Numerická matematika

Úvodní informace

Viz **http://mat.fs.cvut.cz/numer**

- **Kontakt:** Petr Sváček, KN:D 201
- Informace o předmětu

Soustavy lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Opakování:

- Matice transponovaná, symetrická,regulární.
- Vlastní číslo a vlastní vektor matice.

$$\mathbf{A}u = \lambda u, \qquad u \neq 0,$$

- Je-li matice **A** symetrická, pak existuje n reálných vlastních čísel (nemusí být navzájem různá) a k nim n navzájem ortogonálních vektorů.
- Euklidovská norma vektoru. (zobecníme)

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \left(\sum_i |u_i|^2 \right)^{1/2}$$

Velikost vektoru. Norma

Norma vektoru: $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rl} \text{(i)} & \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0 \\ \text{(ii)} & \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\| \\ \text{(iii)} & \|u + v\| \le \|u\| + \|v\| \end{array}$$

Norma matice $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rl} \text{(i)} & \|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = 0 \\ \text{(ii)} & \|\alpha \mathbf{A}\| = |\alpha| \|\mathbf{A}\| \\ \text{(iii)} & \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \\ \text{(iv)} & \|\mathbf{A}\,\mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\| \end{array}$$

Norma definovaná užitím libovolné normy vektoru je norma matice, tj.

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{x, \|x\|=1} \|\mathbf{A}x\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}x\|}{\|x\|}$$

Užívané normy matic a vektorů

- Řádková norma

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \qquad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$$

- Sloupcová norma

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}| \qquad \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

- Frobeniova/Euklidovská norma

$$\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

- Alternativní značení (!):

$$\|\cdot\|_m = \|\cdot\|_\infty, \qquad \|\cdot\|_\ell = \|\cdot\|_1, \qquad \|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_E$$

- Vztah normy matice a normy vektoru

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$$

Užívané normy matic a vektorů

- Spektrální poloměr

$$\rho(\mathbf{A}) = \max |\lambda_i|$$

- Vztah normy a spektrálního poloměru (Důkaz!)

$$\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|$$

- Kromě předchozích norem užíváme v přednáškách také spektrální normu

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2$$

- kde platí

$$\|\mathbf{A}\|_F \geq \|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}.$$

Vlastnosti matice

Matice $\mathbf{A}$ je

- **ostře diagonálně dominantní** (ODD), pokud

$$\forall i \qquad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \qquad \text{nebo } \forall i \qquad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ji}|$$

- **pozitivně definitní** pokud pro libovolný vektor $\mathbf{x} \neq 0$ platí

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} x_j > 0$$

- **symetrická a pozitivně definitní** (SPD)

Věta: Nechť matice $\mathbf{A}$ je symetrická. PNTJE:
(i) Matice je pozitivně definitní.
(ii) Matice má všechna vlastní čísla kladná.
(iii) Matice má všechny hlavní minory kladné.

Prostá iterační metoda

Je-li soustava tvaru

$$x = Ux + V,$$

Iterační metoda

$$X^{(k+1)} = UX^{(k)} + V,$$

Platí

- **Nutná a postačující podmínka**: Prostá iterační metoda je konvergentní právě tehdy, když $\rho(U) < 1$.
- **Postačující podmínka**: $\|\|$ - maticova norma. Je-li $\|U\| < 1$, pak prostá iterační metoda je konvergentní.
- **Odhad chyby**:

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|U\|}{1 - \|U\|}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|,$$

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|U\|^k}{1 - \|U\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|,$$

Prostá iterační metoda: Příklad.

Př. 1. Rozhodněte, zda konverguje prostá iterační metoda pro soustavu tvaru $X = UX + V$, kde $V = (-1, 2, 0.5)^T$,

$$U = \begin{pmatrix} -0.8 & 0.04 & 0 \\ 1 & 0.8 & 0 \\ 1 & -1 & 0.2 \end{pmatrix},$$

Pro $X^{(0)} = V$ určete $X^{(1)}$ touto metodou.

Př. 2. Je dána soustava rovnic $\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{x} + V$, kde $V = (1.7, -1.8, 0.5)^T$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & -0.3 \\ 0.4 & -0.3 & 0.1 \\ 0.6 & 0.1 & 0. \end{pmatrix}$$

Ověřte, zda PIM konverguje.
Určete $\mathbf{x}^{(2)}$ touto metodou při volbě $\mathbf{x}^{(0)} = \vec{0}$. Vypočtěte $\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_m$.

Přednáška č. 2

- Jacobiho iterační metoda, postup výpočtu, kritéria konvergence.
- Gauss-Seidelova iterační metoda, postup výpočtu, kritéria konvergence.

Prostá iterační metoda (opakování)

Soustava tvaru

$$\mathbf{x} = \mathbb{U}\mathbf{x} + \mathbf{V},$$

Iterační metoda

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbb{U}\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{V},$$

Platí

- **Nutná a postačující podmínka**: Prostá iterační metoda je konvergentní právě tehdy, když $\rho(U) < 1$.
- **Postačující podmínka**: Je-li $\|U\| < 1$, pak prostá iterační metoda je konvergentní. Navíc
- **Odhad chyby**:

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|U\|}{1 - \|U\|}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|,$$

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|U\|^k}{1 - \|U\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|,$$

Jak z matice $\mathbf{A}$ získám matici $\mathbb{U}$?

Odvození klasických iteračních metod pro $n = 3$

Vezmeme postupně rovnici $i = 1, 2, 3$ a z té nalezneme x_i:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 & & & x_1 &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right)\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 & &\rightarrow & x_2 &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_1 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3\right)\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 & & & x_3 &= \frac{1}{a_{33}}\left(b_1 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\right)
\end{aligned}
$$

Doplníme číslo iterace: tj. $k + 1$ na levou a k na pravou stranu rovnic.

Jacobiova iterační metoda.

Lze ale lépe!

Odvození Gauss-Seidelovy iterační metody pro $n = 3$

Vezmeme postupně rovnici $i = 1, 2, 3$ a z té nalezneme x_i:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 & & & x_1^{k+1} &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k\right) \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 & &\rightarrow & x_2^{k+1} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_1 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k\right) \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 & & & x_3^{k+1} &= \frac{1}{a_{33}}\left(b_1 - a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1}\right)
\end{aligned}
$$

Doplníme číslo iterace, od shora dolů, pokud už máme $k + 1$. ní tak ji použijeme.

Gauss-Seidelova iterační metoda.

Složkový zápis klasických iteračních metod

- **Jacobiho iterační metoda**

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

- **Gauss-Seidelova iterační metoda**

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

- Kdy lze vůbec použít ?
- Otázka konvergence ?

Jak z matice **A** získám matici $\mathbb{U}$?

Pro $\mathbf{A} = \mathbb{L} + \mathbb{D} + \mathbb{P}$. Dostáváme

$$\mathbb{D}\mathbf{x}^{(k+1)} = -(\mathbb{L} + \mathbb{P})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b},$$

a Jacobiho iterační metoda

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{-\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{L} + \mathbb{P})}_{\mathbb{U}_J}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{\mathbb{D}^{-1}\mathbf{b}}_{\mathbb{V}_J}.$$

Platí

- Jacobiho iterační metoda je konvergentní právě tehdy, když $\rho(\mathbb{U}_J) < 1$ (zdůvodnění).
- Vlastní čísla matice $\mathbb{U}_J$ jsou kořeny rovnice

$$\det(\mathbb{L} + \lambda\mathbb{D} + \mathbb{P}) = 0$$

- Je-li matice $\mathbb{A}$ ODD, pak Jacobiho iterační metoda je konvergentní (důkaz pro ODD v řádcích).

Gauss-Seidelova iterační metoda

Pro $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ zapíšeme $\mathbb{A} = \mathbb{L} + \mathbb{D} + \mathbb{P}$. Dostáváme

$$(\mathbb{D} + \mathbb{L})\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbb{P}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b},$$

a tedy iterační metodu

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \underbrace{-(\mathbb{D} + \mathbb{L})^{-1}\mathbb{P}}_{\mathbb{U}_{GS}}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{(\mathbb{D} + \mathbb{L})^{-1}\mathbf{b}}_{V_{GS}}.$$

Platí

- Je-li matice $\mathbb{A}$ ODD, pak je GS iterační metoda konvergentní.
- Je-li matice $\mathbb{A}$ SPD, pak je GS iterační metoda konvergentní.
- GS iterační metoda je konvergentní právě tehdy, když $\rho(\mathbb{U}_{GS}) < 1$.
- Vlastní čísla matice $\mathbb{U}_{GS}$ jsou kořeny rovnice

$$\det(\lambda\mathbb{L} + \lambda\mathbb{D} + \mathbb{P}) = 0$$

Iterační metody: Příklad.

