti $\kappa(\boldsymbol{A}) = \lambda_{max}/\lambda_{min}$.

DÚ: Prostá iterační metoda

Příklad 1.7 (Domácí úkol na 2. cvičení) Je dána soustava

$$X = \boldsymbol{U}X + V$$

a) Definujte pojem spektrální poloměr matice $\boldsymbol{U}$.

b) Jak se počítají aproximace řešení pomocí prosté iterační metody?

c) Definujte, co znamená, že prostá iterační metoda je pro danou soustavu konvergentní?

d) Jaká je nutná a postačující podmínka konvergence této metody?

e) Jaká podmínka pro normu matice $\boldsymbol{U}$ zaručuje konvergenci této metody?

f) Uveďte v jakém případě není metoda konvergentní.

2 Prostá iterační metoda

Příklad 2.1 Je dána soustava rovnic $\mathbf{x} = \boldsymbol{U}\mathbf{x} + \mathbf{v}$, kde

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0. \\ 0. & 0.9 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Určete vlastní čísla matice $\boldsymbol{U}$ a její spektrální poloměr.

b) Volte počáteční přiblížení $\mathbf{x}^0 = (10, 1)^T$ a spočtěte $\mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}^2$, $\mathbf{x}^3$ prostou iterační metodou.

c) Určete přesné řešení dané soustavy $\mathbf{x}^*$ a spočtěte chybu $\mathbf{e}^j = \mathbf{x}^j - \mathbf{x}^*$ pro $j = 0, 1, 2, 3$.

d) Určete $n-$tou iteraci $\mathbf{x}^n$ prosté iterační metody a spočtěte chybu $\mathbf{e}^n = \mathbf{x}^n - \mathbf{x}^*$.

Příklad 2.2 Je dána soustava rovnic typu $\mathbf{x} = \boldsymbol{U}\mathbf{x} + \mathbf{v}$, kde

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 \\ -0.6 & 0.85 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Rozhodněte, zda pro danou soustavu rovnice je prostá iterační metoda konvergentní. V kladném případě určete $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ touto metodou při volbě $\mathbf{x}^{(0)} = \vec{0}$

b) Užitím vzorce

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \le \frac{\|\boldsymbol{U}\|^k}{1 - \|\boldsymbol{U}\|} \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|,$$

odhadněte chybu $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(2)}\|$, kde $\mathbf{x}^*$ je přesné řešení soustavy.

c) Odhadněte přibližný počet iterací k k tomu, aby $\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k)}\| < 10^{-5}$.

Příklad 2.3 Je dána soustava rovnic $\mathbf{x} = \boldsymbol{U}\mathbf{x} + \mathbf{v}$, kde

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} -0.7 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0.4 & 1 \\ -0.5 & 0 & -0.5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2.7 \\ 2.7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Je prostá iterační metoda pro danou soustavu konvergentní? V kladném případě určete $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ touto metodou při volbě $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$

Příklad 2.4 Určete, zda konverguje prostá iterační metoda pro soustavu tvaru $\mathbf{x} = \boldsymbol{U}\mathbf{x} + \mathbf{v}$, kde

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} -0.8 & 0.1 & 0 \\ 1 & 0.8 & 0 \\ 1 & -1 & 0.4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0.5 \end{pmatrix},$$

určete $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ touto metodou při volbě $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

Příklad 2.5 (MATLAB) Je dána matice typu $n \times n$ $(n = 10, 20, 50, 100, 200)$

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Určete řádkovou, sloupcovou i Frobeniovu normu dané matice. Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory. Spočtěte spektrální poloměr.

b) Rozhodněte zda daná matice je ODD nebo SPD.

c) Užijte vzorce pro odhad chyby z příkladu 2.2c a odhadněte kolik je potřeba iterací prosté iterační metody pro dosažení přesnosti $\varepsilon = 10^{-6}$. V odhadu místo normy užijte spektrální poloměr.

DÚ: Jacobiova a Gaussova-Seidelova iterační metoda

Příklad 2.6 (Domácí úkol na 3. cvičení) Je dána soustava rovnic $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

a) Zapište tři rovnice, které jsou dány maticovým zápisem $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (zápis po složkách) ?

b) Vezměte výsledek a) a z 1. rovnice vyjádřete x_1, z druhé rovnice x_2 a ze třetí x_3.

c) Užijte výsledek b) a definujte jakým iteračním postupem se počítají aproximace řešení dané soustavy rovnic pomocí Jacobiovy iterační metody?

d) Užijte výsledek b) a definujte jakým iteračním postupem se počítají aproximace řešení dané soustavy rovnic pomocí Gaussovy-Seidelovy iterační metody?

e) Uveďte jaké vlastnosti matice $\boldsymbol{A}$ jsou postačující k tomu, aby byla Jacobiova iterační metoda konvergentní?

f) Uveďte jaké vlastnosti matice $\boldsymbol{A}$ jsou postačující k tomu, aby byla Gaussova-Seidelova iterační metoda konvergentní?

g) Uveďte, co jsou iterační matice Jacobiovy $\boldsymbol{U}_J$ a Gauss-Seidelovy $\boldsymbol{U}_{GS}$ metody? Jakým způsobem lze počítat jejich spektrální poloměr pouze se znalostí matice $\boldsymbol{A}$?

h) Jaká je nutná a postačující podmínka konvergence Jacobiovy metody?

i) Jaká je nutná a postačující podmínka konvergence Gaussovy-Seidelovy metody?

