VARIANTA 2004/1

1. Je dána Cauchyova úloha

$$(x+1)y'' = xy' + \ln y, \qquad y(0)=1,\ y'(0)=2.$$

(a) Zapište oblast $\mathcal{G}$, v níž jsou splněny podmínky existence a jednoznačnosti jejího řešení.

(b) S krokem $h=0.2$ určete užitím 1. modifikace Eulerovy metody přibližnou hodnotu $y'(0.2)$!

2. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX=B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & p+1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

(a) Pro které parametry $p \in R$ nelze soustavu řešit Gauss-Seidelovou iterační metodou? (Určete všechny takové hodnoty)

(b) Pro $p=-2$ určete $X^{(1)}$ touto metodou při volbě $X^{(0)}=B$.

I. Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3, \qquad u(x,0) = 1 + \frac{x}{2}, \quad u(-1,t) = \frac{1}{t+2}, \quad u(1,t) = \frac{3}{t+2},$$

(a) Ověřte podmínky souhlasu.

(b) Řešte metodou sítí užitím explicitní formule. Volte krok h a τ maximální tak, aby byla splněna podmínka stability a bod $A[0.7, 0.02]$ byl uzlem sítě. Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě A.

II. Je dána okrajová úloha $\triangle u = 3$ v oblasti tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0,0], [2,0], [0,1.5], [1.5,1.5]$ na hranici $u(x,y) = \frac{x+1}{y+1}$.

(a) Ukažte, že pro dostatečně hladkou funkci $z = z(x)$ je výraz $\frac{1}{h^2}\left(z(x+h) - 2z(x) + z(x-h)\right)$ aproximací $z''(x)$ druhého řádu přesnosti!

(b) Odvoďte diferenční schéma pro řešení okrajové úlohy metodou sítí v regulárním uzlu.

(c) Sestavte síťové rovnice v uzlech sítě ležících na přímce $y=1$ které vzniknou při řešení úlohy metodou sítí s krokem h=0.5. V neregulárních uzlech užijte lineární interpolaci.

Vysledky

1. $k_1 = (2,0)$**,** $Y_{POM} = (1.2, 2)$**,** $k_2 = (2, 0.35)$ **,** $Y^{(1)} = (1.4, 2.07)$

2. $|U_G| = 16\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda^2(p+1)$**, pro** $|p| \geq 4$ **GS nekonverguje.**

$$X^{(1)} = (1/4, 11/8, -3/8) = (0.25, 1.375, -0.375)$$

I. $\tau = 0.01$**,** $\sigma = 0.4$**,**

$$U_A = 0.4 \cdot 1.33 + 0.2 \cdot 1.38 + 0.4 \cdot 1.43 + 4 \cdot 0.01 = 1.41$$

II.

NMA

1. Dána CÚ

$$Y' = \begin{pmatrix} \frac{x}{x+1} + y_2 \\ y_1 \cdot y_2 \end{pmatrix} \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   a) Zapište oblast existence a jednoznačnosti maximálního řešení dané Cauchyovy úlohy.

   b) Volte krok $h = 0.2$ a spočítejte přibližnou hodnotu $Y(0.4)$ pomocí takové metody, která je druhého řádu přesnosti.

2. Dána Dirichletova úloha $\Delta u = -4$ na oblasti Ω s okrajovou podmínkou $u = x \cdot y$ na hranici Ω . Oblast Ω je omezená $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ a $y = 2$.

   a) Volte krok $h = 0.5$, nakreslete oblast Ω, vyznačte všechny síťové přímky. Vzniklé uzly očíslujte a označte všechny regulární i neregulární uzly.

   b) Sestavte všechny síťové rovnice, které dostanete při řešení dané úlohy metodou sítí, tak aby schema bylo druhého řádu přesnosti.

   c) Odvoďte diferenční rovnici v obecném neregulárním uzlu pomocí lineární interpolace.

I. Je dána soustava $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   a) Pro jaké hodnoty parametru $p \in R$ je matice A ODD? Kdy je symetrická a současně pozitivně definitní?

   b) Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$, pro které je Gauss-Seidelova iterační metoda pro danou soustavu konvergentní.

   c) Volte hodnotu $p = -1$ a $X^{(0)} = (1, -2, 1)^T$. Spočtěte pomocí Gauss-Seidelovy iterační metody $X^{(1)}$.

II. Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 \ ,$$

$$\begin{array}{lll} u(x,0) = ax + b & & \text{pro } x \in <0,1>, \\ u(0,t) = e^{-t} & u(1,t) = 0 & \text{pro } t \geq 0. \end{array}$$

   a) Určete, pro které hodnoty $a, b \in R$ jsou splněny podmínky souhlasu.

   b) Volte krok $h = 0.1$. Která z voleb $\tau = 0.1, 0.05, 0.02$ zaručuje stabilitu explicitního schématu? (Zdůvodněte pro každou hodnotu)

   c) Volte $h = 0.1$ a $\tau = 0.01$ a spočtěte přibližnou hodnotu $u(0.5, 0.02)$ pomocí explicitního schematu.