Př. 4. Dána soustava lineárních rovnic $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & 1 \\ p & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ -2 \end{pmatrix},$$

a) Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$, pro které je splněna některá z postačujících podmínek konvergence Gauss-Seidelovy iterační metody.

b) Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$, pro něž je splněna nutná a postačující podmínka Gauss-Seidelovy iterační metody.

c) Volte $p = 0$ a spočtěte $X^{(1)}$ pokud $X^{(0)} = B$.

Př. 5. Dána soustava

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & p \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ p \\ -2 \end{pmatrix},$$

a) Určete všechna $p \in R$, pro něž je splněna některá z postačujících podmínek (pro matici A, ne U_G) GS iterační metody.
b) Určete všechna $p \in R$, pro něž je splněna nutná a postačující podmínka GS iterační metody.

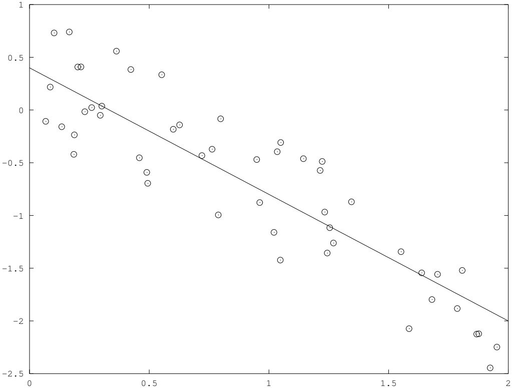
c) Volte $p = 0$ a spočtěte $X^{(1)}$ pokud $X^{(0)} = B$.

Přednáška č. 3 : Hledání minima funkce

- Metoda nejmenších čtverců.
- Metoda největšího spádu : Hledáme minumum funkce

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \min F(x) = ?$$

Aproximace pomocí metody nejmenších čtverců



- **Princip:** Minimalizace kvadratické odchyklky

$$\delta^2(p(x)) = \sum_i (p(x_i) - y_i)^2$$

- **Volba funkce:** Např. polynom stupně 2

$$\delta^2(p(x)) = \sum_i \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i\right)^2$$

Aproximace pomocí metody nejmenších čtverců

- Princip: Minimalizace kvadratické odchyklky

$$\delta^2(p(x)) = \sum_i (p(x_i) - y_i)^2$$

- dána tabulka dat $[x_i, y_i]$, minimalizujeme kvadratickou odchylku

$$G(a_0, a_1) := \delta^2(p(x)) = \sum_i (p(x_i) - y_i)^2$$

- odvození normálních rovnic $\partial G / \partial a_k = 0$ pro $k = 0, 1$.
- soustava normálních rovnic

$$a_0(\sum_i 1) + a_1(\sum_i x_i) = \sum_i y_i,$$

$$a_0(\sum_i x_i) + a_1(\sum_i x_i^2) = \sum_i x_i y_i,$$

Minimalizace funkce a soustava lin. rovnic

- Vezměme A symetrickou matici a funkci:

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{b}$$

- Rozepíšeme přírůstek ve směru $\mathbf{v}$:

$$F(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{v}) - F(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{v}^T(\mathbb{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) + \frac{1}{2}\alpha^2\mathbf{v}^T\mathbf{A}\mathbf{v}$$

Důsledek: Nechť $\mathbf{A}$ je SPD matice. Pak x^* je minimum F právě tehdy když je řešením soustavy rovnic.

Metoda největšího spádu

- **Předpoklad:** Matice A symetrická a pozitivně definitní.
- Iterační proces minimalizující $F(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha \mathbf{v}$$

- Směr **největšího spádu**:

$$\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbf{x}^{(k)},$$

- **Optimální** krok ve směru $\mathbf{v}$

$$\alpha = \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{b} - \mathbb{A}\mathbf{x})}{\mathbf{v} \cdot (\mathbb{A}\mathbf{v})}$$

Přednáška č. 4: Soustavy nelineárních algebraických rovnic

Systém *n*-rovnic o *n*-neznámých

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\
&\vdots \\
f_n(x_1, \dots, x_n) &= 0
\end{aligned}
$$

- existence ani jednoznačnost řešení - jen ve specifických případech

Kontraktivní zobrazení. Pevný bod.

Def. Zobrazení $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se nazývá kontraktivní na $M \subset \mathbb{R}^n$, pokud existuje $c \in [0, 1)$ tak, že pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\|F(x) - F(y)\| \leq c\|x - y\|.$$

Věta Je-li $F : M \to M$ kontraktivní, pak existuje právě jeden pevný bod $x^* = F(x^*)$.

Prostá iterační metoda pro řešení soustavy lineárních rovnic je speciálním případem.

Nebo:

$$x = 1 + \sin(x)$$

$$x = x + \omega(f(x) - A)$$

$$x = x - f(x)/f'(x)$$

Soustavy nelineárních algebraických rovnic

Newtonova metoda pro případ 1d

V bodě x^k užijeme Taylorův polynom

$$0 = f(x) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\mathbf{k}}) + R_2(x)$$

Zanedbáním dostaneme vzorec pro $x \approx x^{k+1}$

$$x^{k+1} = x^k - \left(f'(x^k)\right)^{-1} f(x^k).$$

Obecný vzorec pro soustavu $F(x) = 0$. Co je $F'(x)$?

$$x^{k+1} = x^k - \left(F'(x^k)\right)^{-1} F(x^k).$$

Newtonova metoda - odvození

Odvození pro 2 nelineární rovnice o 2 neznámých

Označme $k-$té přiblížení jako $A = [x^{(k)}, y^{(k)}]$, dostáváme vzorec pro přírůstek $x^* - x^{(k)}$, $y^* - y^{(k)}$:

$$0 = f(x^*, y^*) = f(A) + f_x(A)\left(x^* - x^{(k)}\right) + f_y(A)\left(y^* - y^{(k)}\right) + \dots$$

$$0 = g(x^*, y^*) = g(A) + g_x(A)\left(x^* - x^{(k)}\right) + g_y(A)\left(y^* - y^{(k)}\right) + \dots$$

Zanedbáme-li další členy Taylorova rozvoje

$$\begin{aligned} f_x(A)\Delta_x + \quad f_y(A)\Delta_y + f(A) &= 0, \\ g_x(A)\Delta_x + \quad g_y(A)\Delta_y + g(A) &= 0, \end{aligned}$$

dostáváme soustavu lineárních rovnic pro

$$\Delta_x = x^{(k+1)} - x^{(k)}, \qquad \Delta_y = y^{(k+1)} - y^{(k)}.$$

Newtonova iterační metoda

1. Zvolíme počáteční přiblížení $[x^0, y^0]$.
2. Postupně pro $k = 0, 1, \ldots$

a) Sestavíme soustavu rovnic v bodě $A = [x^{(k)}, y^{(k)}]$,

$$\begin{aligned} f_x(A)\Delta_x + f_y(A)\Delta_y + f(A) &= 0 \\ g_x(A)\Delta_x + g_y(A)\Delta_y + g(A) &= 0 \end{aligned}$$

b) Najdeme řešení této soustavy Δ_x, Δ_y

c) Spočteme nové přiblížení

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{pmatrix}$$

Není zaručena konvergence k řešení.
Metoda může selhat (viz b))
Konvergence závisí na počátečním přiblížení.

Newtonova metoda

Pro funkci jedné proměnné $f(x)$:

$$x^{k+1} = x^k - \left(f'(x^k)\right)^{-1} f(x^k).$$

Pro dvě rovnice o dvou neznámých:

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_x(A) & f_y(A) \\ g_x(A) & g_y(A) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f(x^{(k)}) \\ g(y^{(k)}) \end{pmatrix}$$

Obecný vzorec pro soustavu $F'(x)$ - Jacobiho matice.

$$x^{k+1} = x^k - \left(F'(x^k)\right)^{-1} F(x^k).$$

Opakování: Taylorův polynom, tvar zbytku, symboly O(h)

- Taylorův polynom

$$f(x+h) = T_n(h) + R_{n+1}(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + R_{n+1}(h)$$

- Lagrangeův tvar zbytku

$$R_{n+1}(h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

- Užíváme zápis

$$g(h) = \mathcal{O}(h^p).$$

pokud pro funkci $g(h)$ definovanou pro všechna $h \in (0, h_{max})$ existuje $K > 0$ tak, že

$$|g(h)| \leq K h^p.$$

Přednáška č. 5

Numerické řešení ODR.