3 Jacobiova a Gaussova-Seidelova iterační metoda

Příklad 3.1 Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -10 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

Rozhodněte, zda pro danou soustavu rovnic je Jacobiova iterační metoda konvergentní. Volte $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$ a spočtěte $\mathbf{x}^{(1)}$ touto metodou.

Příklad 3.2 Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Je Jacobiova iterační metoda konvergentní? Volte $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$ a spočtěte $\mathbf{x}^{(1)}$ touto metodou.

Příklad 3.3 Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & 1 \\ \frac{5}{2} & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ -2 \end{pmatrix},$$

Určete, zda pro danou soustavu je Gaussova-Seidelova iterační metoda konvergentní.

Příklad 3.4 Zdůvodněte, že pro soustavu lineárních rovnic tvaru $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

konverguje Jacobiova i Gaussova-Seidelova(GS) iterační metoda. Určete $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ GS metodou, $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

Příklad 3.5 Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $\boldsymbol{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} p & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix},$$

a) Uveďte aspoň 2 postačující podmínky pro konvergenci Gaussovy-Seidelovy iterační metody. Určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$, pro něž je některá z nich splněna.

b) Určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$, pro něž je splněna nutná a postačující podmínka Gaussovy-Seidelovy iterační metody.

Příklad 3.6 (MATLAB) Je dána matice typu $n \times n$ ($n = 10, 20, 50, 100, 200, 1000$)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Rozhodněte, zda pro danou matici je Gaussova-Seidelova iterační metoda konvergentní.

b) Rozhodněte, zda pro danou matici je Jacobiova iterační metoda konvergentní.

c) Volte $\mathbf{b} = (1, \ldots, 1)^T$. Řešte soustavu rovnic s maticí $\boldsymbol{A}$ pomocí Jacobiova iterační metody. Výpočet realizujte pomocí programu (zde lépe v jazyce C než v MATLABu) tak, aby nebylo nutné matici $\boldsymbol{A}$ v programu ukládat. Spočtěte 100 iterací a určete reziduum.

d) Program z části c) upravte tak, aby řešení bylo realizováno užitím Gaussovy-Seidelovy iterační metody. Srovnejte rychlost konvergence.

DÚ: Metoda nejmenších čtverců.

Příklad 3.7 (Domácí úkol na 4. cvičení) Je dána tabulka hodnot x_i, y_i, $i = 1, \ldots n$.

a) Vysvětlete princip metody nejmenších čtverců při aproximaci dané tabulkou hodnot polynomem nejvýše 1. stupně.

b) Zapište kvadratickou odchylku $\delta^2(p(x))$ polynomu $p(x)$ nejvýše prvního stupně od dané tabulky hodnot.

c) Uveďte jaká podmínka má platit pro kvadratickou odchylku polynomu nejvýše 1. stupně $p^*(x)$, který danou tabulku hodnot aproximuje nejlépe ve smyslu nejmenších čtverců.

d) Zdůvodněte jak se z části c) odvodí soustava normálních rovnic. Odvoďte soustavu normálních rovnic pro daný případ.

e) Vysvětlete princip metody nejmenších čtverců při aproximaci dané tabulkou hodnot polynomem nejvýše 2. stupně a odvoďte soustavu normálních rovnic pro daný případ.

---

4 Metoda nejmenších čtverců.

Příklad 4.1 a) Určete polynom nejvýše 2. stupně, který ve smyslu nejmenších čtverců nejlépe aproximuje tabulku hodnot.

b) Stanovte odpovídající kvadratickou odchylku.

x_i	-1	0	1	2	2
y_i	-2	0.6	1	2.8	2.6

Příklad 4.2 a) Určete polynom nejvýše 1. stupně, který ve smyslu nejmenších čtverců nejlépe aproximuje tabulku hodnot.

b) Stanovte odpovídající kvadratickou odchylku.

x_i	0	0.5	1	1	1.5	2
‘y_i	-0.9	0	0.9	0.9	2	3.1

Příklad 4.3 a) Určete polynom nejvýše 2. stupně, který ve smyslu nejmenších čtverců nejlépe aproximuje tabulku hodnot.

b) Stanovte odpovídající kvadratickou odchylku.

x_i	-2	-1	0	0	1	2
y_i	9.1	3.8	0.7	1.3	0.2	0.9

Příklad 4.4 a) Určete polynom nejvýše 2. stupně, který ve smyslu nejmenších čtverců nejlépe aproximuje tabulku hodnot.

b) Stanovte odpovídající kvadratickou odchylku.

x_i	-2	-1	0	0	1	2
y_i	2.9	0.2	-1.1	-0.9	-0.2	3.1

Příklad 4.5 (MATLAB) a) Sestavte soustavu normálních rovnic pro tabulku hodnot uloženou v souboru `cviceni4.dat` a pro n = 1, 2, 3, 4.

b) Příkazem `plot` zobrazte data z tabulky hodnot, a zobrazte polynom nejlepší aproximace.