ŘEŠENÍ

1. a) $\mathcal{G} = \{[x, y_1, y_2] : x > -1\}$.

   b) 1. modifikace Eulerovy metody

$$
\begin{aligned}
x = 0 \qquad & Y^0 = (0,0)^T, \quad k_1 = (0,0)^T, \quad Y_{POM} = (0,0), \\
& k_2 = (0.\overline{09}, 0)^T \\
& \rightarrow \mathbf{Y^1} = (\mathbf{0.0\overline{18}}), \mathbf{0} \\
x = 0.2 \qquad & Y^1 = (0, 0.0\overline{18})^T, \quad k_1 = (0.1\overline{66}, 0)^T, \quad Y_{POM} = (0.035, 0), \\
& k_2 = (0.231, 0)^T \\
& \rightarrow \mathbf{Y^2} = (\mathbf{0.064}, \mathbf{0})
\end{aligned}
$$

   b) 2. modifikace Eulerovy metody

$$
\begin{aligned}
x = 0 \qquad & Y^0 = (0,0)^T, \quad k_1 = (0,0)^T, \quad Y_{POM} = (0,0), \\
& k_2 = (0.1\overline{6}, 0)^T \\
& \rightarrow \mathbf{Y^1} = (\mathbf{0.01\overline{66}}, \mathbf{0}) \\
x = 0.2 \qquad & Y^1 = (0.01\overline{66}, 0)^T, \quad k_1 = (0.1\overline{66}, 0)^T, \quad Y_{POM} = (0.2, 0), \\
& k_2 = (0.2857, 0)^T \\
& \rightarrow \mathbf{Y^2} = (\mathbf{0.0619}, \mathbf{0})
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
4U_1 - U_2 - U_4 &= 1 & \qquad 4U_2 - U_1 - U_3 - U_5 &= 1 \\
4U_3 - U_2 - U_6 - 1 &= 1 & \qquad 4U_4 - U_1 - U_5 - U_7 &= 1 \\
4U_5 - U_6 - U_4 - U_2 - U_8 &= 1 & \qquad 4U_6 - U_3 - U_5 - U_9 - 2 &= 1 \\
4U_7 - U_4 - U_8 - U_9 - 1 &= 1 & \qquad 4U_8 - U_7 - U_9 - U_5 - 2 &= 1 \\
4U_9 - U_6 - U_8 - 3 - 3 &= 1
\end{aligned}
$$

3. a) **Není ODD**, p=-1 ... **je symetrická, poz. def.** $\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = 2 - 1 > 0, \Delta_3 = 8 - 1 - 4 > 0 \qquad \rightarrow$ je.

   b) $\Delta = 8\lambda^3 + \lambda^2 p + 4\lambda^2 p, \lambda_3 = -\frac{5}{8}p,$ **pouze pro** $|\mathbf{p}| < \mathbf{8/5}$ konvergentní.

   c)

$$\mathbf{X^1} = (\mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})^{\mathbf{T}}$$

4. a) a=-1, b=1

   b)

$$
\begin{aligned}
h = 0.1,\ \tau = 0.1 \qquad & \rightarrow \qquad \sigma = \mathbf{3.\overline{33}} > \frac{1}{2} \text{ nestabilní} \\
h = 0.1,\ \tau = 0.05 \qquad & \rightarrow \qquad \sigma = \mathbf{1.\overline{66}} > \frac{1}{2} \text{ nestabilní} \\
h = 0.1,\ \tau = 0.02 \qquad & \rightarrow \qquad \sigma = \mathbf{0.\overline{66}} > \frac{1}{2} \text{ nestabilní}
\end{aligned}
$$

   c) $\sigma = \mathbf{\frac{1}{3}}$

	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
t=0	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3
t=0.01		0.61	0.51	0.41	
t=0.02			**0.52**		

VARIANTA 27/6/2006

1. Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \ ,$$

$$\begin{array}{lll} u(x,0) = ax + b & & \text{pro } x \in < 0, 4 >, \\ u(0,t) = 2 + t & u(4,t) = -2 & \text{pro } t \geq 0. \end{array}$$

   a) Určete, pro které hodnoty $a, b \in R$ jsou splněny podmínky souhlasu.

   b) Odvoďte síťovou rovnici v regulárním uzlu $(k+1)$-ní časové vrstvy při řešení dané úlohy implicitní metodou.

   c) Volte krok h a τ maximální tak, aby implicitní metoda byla stabilní a bod $A = [1.0, 0.5]$ byl uzlem sítě. Sestavte rovnice implicitního schematu na první časové vrstvě.