- Opakování: Taylorův polynom, ODR, Cauchyova úloha, formulace úlohy a způsoby řešení.
- Princip numerického řešení.
- Numerické řešení Eulerova a Collatzova metoda.

Opakování: Taylorův polynom, tvar zbytku, symboly O(h)

- Taylorův polynom

$$f(x) = f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n+R_{n+1}(h)$$

- Lagrangeův tvar zbytku

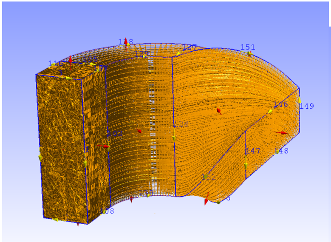
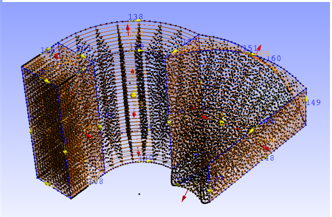
$$R_{n+1}(h) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

Motivace: Cauchyova úloha v technických problémech, způsoby řešení

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t)$$

$$\dot{X} = AX + B(t)$$

$$y' = f(x, y),$$

Cauchyova úloha, formulace problému

- Cauchyova úloha pro ODR 1. řádu

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

- Cauchyova úloha pro soustavu rovnic

$$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}), \qquad \vec{y}(x_0) = \vec{y}^0.$$

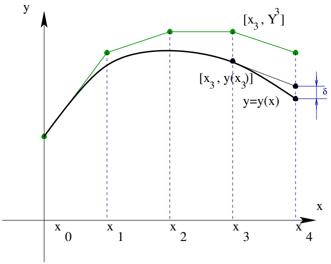
- Cauchyova úloha pro rovnici n-tého řádu

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

$$y(x_0) = y_0, \dots$$

- Existence a jednoznačnost řešení ?!

Princip numerického řešení



- **Přesné řešení:** $y = y(x)$ pro $x \in \langle a, b \rangle$.
- **Přibližné řešení** Y^i: krok $h = (b - a)/n$,

$$x_i = a + ih, \qquad Y^i \approx y(x_i)$$

- Nahradíme derivaci:

$$y'(x_n) \approx ???$$

Taylorův polynom, náhrada derivace

- Taylorův polynom

$$f(x+h) = T_n(h) + R_{n+1}(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + R_{n+1}(h)$$

- Je-li f dostatečně hladká, pak $|R_{n+1}(h)| \leq Ch^{n+1} = O(h^{n+1})$
- Využijeme k náhradě derivací.

$$f(x+h) - f(x) = \dots$$

$$f(x-h) - f(x) = \dots$$

$$f(x+h) - f(x-h) = \dots$$

Explicitní a implicitní Eulerova metoda.

- Explicitní Eulerova metoda

$$\frac{Y^{n+1} - Y^n}{h} = f(x_n, Y^n), \qquad Y^{n+1} = Y^n + hf(x_n, Y^n),$$

- Implicitní Eulerova metoda

$$\frac{Y^{n+1} - Y^n}{h} = f(x_{n+1}, Y^{n+1}), \qquad Y^{n+1} - hf(x_{n+1}, Y^{n+1}) = Y^n$$

- **Stabilita:** Řešíme úlohu ($\lambda \in \mathbb{C}$)

$$y' = \lambda y, \qquad y(0) = 1,$$

  kde známe analytické řešení. Jak se chová numerické řešení?
- **Globální chyba** metody: $O(h)$.

Collatzova metoda

- Řešení rovnice
$$y'(x) = f(x, y(x))$$
- Nahradíme derivaci v bodě $x_{n+1/2} = x_n + h/2$
$$\frac{Y^{n+1} - Y^n}{h} \approx y'(x_{n+1/2}) = f(x_n + h/2, y(x_n + h/2)),$$
- Nahradíme
$$y(x_n + h/2) = y(x_n) + \frac{h}{2} y'(x_n) + \mathcal{O}(h^2) \approx Y^n + \frac{h}{2} f(x_n, Y^n).$$
- Dostaneme Collatzovu metodu:

Přednáška č. 6

- Odvození a užití explicitní/implicitní Eulerovy metody.
- Odvození a užití Collatzovy metody.
- Konvergence obecné jednokrokové metody, lokální a akumulovaná aproximační chyba.

Numerické řešení Cauchyovy úlohy

Cauchyova úloha pro ODR 1. řádu

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

Pozn.

- Co rozumíme pod pojmem řešení?
- Proč řešíme ODR?
- Jaká je geometrická interpretace úlohy?

  (derivace = směrnice tečny, tedy je dáno vektorové pole)
- **Předpoklady:** f, f_y -spojité pro $x \in < a, b >$, $y \in \mathbb{R}$
- Jak hledáme numerické řešení? $I =< a, b >$, $a = x_0$,

$$x_i = a + ih, \qquad h = (b - a)/n, \qquad Y^i \approx y(x_i) = y_i$$

- Použijeme Taylor. rozvoj!

Taylorův polynom, náhrady derivace

- Taylorův polynom pro $y \in \mathcal{C}^3$ (!)

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{y''(x)}{2}h^2 + \mathcal{O}(h^3) \tag{1}$$

$$y(x-h) = y(x) - y'(x)h + \frac{y''(x)}{2}h^2 + \mathcal{O}(h^3) \tag{2}$$

- Vyjádříme y' z rovnic (1) nebo (2)

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \mathcal{O}(h), \qquad y'(x) = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

- nebo odečtením

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

- speciálně pro $h = \tilde{h}/2$!

Náhrady derivace

- explicitní Eulerova metoda

$$y'(x_i) \approx \frac{Y^{i+1} - Y^i}{h}$$

- implicitní Eulerova metoda

$$y'(x_{i+1}) \approx \frac{Y^{i+1} - Y^i}{h}$$

- využijeme později/Collatzova metoda

$$y'(x_i + h/2) \approx \frac{Y^{i+1} - Y^i}{h}$$

Eulerova metoda, chyba

Př.

$$y' = -2y + \sin x, \qquad y(0) = 1$$

Př.

$$y' = -2y, \qquad y(0) = 1$$

Řešení. Expl. euler

$$x_0 = 0, \qquad Y^0 = 1$$

$$x_1 = h, \qquad Y^1 = (1 - 2h)Y^0$$

$$\dots$$

$$x_n = nh, \qquad Y^n = (1 - 2h)^n Y^0$$

Eulerova metoda, soustava rovnic

Př.

$$\dot{X} = \mathbb{A}X, \qquad X(0) = U$$

Řešení. Expl. euler

$$t_0 = 0, \qquad X^0 = U$$

$$t_1 = h, \qquad X^1 = (\mathbb{E} + h\mathbb{A})U$$

$$\dots$$

$$t_n = nh, \qquad X^n = (\mathbb{E} + h\mathbb{A})^n U$$

Je-li U vlastni vektor příslušný $\lambda = -2$:

$$X^n = (1 + h\lambda)^n U$$

Collatzova metoda

Odvození

Ad využijeme později/Collatzova metoda

$$y'(x_i + h/2) \approx \frac{Y^{i+1} - Y^i}{h}$$

kde $y(x)$ je řešením

$$y'(x_i + h/2) = f(x_i + h/2, y(x_i + h/2))$$

Užijeme Taylora

$$y(x_i + h/2) \approx y(x_i) + h/2y'(x_i) = y(x_i) + h/2f(x_i, y(x_i))$$

Dostaneme vzorec:

$$Y^{i+1} = Y^i + h\,f\left(x_i + \frac{h}{2}, Y^i + \frac{h}{2}\,f(x_i, Y^i)\right)$$

Collatzova metoda, chyba

Př.

$$y' = -2y, \qquad y(0) = 1$$

Řešení.

$$x_0 = 0, \qquad Y^0 = 1$$

$$x_1 = h, \qquad Y^1 = (1 - 2h + 2h^2)Y^0$$

$$\dots$$

$$x_n = nh, \qquad Y^n = (1 - 2h + 2h^2)^n Y^0$$

Jaký je rozdíl mezi Collatzovou a Eulerovou metodou? Co mají společného? Nelze použít nějakou lepší metodu?