DÚ: Nelineární rovnice a Newtonova metoda

Příklad 4.6 (Domácí úkol na 5. cvičení)

I. Je dána rovnice

$$f(x) = 0$$

a) Zapište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_n.

b) Graficky znázorněte graf funkce $f(x)$ a tečnu ke grafu funkce v bodě x_n. Zakreslete průsečík této tečny s osou x (tj. $y = 0$), označte ho jako $[x_{n+1}, 0]$.

c) Z rovnice tečny a) vyjádřete x_{n+1}.

II. Jsou dány rovnice

$$f(x, y) = 0, \qquad g(x, y) = 0$$

d) Zapište rovnici tečné roviny $\mathcal{T}_1$ ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $X^{(n)} = (x_n, y_n)^T$.

e) Zapište rovnici tečné roviny $\mathcal{T}_2$ ke grafu funkce $g(x, y)$ v bodě $X^{(n)} = (x_n, y_n)^T$.

f) Sestavte soustavu lineárních rovnic pro společný průsečík P rovin $z = 0$ a rovin $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$.

g) Označme $X^{(n+1)} = (x_{n+1}, y_{n+1})^T = P$ a z předchozí rovnice vyjádřete $X^{(n+1)}$.

5 Nelineární rovnice a Newtonova metoda

Příklad 5.1 Uvažujme funkci

$$f(x) = x^5 + x^4 - 1.$$

a) Ukažte, že v intervalu $< -1, 1 >$ existuje alespoň jeden kořen rovnice $f(x) = 0$. Zdůvodněte.

b) Volte $x_0 = 1$ a spočtete x_1 Newtonovou iterační metodou.

c) Volte $x_1 = -1$ a spočtete x_1, x_2 Newtonovou iterační metodou. Proč je tato volba nevhodná ?

d) Volte $x_1 = -5$ a počítejte iterace pomocí Newtonovy iterační metody. (MATLAB)

Příklad 5.2 a) Určete graficky přibližnou polohu kořenů soustavy

$$2xy - 3 = 0, \qquad x^2 - y^2 = 0.$$

b) Stanovte aproximaci $X^{(1)} = (x^{(1)}, y^{(1)})$ jednoho z kořenů soustavy a) Newtonovou metodou při volbě $X^{(0)} = (1; 0)^T$.

Příklad 5.3 a) Určete graficky přibližnou polohu kořenů soustavy

$$\frac{1}{x} - 10y = 0, \qquad x^2 + 16y^2 = 4.$$

b) Stanovte aproximaci $X^{(1)} = (x^{(1)}, y^{(1)})$ jednoho z kořenů soustavy a) Newtonovou metodou při volbě $X^{(0)} = (0; 1)^T$.

Příklad 5.4 a) Určete graficky přibližnou polohu kořenů soustavy

$$x^2 + y = 1, \qquad e^{-x} = \frac{1}{2}y.$$

b) Stanovte aproximaci $X^{(1)} = (x^{(1)}, y^{(1)})$ jednoho z kořenů soustavy a) Newtonovou metodou při volbě $X^{(0)} = (0; 1)^T$.

DÚ: Obyčejné diferenciální rovnice, Cauchyova úloha

Příklad 5.5 (Domácí úkol na 6. cvičení)

I. Uveďte postačující předpoklady pro existenci a jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy pro případ

a) $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$,

b) $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$, $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$, $(\mathbf{y} = (y_1, y_2))$,

c) $y'' = F(x, y, y')$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$

Úlohu c) tj. počáteční úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu převeďte na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu zapsaných v normálním tvaru, tedy tvar b).

II. Eulerova metoda

a) Zapište Taylorův polynom $T_1(x)$ stupně 1 pro aproximaci funkce $y(x)$ blízko bodu x_0. Označme $x = x_0 + h$ a zapišme tento polynom jako $T_1(h)$. Zapište Lagrangeův tvar zbytku $R_2(h)$, tj. tak aby platilo

$$y(x + h) = T_1(h) + R_2(h)$$

b) Označme $y(x)$ řešení ODR $y' = f(x, y)$. Užijte vztah $y(x + h) \approx T_1(h)$, pro derivaci y' užijte fakt, že $y(x)$ je řešení diferenciální rovnice a odvoďte vztah pro Eulerovu explicitní metodu.

6 Obyčejné diferenciální rovnice, Cauchyova úloha

Příklad 6.1 (Opakování)

Určete přesné řešení úlohy s počáteční podmínkou $y(0) = D > 0$. Načrtněte graf.

$$\text{a)}\quad y' = 1, \qquad \text{b)}\quad y' = y, \qquad \text{c)}\quad y' = -4y,$$

Příklad 6.2 (Opakování) Zopakujte si postup řešení

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & y'' - 3y' + 2y = 0, & y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \\ \text{b)} & \ddot{x} + \omega^2 x = 0, & x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = 0, (\omega > 0) \\ \text{c)} & \ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = f(t), & x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = 0 \end{array}$$

Příklad 6.3

Je dána Cauchyova úloha $y' = -y + x, y(0) = 1$

a) Užijte krok $h = 0.5$ a spočtěte aproximaci řešení $y(1)$ pomocí explicitní Eulerovy metody.

b) Užijte krok $h = 1$ a spočtěte aproximaci řešení $y(1)$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

Příklad 6.4 Je dána Cauchyova úloha $y' = e^{-x} - y^2, \qquad y(0) = 1$. Užijte krok $h = 0.5$ a spočtěte aproximaci řešení $y(0.5)$ pomocí explicitní Eulerovy metody.