Jednokrokové metody

- **Jednokroková metoda**:

$$Y^{i+1} = Y^i + h\Phi(x_i, Y^i, h)$$

- $\Phi = \Phi(x, y, h)$ - přírůstková funkce.
- **Př.**

$$\Phi(x, y, h) = f(x, y)$$

$$\Phi(x, y, h) = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y)\right)$$

Chyba jednokrokové metody

- **Jednokroková metoda**:

$$Y^{i+1} = Y^i + h\,\Phi(x_i, Y^i, h)$$

- **Přesné řešení**

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\,\Delta(x_i, y(x_i), h)$$

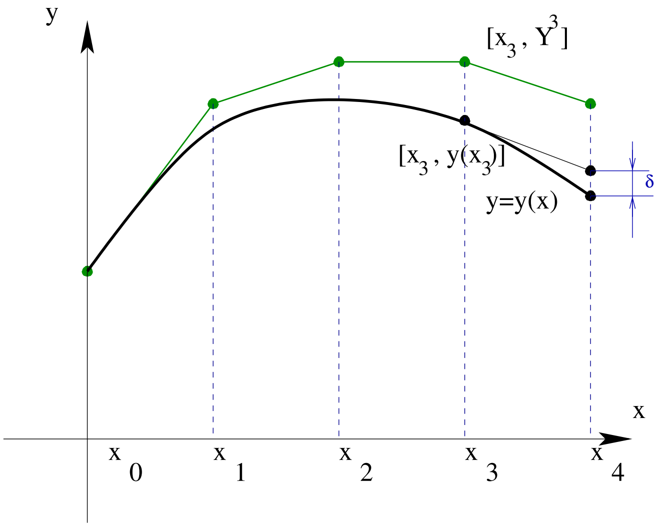
- **Lokální relativní diskretizační chyba**

$$\delta_i = \delta(x_i) = \Phi(x_i, y(x_i), h) - \Delta(x_i, y(x_i), h)$$

- Nás ale zajímá **akumulovaná diskretizační chyba**

$$e_i = Y^i - y(x_i)$$

Chyba jednokrokové metody



Chyba jednokrokové metody

- **Jednokroková metoda**:

$$Y^{i+1} = Y^i + h\,\Phi(x_i, Y^i, h)$$

- **Přesné řešení** (Δ - přesný relativní přírůstek)

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\,\Delta(x_i, y(x_i), h)$$

- Odečtením

$$e^{i+1} = e^i + h\,\underbrace{\left(\Phi(x_i, Y^i, h) - \Delta(x_i, y(x_i), h)\right)}_{\Theta}$$

- kde

$$\Theta = \Big(\Phi(x_i, Y^i, h) - \Phi(x_i, y(x_i), h) + \underbrace{\Phi(x_i, y(x_i), h) - \Delta(x_i, y(x_i), h)}_{\delta_i}\Big)$$

Jednokroková metoda

Předpoklady pro konvergenci

- Konsistence přírůstkové funkce $\Phi = \Phi(x, y, h)$, tj. spojitost a navíc
$$\Phi(x, y, 0) = f(x, y)$$
- C_L - Lipschitzovskost přírůstkové funkce Φ, tj.
$$|\Phi(x, y_1, h) - \Phi(x, y_2, h)| \leq C_L |y_1 - y_2|.$$

Dostaneme odhad:

$$e^{i+1} \leq e^i + hC_L e^i + h\delta_i = (1 + hC_L)e^i + h\delta_i$$

Máme odhad:

$$|e^{i+1}| \leq (1 + hC_L)|e^i| + h|\delta_i|$$

kde

$$|\delta_i| \leq Mh^p$$

Postupně vidíme, že

$$\begin{aligned}
|e^1| &\leq M\,h^{p+1} \\
|e^2| &\leq \underbrace{(1 + hC_L)}_{A}|e^1| + Mh^{p+1} = (1 + A)Mh^{p+1} \\
|e^3| &\leq A|e^2| + Mh^{p+1} = (1 + A + A^2)Mh^{p+1} \\
&\vdots \\
|e^n| &\leq (1 + A + \cdots + A^{n-1})Mh^{p+1} \leq \frac{A^n - 1}{A - 1}Mh^{p+1} \leq Kh^p
\end{aligned}$$

Závěr: Jednokrokové metody

- **Předpoklad** (P_Φ): Konsistence a lipschitzovskost přírůstkové funkce Φ.
- Ukázali-jsme: Pokud pro jednokrokovou metodu platí P_Φ a lokální relativní diskretizační chyba δ je p-tého řádu, pak akumulovaná diskretizační chyba je také řádu p!
  K čemu to je?

Závěr: Jednokrokové metody

- **Předpoklad** (P_Φ): Konsistence a lipschitzovskost přírůstkové funkce Φ.
- Ukázali-jsme: Pokud pro jednokrokovou metodu platí P_Φ a lokální relativní diskretizační chyba δ je p-tého řádu, pak akumulovaná diskretizační chyba je také řádu p!
  K čemu to je?
- **Eulerova metoda:** jednokroková, lokální relativní diskretizační chyba je 1. řádu
- **Collatzova metoda:** jednokroková, lokální relativní diskretizační chyba je 2. řádu
- **Konstrukce metod vyššího řádu (!):** Stačí najít Φ tak, aby

$$|\Phi(x, y, h) - \Delta(x, y, h)| \leq Ch^p$$

Přednáška č. 7

- Jednokrokové metody, metody vyššího řádu, princip metod Runge-Kutty.
- Metody vyššího řádu: Collatzova, RK3 a RK4.
- A posteriorni odhady chyby: Metoda polovičního kroku.
-

Minule: Jednokrokové metody

- Jednokroková metoda (Φ - přírůstková funkce)

$$Y^{i+1} = Y^i + h\,\Phi(x_i, Y^i, h)$$

- Přesné řešení (Δ - přesný relativní přírůstek)

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\,\Delta(x_i, y(x_i), h)$$

- tedy

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\,\Phi(x_i, y(x_i), h) + h\,\delta_i$$

  kde lokální relativní diskretizační chyba

$$\delta_i = \Delta(x_i, y(x_i), h) - \Phi(x_i, y(x_i), h)$$

Jednokrokové metody

Metody vyššího řádu

- Cauchyova úloha $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$
- Metody Taylorova rozvoje

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2}y''(x_0)h^2 + O(h^3)$$

- Užijeme

$$y''(x) = \frac{d}{dx}\left(y'\right)(x)$$

- To je ale komplikované, nutno pro každou konkrétní úlohu vypočítat f_x a f_y. Zkusíme jinak

Jednokrokové metody typu Runge-Kutta: n = 2.

- Jednokrokové metody

$$Y^{(i+1)} = Y^{(i)} + h\Phi(x_i, Y^{(i)}, h)$$

- Hledáme co nejlepší Φ ve tvaru (RK)

$$\Phi(x_i, Y^{(i)}, h) = \omega_1 \mathbf{k}_1 + \omega_2 \mathbf{k}_2$$

-

$$\mathbf{k}_1 = f(x_i, Y^i), \qquad \mathbf{k}_2 = f(x_i + \alpha_2 h, Y^i + h\beta_{21}\mathbf{k}_1)$$

- Srovnáme Φ s Δ

$$\Delta(x, y(x), h) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \underbrace{y'(x) + \frac{1}{2} h y''(x)}_{\Phi} + \mathcal{O}(h^2)$$

- Srovnáme Φ a Δ: 4 koeficienty $\omega_1, \omega_2, \alpha_2, \beta_{21}$.

Metoda Runge-Kutty 3. řádu.

Např.

$$Y^{i+1} = Y^i + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 4\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3),$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= f(x_i, Y^i), \\
\mathbf{k}_2 &= f(x_i + \tfrac{h}{2}, Y^i + \tfrac{h}{2}\mathbf{k}_1), \\
\mathbf{k}_3 &= f(x_i + h, Y^i + h(2k_2 - k_1)),
\end{aligned}$$

Lokální relativní aproximační chyba: $O(h^3)$.

Metoda Runge-Kutty 4. řádu.

Runge-Kutta 4. řádu: Např.

$$Y^{i+1} = Y^i + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4),$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= f(x_i, Y^i), \\
\mathbf{k}_2 &= f(x_i + \tfrac{h}{2}, Y^i + \tfrac{h}{2}\mathbf{k}_1), \\
\mathbf{k}_3 &= f(x_i + \tfrac{h}{2}, Y^i + \tfrac{h}{2}\mathbf{k}_2), \\
\mathbf{k}_4 &= f(x_i + h, Y^i + h\mathbf{k}_3),
\end{aligned}$$

Lokální relativní aproximační chyba: $O(h^4)$.

Obecně: Metody typu Runge-Kutty n-tého stupně

- $$Y^{i+1} = Y^i + h\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathbf{k}_i\right),$$
- kde
$$k_i = f(x_i + \alpha_i h, Y^i + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} \mathbf{k}_i)$$
- Řád konvergence $\mathcal{O}(h^p)$, pozor obecně $p \neq n$!

n	1	2	3	4	5	6	...
p	1	2	3	4	**4**	**5**	...

- **Pozn.** Volba kroku: h lze volit i záporné, lze použít i volba $h > 1$ - souvislost s $O(h^p)$!

A posteriorní odhady chyb - metoda polovičního kroku.

- volíme krok $h > 0$, víme
$$Y^m - y(x_m) = c(x_m)h^p + O(h^{p+1})$$
- volíme krok $\tilde{h} = h/2$, víme
$$\tilde{Y}^{2m} - y(x_m) = c(\tilde{x}_{2m})\frac{h^p}{2^p} + O(h^{p+1})$$
- Odhad chyby
$$Y^m - \tilde{Y}^{2m} = c(x_m)h^p(1 - \frac{1}{2^p}) + O(h^{p+1})$$
- Jiná myšlenka: RK4/5.

Volba kroku:

- význam $\mathcal{O}(h^p)$!
- Př. 1

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = \sin(\omega_2 t)$$

- chování řešení pro rovnici

$$y' = -\lambda y, \qquad y(0) = D > 0$$

- charakter řešení a numerického řešení

$$y' = \cos x + \lambda(\sin x - y), \qquad y(0) = 0$$

-

$$\dot{X} = AX, \qquad X(0) = u$$

- tedy $\lambda \in \mathbb{C}$

$$y' = \lambda y, \qquad y(0) = z$$

Okrajové úlohy, existence řešení

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu

- Úloha A:
$$y''(x) = sin(x), \qquad y(0) = 2, y(\pi) = -2.$$
- Úloha B:
$$y'' + y = 0,$$
okrajové podmínky
$$y(0) = 0, y(\pi) = 1, \qquad y(0) = 0, y(\pi/2) = 1, \qquad y(0) = 0, y(\pi) = 0.$$
- **Úloha C:**
$$-y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0, y(\pi) = 0.$$

Ve všech případech: hladká data.
Existenci a jednoznačnost řešení lze zaručit jen pro úlohy ve speciálním tvaru.

Přednáška č. 8

- Okrajová úloha pro obyčejnou lineární diferenciální rovnici v samoadjungovaném tvaru. Sturmovy okrajové podmínky.
- Existence a jednoznačnost řešení.
- Numerické řešení okrajové úlohy pro ODR.
- Konvergence a odhad chyby.

Okrajová úloha pro diferenciální rovnici 2. řádu

Motivace: proč okrajová úloha?

- **Cauchyova úloha:**

$$my'' = F(x, y, y'), \qquad y(a) = A, y'(a) = K$$

- **Okrajová úloha:**

$$my'' = F(x, y, y'), \qquad y(a) = A, y(b) = B$$

Okrajová úloha pro lineární diferenciální rovnici 2. řádu

- Rovnice

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = g(x), \qquad \text{pro } x \in (a, b),$$

- Okrajové podmínky, např. Dirichletovy

$$y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta,$$

- Existence a jednoznačné řešení $y(x)$?

pro okrajovou úlohu mnohem komplikovanější

Okrajová úloha pro lineární ODR 2. řádu

- **Úloha A:**

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(b) = y_b$$

- Obecné řešení rovnice $y(x) = A\sin x + B\cos x$.
- Okrajová podmínka v x = 0 dává B = 0,
- Okrajová podmínka v x = b:

$$y(\pi) = 1, \quad \text{nebo} \quad y(\pi) = 0, \quad \text{nebo} \quad y(\pi/2) = 1,$$

- **Úloha B:**

$$-y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0, y(\pi) = 0.$$

Existenci a jednoznačnost řešení?

Úloha v samoadjungovaném tvaru

Okrajová úloha:

$$-(p(x)y')' + q(x)y = f(x), \tag{3}$$

a okrajové podmínky

$$\alpha_1 y'(a) + \alpha_2 y(a) = \alpha_3, \qquad \beta_1 y'(b) + \beta_2 y(b) = \beta_3. \tag{4}$$

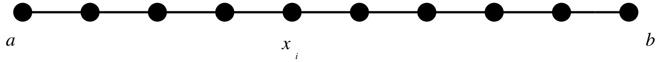
Věta: Nechť platí

(i) $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $f(x)$ - spojité funkce na $\langle a, b\rangle$

(ii) $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ pro $x \in \langle a, b\rangle$

Pak existuje právě jedno řešení okrajové úlohy (3-4) (s jedinou výjimkou případu $\alpha_2 = \beta_2 = 0 \equiv q(x)$).

Princip numerického řešení



- Označme **přesné řešení** $y = y(x)$ pro $x \in I = \langle a, b \rangle$.
- rozdělíme I s krokem h

$$x_i = a + i\,h, \qquad \text{označme} \qquad q_i = q(x_i), f_i = f(x_i), p_i = p(x_i)$$

- **Přibližné řešení**

$$Y^i \approx y(x_i)$$

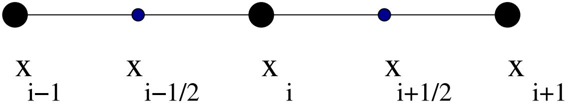
- Rovnici $-(py')' + qy = f$ nahradíme v bodech x_i

$$qy|_{x_i} \approx q_i Y^i$$

$$f|_{x_i} = f_i$$

$$-\left(py'\right)' \approx -(py'|_{x_i+h/2} - py'|_{x_i-h/2})/h$$

Diferenční náhrada v uzlu x_i



- Užijeme náhradu **1. derivace**

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

- s krokem $h/2$

$$(py')'|_{x_i} \approx \frac{p_{i+\frac{1}{2}} y'(x_{i+\frac{1}{2}}) - p_{i-\frac{1}{2}} y'(x_{i-\frac{1}{2}})}{h},$$

$$y'(x_{i+\frac{1}{2}}) \approx \frac{Y^{i+1} - Y^i}{h}, \qquad y'(x_{i-\frac{1}{2}}) \approx \frac{Y^i - Y^{i-1}}{h}$$

- tedy dostaneme

$$(py')'|_{x_i} \approx \frac{p_{i-\frac{1}{2}} Y^{i-1} - (p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}}) Y^i + p_{i+\frac{1}{2}} Y^{i+1}}{h^2}$$

Diferenční schéma pro Dirichletovu úlohu

Vlastnosti soustavy rovnic

Aproximovali jsme Dirichletovu úlohu

$$-(py')' + qy = f, \qquad y(a) = A,\ y(b) = B, \tag{5}$$

soustavou rovnic pro $i = 1, \ldots, n-1$

$$-p_{i-\frac{1}{2}} Y^{i-1} + (p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}} + h^2 q_i) Y^i - p_{i+\frac{1}{2}} Y^{i+1} = h^2 f_i$$

kde dosadíme za $Y^0 = A,\ Y^n = B.$

Vlastnosti soustavy rovnic:

- Matice soustavy je symetrická, třídiagonální.
- Matice soustavy je diagonálně dominantní ($p > 0, q \geq 0$).
- Je-li $q > 0$ pak matice soustavy je ODD. Vždy je IDD (?)
- Matice soustavy je pozitivně definitní ($p > 0, q \geq 0$).

Diferenční náhrada dif. rovnice

Věta: Pro $p \in C^3(I)$, $y \in C^4(I)$ platí

$$(py')'\Big|_{x=x_i} = \frac{p_{i+\frac{1}{2}} \frac{y_{i+1}-y_i}{h} - p_{i-\frac{1}{2}} \frac{y_i - y_{i-1}}{h}}{h} + O(h^2)$$

Bez důkazu.