Příklad 6.5 Je dána Cauchyova úloha $y'' + y = xe^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

a) Užijte krok $h = 1$ a spočtěte aproximaci řešení $y(2)$ pomocí explicitní Eulerovy metody.

b) Užijte krok $h = 1$ a spočtěte aproximaci řešení $y(1)$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

Příklad 6.6 (MATLAB: c-g) Je dána Cauchyova úloha

$$X' = \begin{pmatrix} -0.5 & 20 \\ -20 & -0.5 \end{pmatrix} X, \qquad X(0) = (1, 0)^T$$

a) Užijte krok $h = 0.1$ a spočtěte aproximaci řešení $X(0.2)$ pomocí explicitní Eulerovy metody.

b) Užijte krok $h = 0.5$ a spočtěte aproximaci řešení $X(0.5)$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

c) Užijte krok $h = 0.01$ a spočtěte aproximaci řešení na $< 0, 2 >$ pomocí explicitní Eulerovy metody.

d) Užijte krok $h = 0.01$ a spočtěte aproximaci řešení na $< 0, 2 >$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

e) Příkazem plot zobrazte graf 1. a 2. složky přibližného řešení z c), d).

f) Užijte krok $h = 0.005$ a spočtěte aproximaci řešení na $< 0, 2 >$ pomocí explicitní Eulerovy metody. Srovnejte s výsledkem c).

g) Výsledky z c) a d) srovnejte s přesným řešením.

DÚ: Collatzova metoda

Příklad 6.7 (Domácí úkol na 7. cvičení)

I. Pro zadané typy ODR stručně popište postup řešení v případě homogenních rovnic ($\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, homogenní rovnice znamená $g(x) \equiv 0, f \equiv 0, b \equiv 0$)

$$y' + f(x)y = g(x), \qquad \dot{X} = \boldsymbol{A}X + b, \qquad \ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t).$$

V posledních dvou případech rozeberte speciálně případ komplexních vlastních čísel resp. komplexních kořenů charakteristické rovnice.

1. Definujte, co znamená $\eta(h) = \mathcal{O}(h^p)$.
2. Ukažte, že pro dostatečně hladkou funkci $y(x)$ platí oba následující vztahy

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = y'(x) + \mathcal{O}(h), \qquad \frac{y(x) - y(x-h)}{h} = y'(x) + \mathcal{O}(h)$$

3. Užijte 2. vztah a odvoďte vztah pro implicitní Eulerovu metodu.
4. Ukažte, že pro dostatečně hladkou funkci $y(x)$ platí

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = y'(x + h/2) + \mathcal{O}(h^2).$$

5. Užijte předchozí vztah a odvoďte vzorce pro Collatzovu metodu.

7 Numerické řešení Cauchyovy úlohy. Eulerova a Collatzova metoda.

Příklad 7.1

Je dána Cauchyova úloha

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad X(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Užijte krok $h = 0.2$ a spočtěte aproximaci řešení $X(0.2)$ pomocí explicitní Eulerovy metody.

b) Užijte krok $h = 0.2$ a spočtěte aproximaci řešení $X(0.2)$ pomocí implicitní Eulerovy metody.

Příklad 7.2 Je dána Cauchyova úloha

$$y' = x\sqrt[3]{y}, \qquad y(0) = 1$$

a) Uveďte předpoklady zaručující existenci a jednoznačnost řešení dané Cauchyovy úlohy. Zapište oblast, kde jsou splněny.

b) Určete s krokem $h = 0,1$ pomocí Collatzovy přibližnou hodnotu řešení $y(0,2)$.

Příklad 7.3 Je dáno $h > 0$, $D > 0$ a Cauchyova úloha $y' = -4.2y, \quad y(0) = D$.

a) Užitím explicitní Eulerovy metody a kroku h spočítejte Y_E^j aproximaci řešení v bodech $x_j = jh$, $j = 1, 2, 3$ a $j = n$.

b) Užitím implicitní Eulerovy metody spočítejte Y_I^j aproximaci řešení v bodech x_j pro $j = 1, 2$ a $j = n$.

c) Určete přesné řešení $y(x)$ dané Cauchyovy úlohy a načrtněte jeho graf v intervalu $\langle 0, 2\rangle$. Pro krok $h = 0.5$ zakreslete také výsledky z a). Uveďte, proč je volba $h = 0.5$ nevhodná pro explicitní Eulerovu metodu!

Příklad 7.4 Je dána úloha

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \dot{X} = X + \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix}, \qquad X(0) = (1, -1)^T,$$

a) Volte krok $h = 0.1$ a užijte explicitní Eulerovu metodu pro určení aproximaci přesného řešení $X^1 \approx X(h)$.

b) Volte krok $h = 0.1$ a užijte implicitní Eulerovu metodu pro určení aproximaci přesného řešení $X^1 \approx X(h)$.

c) Volte krok $h = 0.1$ a užijte Collatzovu metodu pro určení aproximaci přesného řešení $X^1 \approx X(h)$.