Lokální diskretizační chyba, globální chyba

Dirichletova úloha

Víme: Přesné řešení Dirichletovy úlohy $y(x)$ splňuje

$$-(py')' + qy = f, \qquad y(a) = A,\ y(b) = B, \tag{6}$$

pro $y \in C^4(I)$ a $\vec{y}$ hodnoty řešení $y(x)$ v uzlech sítě x_i platí,

$$\mathbf{A}_h \vec{y} = F_h + \vec{\eta}_h, \qquad \eta_{h,i} = O(h^4)$$

Přibližné řešení $\vec{Y}$ splňuje

$$\mathbf{A}_h \vec{Y} = F_h$$

Tedy

$$\mathbf{A}_h(\vec{y} - \vec{Y}) = \vec{\eta}_h$$

Norma inverzní matice ?

Odhad chyby pro spec. rovnici

- Úloha $-y'' = f(x)$, $y(a) = 0$, $y(b) = 0$.
- Vede na soustavu rovnic s maticí $\mathbf{A}$

$$\begin{matrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{matrix}$$

- Symetrická poz. definitní matice:
  $\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = 1/\lambda_{MIN} \approx n^2/\pi^2 = 1/(\pi^2 h^2)$

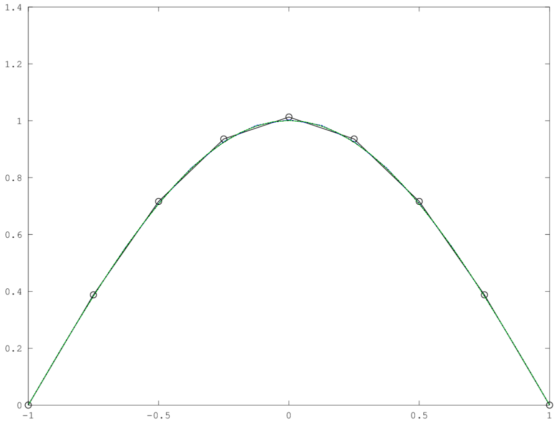
Numerické řešení vybraného problému

$$-y'' = \frac{4}{\pi^2}\cos(\frac{pi}{2}x), \qquad y(-1) = y(1) = 0$$

Známe analytické řešení.

Numerická řešení, konvergence

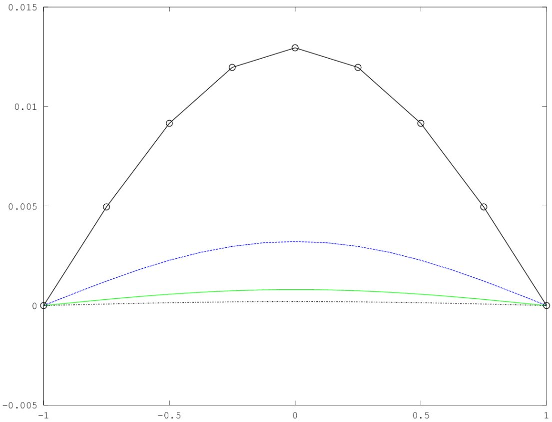
$$-y'' = \frac{4}{\pi^2}\cos(\frac{pi}{2}x), \qquad y(-1) = y(1) = 0$$



Numerické řešení, krok $h = \frac{1}{4}, h = \frac{1}{8}, h = \frac{1}{16}, h = \frac{1}{32}$

Numerická řešení, chyba

$$-y'' = \frac{4}{\pi^2}\cos(\frac{pi}{2}x), \qquad y(-1) = y(1) = 0$$

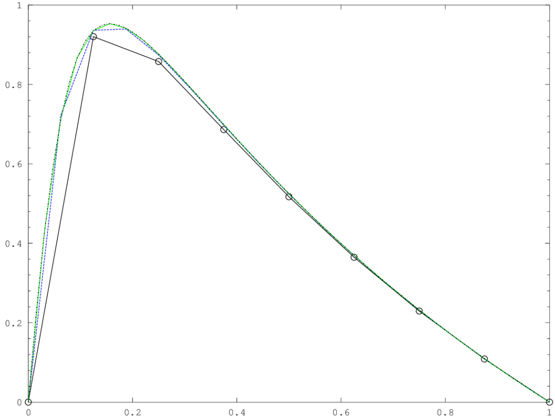


Chyba numerického řešení(log), krok $h = \frac{1}{4}, h = \frac{1}{8}, h = \frac{1}{16}, h = \frac{1}{32}$

Numerická řešení

Konvergence závisí na úloze

$$-(x^2 y')' = 1, \qquad y(0) = y(1) = 0$$



Numerické řešení, krok $h = \frac{1}{4}, h = \frac{1}{8}, h = \frac{1}{16}, h = \frac{1}{32}$

Přednáška č. 9

- Parciální diferenciální rovnice a okrajová úloha.
- Okrajová úloha pro Poissonovu rovnici.
- Numerické řešení Dirichletovy úlohy pro Poissonovu rovnici.

Parciální diferenciální rovnice

Co jsou parciální diferenciální rovnice?

- Př. rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0$$

- Př. deformace pružného tělesa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \qquad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

- Př. Navier-Stokesovy rovnice

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial(\rho v_j v_i)}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

- **Omezíme se na: Lineární PDR 2. řádu ve 2D, tedy**

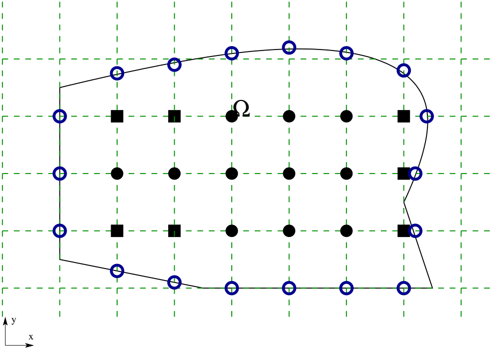
$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + gu = f$$

Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici

Existence řešení?

- Hledáme $u \in C^2(\Omega) \cup C^1(\overline{\Omega})$ takové, že
$$-\triangle u = f \text{ v } \Omega, \qquad u = \varphi \qquad \text{na } \partial\Omega$$
- Existence (klasického) řešení závisí na vlastnostech f, φ a Ω.
- **Věta:** Ω oblast s hladkou hranicí (C^2), $\varphi \in C(\overline{\Omega})$, $f \in C^1(\overline{\Omega})$, pak existuje právě jedno řešení $u \in C^2(\overline{\Omega})$.
- **Věta:** Ω konvexní, Lipschitzovsky spojitá hranice, $\varphi \in C(\overline{\Omega})$, $f \equiv 0$, pak existuje právě jedno řešení $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

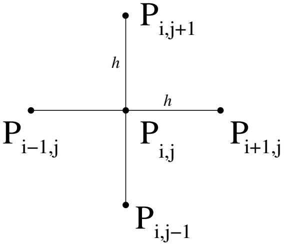
Metoda sítí 2D



- Aproximujeme $u(x, y)$, $[x, y] \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$: volíme $h > 0$,
- označíme $x_i = x_0 + ih$, síťové čáry $x = x_i$
- označíme $y_j = y_0 + jh$, síťové čáry $y = y_j$
- označíme $P_{i,j} = [x_i, y_j]$ průsečíky síťových čar v $\overline{\Omega}$
- $u(P_{i,j}) \approx U_{i,j}$, derivace $\to$ diference, dostaneme

$$\vec{G}_h(\vec{U}_h) = \vec{F}_h$$

Diferenční náhrady parciální derivace



- 2. centrální diference

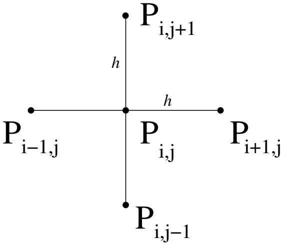
$$\frac{f(x_0+h)-2f(x)+f(x_0-h)}{h^2}=f''(x_0)+O(h^2).$$

- Užijeme 2. centrální diferenci ve směru x resp. y, chyba $O(h^2)$
- nahradíme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,y_j)\approx\frac{U_{i-1,j}-2U_{i,j}+U_{i+1,j}}{h^2},$$

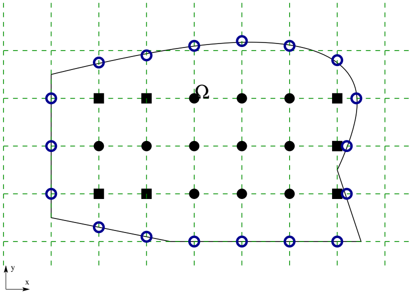
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i,y_j)\approx\frac{U_{i,j-1}-2U_{i,j}+U_{i,j+1}}{h^2},$$

Diferenční náhrady 2. parciální derivace



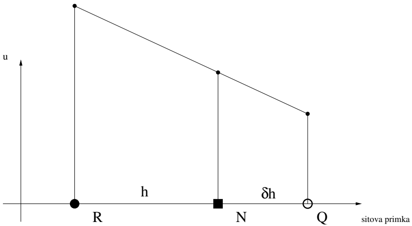
- $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{h^2},$$
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{h^2},$$
- Náhrada rovnice $-\triangle u = f$ v bodě $P_{i,j}$
  $$-U_{i,j-1} - U_{i-1,j} + 4U_{i,j} - U_{i,j+1} - U_{i+1,j} = h^2 f_{i,j}$$
- jen pro $P_{i,j}$, který „má všechny sousedy“, takový uzel nazýváme **regulární**.

Hraniční a neregulární uzly



- Aproximujeme řešení $u(P_{i,j}) \approx U_{i,j}$
- Označíme **hraniční**, **regulární** a **neregulární** uzly.
- v **hraničních uzlech** Q - užijeme Dirichletovy okrajové podmínky
$$U_Q = \varphi(Q)$$
- v **neregulárních uzlech** P_N - chceme zachovat řád aproximace!

Náhrada v neregulárním uzlu



- Hodnotu v neregulárním uzlu - lineární interpolace

$$\frac{U_R - U_N}{h} = \frac{U_N - U_Q}{\delta h}$$

- tedy

$$(1 + \delta) U_N - \delta U_R = U_Q$$

- Pozn. pro hladké řešení je tato náhrada 2. řádu přesnosti.

Vlastnosti soustavy rovnic. Řád aproximace

- Výsledná soustava rovnic je lineární soustava rovnic (cca n^2 neznámých).
- Matice soustavy je symetrická (?, pozor, neregulární uzly)
- Matice soustavy je DD (ne však ODD), většinou IDD.
- Matice soustavy je pozitivně definitní.
- Lokální chyba aproximace $O(h^2)$. Co platí pro globální chybu?

$$e_h = u - U_h$$

$$A_h U_h = F_h$$

$$A_h u = F_h + \eta_h, \qquad \eta_h = O(h^4)$$

- Je $e_h = O(h^2)$?

Poissonova rovnice

Příklad

33. Je dána Dirichletova úloha $\Delta u = 4$ v oblasti Ω tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0; 0]$, $[2; 0]$, $[0; 1.8]$, $[1.4; 1.8]$ s okrajovou podmínkou $u(x, y) = x^2$ na hranici $\Gamma = \partial\Omega$

b) Načrtněte obrázek s číslováním uzlů pro $h = 0.6$

c) Sestavte sít'ové rovnice, v neregulárních uzlech užijte lineární interpolace.

34. a) Je dána Dirichletova úloha $\Delta u = x(y + 1)$ v oblasti Ω tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0; 0]$, $[1.8; 0]$, $[0; 1.5]$ a $[1.5; 1.5]$. s okrajovou podmínkou $u(x, y) = x + y$ na hraniciΓ.

(a) Volte $h = 0.5$, nakreslete obrázek oblasti, zobrazte všechny síťové čáry, síťové uzly uvnitř oblasti, regulární neregulární a hraniční uzly, číslování uzlů.

(b) Sestavte sít'ové rovnice, v neregulárních uzlech užijte lineární interpolace.

Přednáška č. 10

Rovnice vedení tepla

- Metoda sítí pro rovnici vedení tepla.
- Explicitní a implicitní schéma.
- Konvergence a stabilita schémat.

Rovnice vedení tepla

Formulace smíšené úlohy

- **Úloha**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

- **počáteční podmínka**

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \langle a, b \rangle,$$

- **okrajové podmínky** (Dirichlet)

$$u(a,t) = \alpha(t), \qquad u(b,t) = \beta(t), \qquad t \geq 0.$$

Metoda sítí a aproximace řešení

- **Rovnice**:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$
- Síť: Volíme krok $h = (b-a)/n$ a krok $\tau > 0$.
$$x_i = a + ih, \qquad t_k = k\tau,$$
- Síťové uzly P_i^k a aproximace řešení U_i^k
$$P_i^k = [x_i, t_k], \qquad U_i^k \approx u(x_i, t_k).$$
- Postup řešení:
$$\{\mathbf{U}_i^0\} \to \{U_i^1\} \to \{U_i^2\} \to \{U_i^3\} \dots$$

Náhrady derivací

- Víme (Taylor): Pro $f \in \mathcal{C}^4$ platí

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \mathcal{O}(h^4)$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \mathcal{O}(h^4)$$

- Sečtením

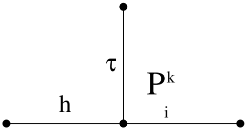
$$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = f''(x)h^2 + \mathcal{O}(h^4)$$

- Z 1. rovnice

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

Rovnice vedení tepla

Explicitní schéma



- **Rovnice**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

- Náhrada v uzlu P_i^k, chyba $O(h^2 + \tau)$

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = p\frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + f_i^k,$$

- násobíme τ, označíme $\sigma = \frac{p\tau}{h^2}$

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1 - 2\sigma)U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k,$$

- **Stabilita:**

$$\sigma = \frac{p\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Rovnice vedení tepla

Explicitní schéma - stabilita

- Schéma:

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1-2\sigma) U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k,$$

- Je chyba "malá", je-li h a τ "malé"?
  volíme $h = 0.01$, $\tau = 0.001$, $\sigma = \frac{\tau}{h^2} = 10$

$$u_t = u_{xx}, \qquad u(x,0) = (100x)^2, \qquad u(0,t) = 0, \qquad u(0.05,t) = 25$$

t x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0	0	1	4	9	16	25

Rovnice vedení tepla

Explicitní schéma - stabilita

- Schéma:

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1-2\sigma)U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k,$$

- Je chyba "malá", je-li h a τ "malé"?
volíme $h = 0.01$, $\tau = 0.001$, $\sigma = \frac{\tau}{h^2} = 10$

$$u_t = u_{xx}, \qquad u(x,0) = (100x)^2, \qquad u(0,t) = 0, \qquad u(0.05,t) = 25$$

t x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0	0	1	4	9	16	25
0.001	0	21	24	29	36	25

Rovnice vedení tepla

Explicitní schéma - stabilita

- Schéma:

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1-2\sigma) U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k,$$

- Je chyba "malá", je-li h a τ "malé"?
volíme $h = 0.01$, $\tau = 0.001$, $\sigma = \frac{\tau}{h^2} = 10$

$$u_t = u_{xx}, \qquad u(x,0) = (100x)^2, \qquad u(0,t) = 0, \qquad u(0.05,t) = 25$$

t x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0	0	1	4	9	16	25
0.001	0	21	24	29	36	25
0.002	0	-159	44	49	-144	25

Rovnice vedení tepla

Explicitní schéma - stabilita

- Schéma:

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1-2\sigma)U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k,$$

- Je chyba "malá", je-li h a τ "malé"?
volíme $h = 0.01$, $\tau = 0.001$, $\sigma = \frac{\tau}{h^2} = 10$

$$u_t = u_{xx}, \qquad u(x,0) = (100x)^2, \qquad u(0,t) = 0, \qquad u(0.05,t) = 25$$

t x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0	0	1	4	9	16	25
0.001	0	21	24	29	36	25
0.002	0	-159	44	49	-144	25
0.003	0	3461	-1936	...	...4	25

Rovnice vedení tepla

Explicitní schéma - stabilita

- Schéma:

$$U_i^{k+1} = \sigma U_{i-1}^k + (1 - 2\sigma) U_i^k + \sigma U_{i+1}^k + \tau f_i^k,$$

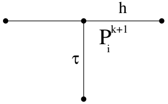
- Je chyba "malá", je-li h a τ "malé"?
  volíme $h = 0.01$, $\tau = 0.00005$, $\sigma = \frac{\tau}{h^2} = 0.5$

$$u_t = u_{xx}, \qquad u(x,0) = (100x)^2, \qquad u(0,t) = 0, \qquad u(0.05,t) = 25$$

t x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0	0	1	4	9	16	25
0.0005	0	2	5	10	17	25
0.0010	0	2.5	6	11	17.5	25
0.0015	0	3	6.75	12.25	18	25
0.0020	0	3.375	7.625	12.375	18.625	25

Rovnice vedení tepla

Implicitní schéma



- **Rovnice**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

- Náhrada v uzlu P_i^{k+1}, chyba $O(h^2 + \tau)$

$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = p\frac{U_{i-1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i+1}^{k+1}}{h^2} + f_i^{k+1},$$