Příklad 7.5 Je dána Cauchyova úloha

$$y' = 100y(1 - y), \quad y(0) = 0.5$$

a) Ověřte, zda v jaké oblasti má daná úloha má právě jedno řešení.

b) Ukažte, že pro řešení dané úlohy platí $0 \le y(x) \le 1$ pro $x \in (-\infty, \infty)$.

c) Volte $h = 0.1$ a určete přibližné řešení $y(0.1)$ explicitní Eulerovou metodou.

d) Volte $h = 0.1$ a určete přibližné řešení $y(0.1)$ Collatzovou metodou.

8 Numerické řešení Cauchyovy úlohy, metody Runge-Kutty (MATLAB)

Příklad 8.1 Je dána Cauchyova úloha

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2x - y_1^2 + x^2 \\ 2y_1y_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Zapište oblast $\mathcal{G}$ v níž jsou splněny podmínky existence a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy

b) Užitím Collatzovy metody určete přibližně hodnotu řešení v bodě $x = 0.1$ s krokem $h = 0.1$

Příklad 8.2 Výchylka mechanického oscilátoru $h(t)$ v bezrozměrném tvaru je popsána

$$m\ddot{h} + d\dot{h} + kh = \frac{1}{10t+1}\sin(50\pi t), \qquad h(0) = 0.05, \quad \dot{h}(0) = 0,$$

kde $m = 0.1$, $k = 4.2$.

a) Určete fundamentální systém řešení homogenní rovnice a určete frekvenci jeho kmitů (pro tento účel položme $d = 0$).

b) Pro $d = 0.001$ určete přibližně kořeny charakteristické rovnice. Na základě výsledků a) a kořenů charakteristické rovnice rozhodněte, zda volba kroku $h = 0.2$ je vhodná pro Eulerovu explicitní metodu.

c) Volte krok $h = 0.02$. Užijte explicitní Eulerovu metodu a určete přibližnou hodnotu výchylky v čase $t = 0.04$.

d) Volte krok $h = 0.04$, užijte Collatzovu metodu a určete přibližnou hodnotu výchylky v čase $t = 0.04$.

Příklad 8.3 * Kmity matematického kyvadla ($g = 9.81$, $l = 50$) jsou popsány rovnicí

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0, \qquad \varphi(0) = \frac{\pi}{3}, \dot{\varphi} = 0.$$

a) Volte krok $h = 0.01$. Užijte explicitní Eulerovu metodu a určete přibližnou hodnotu φ v čase $t = 0.01$.

b) Řešte numericky linearizovnou rovnici $\sin\varphi \approx \varphi$. Volte krok $h = 0.01$. Užijte explicitní Eulerovu metodu a určete přibližnou hodnotu φ v čase $t = 0.01$.

c) Na základě odhadu vlastní frekvence dané rovnice rozhodněte, zda je volba kroku h pro danou rovnici vhodná?

d) MATLAB: Nalezněte přibližné řešení s krokem h v intervalu $< 0, 5 >$.

Příklad 8.4 * Uvažujme tuhé (rovinné) těleso o hmotnosti $m = 0.2$, momentu setrvačnosti $I_\alpha = 0.001$ a statickém momentu $S_\alpha = me = 0.$. Tuhosti pružin jsou dány $k_h = 0.105$, $k_\alpha = 103$. Deformace (pohyb) tělesa je popsána pomocí rotace α a výchylky h rovnicí

$$\begin{pmatrix} m & S_\alpha \\ S_\alpha & I_\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05\sin(100\pi t) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{ll} h(0) = 0.01, & \dot{h}(0) = 0, \\ \alpha(0) = 0.01, & \dot{\alpha}(0) = 0, \end{array}$$

a) Volte krok $h = 0.01$. Užijte explicitní Eulerovu metodu a určete přibližnou hodnotu natočení α a výchylky h v čase $t = 0.01$. (Pozn. Pozor na výpočet hodnot funkce sinus, argument udáván v rad)

b) Volte krok $h = 0.01$, užijte Collatzovu metodu a určete přibližnou hodnotu natočení α a výchylky h v čase $t = 0.01$.

c) MATLAB: Nalezněte přibližné řešení s krokem $h = 0.001$ v intervalu $< 0, 2 >$.

Příklad 8.5 Poloha hmotného bodu o hmotnosti m v rovinném gravitačním poli s koeficientem odporu prostředí $k = 0.01$ je popsána systémem ODR

$$m\ddot{x} = -k\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \qquad m\ddot{y} = -mg - k\dot{y}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \qquad x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = A,\ y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 4,$$

kde $m = 0.1$, $g = 9.81$.

a) Nechť $A = 0$. Volte krok $h = 0.05$. Užijte explicitní Eulerovu metodu a určete přibližnou polohu hmotného bodu v čase $t = 0.1$.

b) Nechť $A = 0$. Volte krok $h = 0.05$, užijte Collatzovu metodu a určete přibližnou polohu hmotného bodu v čase $t = 0.05$.

c) Určete čas dopadu a rychlost dopadu.

d) Volte $A = 3$, krok $h = 0.01$ a užijte Collatzovu metodu.

e) Určete čas dopadu a rychlost dopadu. Nakreslete trajektorii bodu.