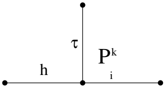
- násobíme τ, označíme $\sigma = \frac{p\tau}{h^2}$, dostáváme

$$-\sigma U_{i-1}^{k+1} + (1 + 2\sigma)U_i^{k+1} - \sigma U_i^{k+1} = U_i^k + \tau f_i^{k+1},$$

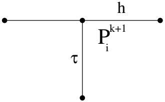
Rovnice vedení tepla - shrnutí

Explicitní a implicitní schéma

explicitní



implicitní



- **Rovnice**:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$
- Náhrada v uzlu P_i^k, explicitní schéma
$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = p\frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + f_i^k$$
- Náhrada v uzlu P_i^{k+1}, implicitní schéma
$$\frac{U_i^{k+1} - U_i^k}{\tau} = p\frac{U_{i-1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i+1}^{k+1}}{h^2} + f_i^{k+1}$$

Rovnice vedení tepla

Příklad

a) Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt \qquad \text{v oblasti } \Omega = \{[x; t] : x \in (0; 1);\ t > 0\}$$

$$u(x, 0) = x^2 \quad \text{pro } x \in \langle 0; 1\rangle$$
$$u(0, t) = 0, \qquad u(1, t) = \frac{1}{2t+1} \qquad \text{pro } t \geq 0$$

b) Ověřte splnění podmínek souhlasu

c) Určete pro $\tau = 0.1$ minimální krok h tak, aby explicitní metoda byla stabilní a bod $P = [0.25; 0.1]$ byl uzlem sítě.

d) Pro hodnoty τ a h z bodu (b) určete přibližnou hodnotu řešení v bodě P užitím explicitní metody

e) Pro volbu $h = \tau = 0.25$ sestavte soustavu sít'ových rovnic pro první časovou vrstvu užitím implicitního schématu.

Přednáška č. 11

- Metoda sítí pro vlnovou rovnici.
- Explicitní a implicitní schéma.
- Konvergence a stabilita schémat.

Formulace smíšené úlohy pro vlnovou rovnici

- Vlnová rovnice ($c > 0$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

- **počáteční podmínky**

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \langle a, b \rangle,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \langle a, b \rangle,$$

- **okrajové podmínky** (Dirichlet)

$$u(a,t) = \alpha(t), \qquad u(b,t) = \beta(t), \qquad t \geq 0.$$

- Pozor: **podmínky souhlasu** - poloha a rychlost!

Metoda sítí a aproximace řešení

- **Rovnice**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

- Síť: Volíme krok $h = (b - a)/n$ a krok $\tau > 0$.

$$x_i = a + ih, \qquad t_k = k\tau,$$

- Síťové uzly P_i^k a aproximace řešení U_i^k

$$P_i^k = [x_i, t_k], \qquad U_i^k \approx u(x_i, t_k).$$

- Postup řešení:

$$\{\mathbf{U}_i^0\}, \{U_i^1\} \rightarrow \{U_i^2\} \rightarrow \{U_i^3\} \ldots$$

Náhrada na 1. časové vrstvě

- Užijeme Taylorův rozvoj a počáteční podmínku pro $u(x_i, 0)$ a $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0)$:

$$U_i^1 \approx u(x_i, \tau) = u(x_i, 0) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) + O(\tau^2)$$

Taylorův polynom, náhrada derivace

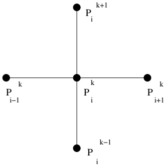
- Taylorův polynom ($f \in \mathcal{C}^4$)

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{3} + \mathcal{O}(h^4)\dots$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f'''(x)\frac{h^3}{3} + \mathcal{O}(h^4)\dots$$

- $$f(x+h) - f(x-h) = 2f(x) + f''(x)h^2 + \mathcal{O}(h^4)$$

Explicitní schéma pro vlnovou rovnici



$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

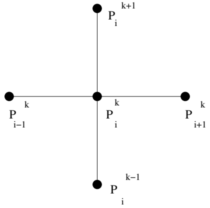
- Explicitní schéma v uzlu P_i^k:

$$\frac{\mathbf{U}_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{\tau^2} = c^2 \frac{U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k}{h^2} + f_i^k$$

- Násobíme τ^2, označíme $\sigma^2 = \frac{c^2\tau^2}{h^2}$, explicitně vyjádříme $\mathbf{U}_i^{k+1}$

Explicitní schéma pro vlnovou rovnici

Náhrada v regulárním uzlu



- Náhrada v uzlu P_i^k, **explicitní schéma**

$$U_i^{k+1} = \sigma^2 U_{i+1}^k + 2(1-\sigma^2)U_i^k + \sigma^2 U_{i-1}^k - U_i^{k-1} + \tau^2 f_i^k$$

- Stabilita:

$$\sigma = \frac{c\tau}{h} \leq 1.$$

- Lokální chyba aproximace

$$O(h^2 + \tau^2)$$

- **Lze užít implicitního schématu**, tak aby byla zaručena stabilita vždy.

Implicitní schéma

Náhrada v regulárním uzlu

- **Rovnice**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

- Náhrada v uzlu P_i^k:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t}(P_i^k) \approx \frac{U_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{\tau^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^k) \approx \frac{1}{2}\frac{U_{i+1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i-1}^{k+1}}{h^2} + \frac{1}{2}\frac{U_{i+1}^{k-1} - 2U_i^{k-1} + U_{i-1}^{k-1}}{h^2}$$

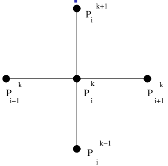
- Dosadíme do rovnice, násobíme τ^2,
- označíme

$$\sigma^2 = \frac{c^2\tau^2}{h^2}$$

- vyjádříme soustavu pro U_i^{k+1}

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 U_{i-1}^{k+1} + (1+\sigma^2)U_i^{k+1} - \frac{1}{2}\sigma^2 U_{i+1}^{k+1} = \frac{1}{2}\sigma^2 U_{i-1}^{k-1} - (1+\sigma^2)U_i^{k-1} + \frac{1}{2}\sigma^2 U_{i+1}^{k-1} + 2U_i^k + \tau^2 f_i^k$$

Explicitní a imlicitní schéma pro vlnovou rovnici



$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f,$$

- Explicitní schéma v uzlu P_i^k:

$$\frac{\mathbf{U}_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{\tau^2} = c^2 \frac{U_{i+1}^k - 2U_i^k + U_{i-1}^k}{h^2} + f_i^k$$

- Implicitní schéma v uzlu P_i^k:

$$\frac{U_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{\tau^2} = \frac{c^2}{2} \frac{U_{i+1}^{k+1} - 2U_i^{k+1} + U_{i-1}^{k+1}}{h^2} + \frac{c^2}{2} \frac{U_{i+1}^{k-1} - 2U_i^{k-1} + U_{i-1}^{k-1}}{h^2} + f_i^k$$

- Násobíme τ^2, označíme $\sigma^2 = \frac{c^2\tau^2}{h^2}$, explicitně vyjádříme $\mathbf{U}_i^{k+1}$

Vlnová rovnice

Příklad

Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{9}{5}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt$$

$$\begin{array}{rclrcll} u(x,0) & = & x^2\,, & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & 1-x^2 & \text{pro } x \in \langle - \\ u(-1,t) & = & 1\,, & u(1,t) & = & \frac{1}{1+t^2} & \text{pro } t \in \langle 0;\infty) \end{array}$$

a) Ověřte splnění podmínek souhlasu (pro polohu a rychlost).

b) Určete maximální krok τ tak, aby byla splněna podmínka stability pro explicitní metodu s prostorovým krokem $h = 0.2$. Odvoďte schéma pro explicitní metodu.

c) Odvod'te soustavu sít'ových rovnic pro určení přibližných hodnot řešení první časové vrstvě s chybou $\mathcal{O}(\tau^2)$.

d) Stanovte přibližnou hodnotu řešení v bodě $A = [0.2; 0.2]$ explicitní metodou, volta krok $h = 0.2$ a τ (maximální) tak, aby explicitní schéma bylo stabilní a bod A byl uzlem sítě.

e) Sestavte síťové rovnice implicitního schématu pro danou rovnici na 2. časové vrstvě pro volbu $h = 0.25$ a $\tau = 0.5$.

Přednáška č. 12/13

- Opakování, řešení zkouškových příkladů.