DÚ: Okrajová úloha pro ODR

Příklad 8.6 (Domácí úkol na 9. cvičení) Je dána Dirichletova okrajová úloha v samoadjungovaném tvaru

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x) \qquad y(a) = A, y(b) = B.$$

a) Zapište postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení této okrajové úlohy.

b) Užitím Taylorova rozvoje určete koeficienty α, β, δ a neznámou funkci $\eta(x^*, h)$ tak aby platilo

$$g(x^* + h) - g(x^* - h) = \alpha h g'(x^*) + \beta h^2 g''(x^*) + \eta(x^*, h)h^\delta$$

c) Užitím Taylorova rozvoje ukažte, že (uveďte za jakých předpokladů na funkci g)

$$g(x^* + h) - 2g(x^*) + g(x^* - h) = h^2 g''(x^*) + O(h^4).$$

d) Odvoďte náhradu v uzlu $x = x_i$ výrazu $-(p(x)y')'$ a určete jaké chyby se dopustíte.

$$-(p(x)y')'|_{x=x_i} \approx$$

e) Odvoďte náhradu rovnice v uzlu $x = x_i$.

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x).$$

9 Okrajová úloha pro ODR. Metoda sítí.

Příklad 9.1 Je dána Dirichletova okrajová úloha

$$-y'' = 4 - x^2, \qquad y(-2) = 2, y(2) = 0.$$

a) Zapište postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení okrajové úlohy v samoadjungovaném tvaru. Ověřte, zda jsou splněny.

b) Určete přesné řešení dané úlohy. Návod: Užijte integraci a určete integrační konstanty.

c) Volte krok $h = 1$ a zapište síťové rovnice pro aproximaci dané úlohy. Proveďte jeden krok Gaussovy-Seidelovy iterační metody, X^0 volte jako pravou stranu soustavy.

Příklad 9.2 Je dána Dirichletova okrajová úloha v samoadjungovaném tvaru

$$-(xy')' + (x+1)y = 4 \qquad y(1) = 0, y(5) = 1.$$

a) Zapište postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení okrajové úlohy v samoadjungovaném tvaru. Ověřte, zda jsou splněny.

b) Zapište síťové rovnice pro krok $h = 1$. Proveďte jeden krok Jacobiova iterační metody, X^0 volte jako pravou stranu soustavy.

Příklad 9.3 Rovnice popisující rozložení teploty v 1D tělese ($\kappa = 0.35$)

$$-\frac{d}{dx}\left(\kappa \frac{dT}{dx}\right) = 0 \qquad T(-2) = 10, T(2) = 0,$$

a) Zapište postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení okrajové úlohy v samoadjungovaném tvaru. Ověřte, zda jsou splněny.

b) Užitím Taylorova rozvoje odvoďte náhradu $y'(x)$ pomocí hodnot funkce $y(x), y(x \pm h)$.

c) Zapište síťové rovnice pro krok $h = 1$. Proveďte jeden krok Jacobiova iterační metody, X^0 volte jako pravou stranu soustavy.

Příklad 9.4 Rovnice popisující rozložení teploty je zapsána ve tvaru

$$-\frac{d}{dr}\left(0.1r \frac{d\theta}{dr}\right) = 0 \qquad \theta(1) = 100, \theta(2) = 20,$$

a) Zapište postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení okrajové úlohy v samoadjungovaném tvaru. Ověřte, zda jsou splněny.

b) Zapište síťové rovnice pro krok $h = 0.25$. Proveďte jeden krok Jacobiova iterační metody, X^0 volte jako pravou stranu soustavy.

DÚ: Poissonova rovnice

Příklad 9.5 (Domácí úkol na 10. cvičení) Je dána Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\triangle u = f \text{ v oblasti } \Omega.$$

a) Uveďte o jaký typ rovnice se jedná a pomocí parciálních derivací rozepište symbol $\triangle u$.

b) Zapište Dirichletovu okrajovou podmínku.

c) Vysvětlete princip metody sítí.

d) Vysvětlete pojem regulární, neregulární a hraniční uzel sítě.

e) Ukažte, že pro dostatečně hladkou funkci $y = y(x)$ je výraz $\frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1})$ aproximací $y'(x_i)$ 2.řádu přesnosti

f) Ukažte, že pro dostatečně hladkou funkci $y = y(x)$ je výraz $\frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$ aproximací $y''(x_i)$ 2.řádu přesnosti

g) Zapište, jak se v regulárním uzlu $P_{i,j} = [x_i, y_j]$ nahradí parciální derivace uvedené v části a). Odvoďte rovnici pro náhradu dané Poissonovy rovnice metodou sítí v regulárním uzlu $P_{i,j}$.

h) Odvoďte náhradu v neregulárním uzlu Q pomocí lineární interpolace.

10 Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

Příklad 10.1

Příklad 10.2 Je dána okrajová úloha $-\triangle u = 12xy$ v oblasti tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0,0]$, $[1.8,0]$, $[0,1.5]$, $[1.5,1.5]$, na hranici je předepsána okrajová podmínka $u(x,y) = x + y$.

a) Uveďte o jaký typ rovnice se jedná a pomocí parciálních derivací rozepište symbol $\triangle u$. Ověřte, zda pro funkci $u(x,y) = xy(97 - x^2 - y^2)$ platí $-\triangle u = 12xy$.

b) Zapište, jak se v regulárním uzlu $P_{i,j} = [x_i, y_j]$ nahradí parciální derivace uvedené v části a). Odvoďte rovnici pro náhradu dané rovnice metodou sítí v uzlu $P_{i,j}$.

c) Volte krok $h = 0.5$ a síť tak, aby obsahovala bod $[0,0]$. Sestavte síťové rovnice v uzlech sítě ležících na přímce $y = 1$. V neregulárních uzlech užijte lineární interpolaci.

Příklad 10.3 a) Je dána okrajová úloha

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4$$

v oblasti Ω tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0;0]$, $[1.5;0]$, $[1;1]$, $[0.5;1]$, a okrajová podmínka $u(x,y) = x + y$ na hranici Γ oblasti Ω.

b) Sestavte sít'ové rovnice v uzlech sítě ležících na přímce $y = 0.25$, které vzniknou při řešení úlohy metodou sítí s krokem $h = 0.25$ (v neregulárních uzlech užijte lineární interpolaci)

Příklad 10.4 Je dána Dirichletova úloha $-\Delta u = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ v oblasti $\Omega =< 0,1 >^2$ s okrajovou podmínkou $u(x,y) = xy$ na hranici $\partial\Omega$

a) Načrtněte obrázek s číslováním uzlů pro $h = \frac{1}{3}$

b) Ověřte, zda pro $v(x,y) = \frac{1}{2\pi^2}\sin(\pi x)\sin(\pi y)$ platí $-\Delta v = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$.

c) Sestavte sít'ové rovnice.

Příklad 10.5 (C/MATLAB) Je dána Dirichletova úloha $-\Delta u = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ v oblasti $\Omega =< 0,1 >^2$ s okrajovou podmínkou $u(x,y) = xy$ na hranici $\partial\Omega$

a) Volte $h = \frac{1}{n+1}$ pro $n = 10, 20, 40, 80, 160$.

b) Zapište síťovou rovnici v obecném vnitřním uzlu sítě $P_{i,j}$.

c) Užijte b), a řešte soustavu lineárních rovnic pomocí Gaussovy-Seidelovy iterační metody.

DÚ: Rovnice vedení tepla

Příklad 10.6 (Domácí úkol na 11. cvičení) Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla ($x \in [0, L]$, $t \geq 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(x,0) = \varphi(x), \quad u(0,t) = \alpha(t), \quad u(L,t) = \beta(t).$$

a) Zapište podmínky souhlasu.

b) Pomocí Taylorova rozvoje ukažte, že výraz $\frac{1}{\tau}(U_i^{(k+1)} - U_i^{(k)})$ je aproximací $\frac{\partial u}{\partial t}$ v uzlu $P_i^{(k)}$ řádu $\mathcal{O}(\tau)$ pro $u \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$

c) Pomocí Taylorova rozvoje ukažte, že výraz $\frac{1}{h^2}(U_{i+1}^{(k)} - 2U_i^{(k)} + U_{i-1}^{(k)})$ je aproximací $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v uzlu $P_i^{(k)}$ řádu $\mathcal{O}(h^2)$ pro $u \in C^{(4)}(\bar{\Omega})$

d) Odvoďte explicitní schéma pro řešení smíšené úlohy. Zapište podmínku stability schématu.

11 Rovnice vedení tepla

Příklad 11.1 Je dána smíšená úloha $\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{arctg} t$, s počáteční podmínkou $u(x,0) = 1 - x^2$ pro $x \in \langle 0; 1\rangle$, a okrajovými podmínkami

$$u(0,t) = 1 \qquad u(1,t) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{pro } t \geq 0$$

a) Ověřte podmínky souhlasu. Volte časový krok 0.01, prostorový krok 0.25 a určete hodnotu řešení v bodě $A = [0.5; 0.01]$ metodou sítí (užijte explicitní schema)

b) Určete maximální časový krok tak, aby explicitní schema řešení bylo pro daný prostorový krok ještě stabilní

Příklad 11.2 Je dána smíšená úloha $\frac{\partial u}{\partial t} = 0.3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x + 2t$ s počáteční podmínkou $u(x,0) = x^2$ pro $x \in \langle 0; 1\rangle$ a okrajovými podmínkami

$$u(0,t) = \operatorname{arctg}(t) \quad u(1,t) = \frac{1}{2t+1} \qquad \text{pro } t \geq 0$$

a) Ověřte splnění podmínek souhlasu. Určete τ a minimální krok h tak, aby při jejím řešení stabilní explicitní metodou ležel bod $P = [0.25; 0.1]$ v prvé časové vrstvě

b) Pro hodnoty τ a h z bodu (a) určete přibližnou hodnotu řešení v bodě P užitím explicitní metody

Příklad 11.3 Je dána rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2.5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

a) Určete typ této rovnice

b) Při zadaných podmínkách $u(x,0) = x(2-x)$ pro $x \in \langle 0; 2\rangle$ a $u(0,t) = 30t$, $u(2,t) = 0$ pro $t \geq 0$ volte $h = 0.5$ a $\tau = 0.1$ a ověřte podmínku stability explicitního schématu.

c) Rozhodněte, zda lze volit časový krok $\tau = 0.01$, resp. $\tau = 1.0$ aby pro daný prostorový krok bylo užité schema stabilní.

Příklad 11.4 Je dána smíšená úloha $\frac{\partial u}{\partial t} = 0.2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ s počáteční podmínkou $u(x,0) = ax^2 + b$ pro $x \in \langle 1; 2\rangle$ a okrajovými podmínkami $u(1,t) = \frac{10}{t+1}$ $u(2,t) = 4e^{-t}$ pro $t \geq 0$.

a) Určete hodnoty a, b tak, aby byly splněny podmínky souhlasu

b) Rozhodněte, zda lze volit $h = 0.2$ a $\tau = 0.2$ pro řešení úlohy explicitní metodou sítí.

Příklad 11.5 (MATLAB) DOPLNIT

DÚ: Vlnová rovnice

Příklad 11.6 (Domácí úkol na 12. cvičení)

a) Zapište podmínky souhlasu pro smíšenou úlohu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad \text{v oblasti } \Omega = (a;b) \times (0;\infty) \\
u(x,0) &= \varphi(x)\ , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) \qquad \text{pro } x \in \langle a;b \rangle \\
u(a,t) &= \alpha(t)\ , \quad u(b,t) = \beta(t) \qquad \text{pro } t \in \langle 0;\infty)
\end{aligned}$$

b) Užijte počáteční podmínky, Taylorův rozvoj a určete hodnoty přibližných řešení na první časové vrstvě. Členy druhého a vyšších řádů zanedbejte.

c) Odvoďte soustavu sít'ových rovnic pro určení přibližných hodnot řešení $(k+1)$-ní časové vrstvě $(k \geq 1)$ explicitní metodou.

12 Vlnová rovnice

Příklad 12.1 Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\,t$$

$$\begin{array}{rclrclr} u(x,0) & = & x^2\,, & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & 1-x^2 & \text{pro } x \in \langle -1; 1\rangle \\ u(-1,t) & = & 1\,, & u(1,t) & = & \cos t & \text{pro } t \in \langle 0; \infty) \end{array}$$

a) Ověřte splnění podmínek souhlasu (pro polohu a rychlost)

b) Určete maximální krok τ tak, aby byla splněna podmínka stability pro explicitní metodu s prostorovým krokem $h = 0.2$. Odvoďte schéma pro explicitní metodu.

c) Stanovte přibližnou hodnotu řešení v bodě $A = [0.2; 0.2]$ explicitní metodou.

Příklad 12.2 Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x$$

$$\begin{array}{rclrclr} u(x,0) & = & x(x-1)\,, & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & (1-x)^2 & \text{pro } x \in \langle 0; 1\rangle \\ u(0,t) & = & \sin t\,, & u(1,t) & = & 0 & \text{pro } t \in \langle 0; \infty) \end{array}$$

a) Pro explicitní metodu volte $h = 0.2$. Určete τ tak, aby byla splněna podmínka stability a bod $A = [0.4; 0.2]$ byl uzlem sítě. Stanovte přibližnou hodnotu řešení v bodě A.

Příklad 12.3 Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x$$

$$\begin{array}{rclrclr} u(x,0) & = & 1-x^2\,, & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & 0 & \text{pro } x \in \langle 1; 2\rangle \\ u(1,t) & = & 0\,, & u(2,t) & = & \frac{-3}{t^2+1} & \text{pro } t \in \langle 0; \infty) \end{array}$$

a) Pro explicitní metodu volte $h = 0.25$. Určete τ tak, aby byla splněna podmínka stability a bod $A = [1.5; 1]$ byl uzlem sítě. Stanovte přibližnou hodnotu řešení v bodě A.

Příklad 12.4 Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x$$

$$\begin{array}{rclrclr} u(x,0) & = & 2x^2\,, & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & (1-x)\sin\frac{\pi}{2}x & \text{pro } x \in \langle -1; 1\rangle \\ u(-1,t) & = & ae^{bt}\,, & u(1,t) & = & 2 & \text{pro } t \geq 0 \end{array}$$

a) Určete hodnoty a, b tak, aby byly splněny podmínky souhlasu

b) Pro explicitní metodu volte $h = 0.2$. Určete τ tak, aby byla splněna podmínka stability a bod $A = [0.8; 0.15]$ byl uzlem sítě. V které časové vrstvě leží bod A?

Příklad 12.5 (MATLAB) DOPLNIT

13 Témata semestrální práce

- Příklad 1.5.
- Příklad 1.6.
- Příklad 2.5.
- Příklad 3.6.
- Příklad 4.5.
- Příklad 6.6.
- Příklad 8.2.
- Příklad 8.5.
- Příklad 8.4.
- Příklad 8.3.
- Příklad 9.3.
- Příklad 9.4.
- Příklad 10.5.
- Příklad 11.5.
- Příklad 12.5.