2. Je dána soustava $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   a) Pro jaké hodnoty parametru $p \in R$ je matice A ODD? Zdůvodněte!

   b) Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$, pro které je Jacobiho iterační metoda pro danou soustavu konvergentní.

   c) Volte $p = -1$ a $X^{(0)} = (1, -2, 1)^T$. Spočtěte pomocí Jacobiho iterační metody $X^{(1)}$.

3. Dána CÚ

$$y'' + \frac{3y'}{x+2} + \frac{y}{x-3} = 2x \qquad y(0) = 3, y'(0) = 0$$

   a) Zapište interval existence a jednoznačnosti maximálního řešení dané Cauchyovy úlohy.

   b) Volte krok $h = 1.0$ a spočítejte přibližné hodnoty $y(1.0)$ a $y'(1.0)$ pomocí Collatzovy metody.

4. Dána Dirichletova úloha $-\Delta u = 1$ na oblasti Ω s okrajovou podmínkou $u = x \cdot y$ na hranici Ω . Oblast Ω je dána pomocí $x \geq 0$, $y \geq 0$ a $y \leq 4 - x^2$.

   a) Odvoďte diferenční rovnici pro danou úlohu v obecném regulárním uzlu a ukažte, že je druhého řádu přesnosti.

   b) Volte krok $h = 0.5$ a sestavte síťové rovnice pro všechny uzly, které leží na přímce $y = 0.5$ tak, aby schéma bylo druhého řádu přesnosti.

ŘEŠENÍ

1. a) $I = (-2, 3)$.

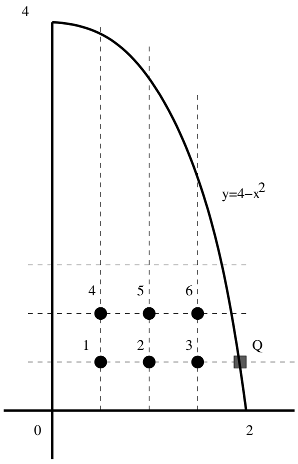
   b) převod

$$Y' = \begin{pmatrix} y_2 \\ 2x - \frac{3y_2}{x+2} - \frac{y_1}{x-3} \end{pmatrix}, \qquad Y(0) = (3,0)^T.$$

   Řešení

$$\begin{aligned} x = 0 \qquad & Y^0 = (3,0)^T, \quad k_1 = (0,1)^T, \quad Y_{POM} = (3, 0.5)^T, \\ & k_2 = (0.5, 1.6)^T \\ & \rightarrow \mathbf{Y^1 = (3.5, 1.6)}, \qquad \mathbf{y(1.0) \approx 3.5}, \quad \mathbf{y'(1.0) \approx 1.6}. \end{aligned}$$

2.



$$4U_1 - U_2 - U_4 - 0 - 0 = 0.25$$
$$4U_2 - U_1 - U_3 - U_5 - 0 = 0.25$$
$$Q = [1.87, 0.5], \delta = 0.74$$
$$1.74U_3 - 0.74U_2 = 0.935$$

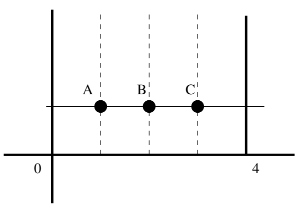
3. a) **Není ODD.**

   b) $\Delta = 8\lambda^3 + 5p\lambda, |\lambda_{2,3}|^2 = \left|\frac{5p}{8}\right|$ **konvergentní pro $|\mathbf{p}| < \mathbf{8/5}$.**

   c)

$$\mathbf{X^1 = (-1, 1, 0.5)^T}$$

4.



a) a=-1, b=2

c) h=1.0, $\tau = 0.5$, $\sigma = 2.0$

$$\begin{aligned} 5U_A - 2U_B - 5 &= 1 + 0.5 \\ 5U_B - 2U_A - 2U_C &= 0 + 0.5 \cdot 2 \\ 5U_C - 2U_B + 4 &= -1 + 0.5 \cdot 3 \end{aligned}$$

VARIANTA 149

1. Dána CÚ
$$y'' + \frac{y'}{x+1} + \sqrt{y} = 2 \qquad y(0) = 9, y'(0) = 0$$
   a) Zapište oblast existence a jednoznačnosti maximálního řešení dané Cauchyovy úlohy.
   b) Volte krok $h = 2.0$ a spočítejte přibližné hodnoty $y(2.0)$ a $y'(2.0)$ pomocí Collatzovy metody.

2. Dána Dirichletova úloha $\Delta u = 1$ na oblasti Ω s okrajovou podmínkou $u = x + y$ na hranici Ω . Oblast Ω je dána jako čtyřúhelník s vrcholy $[0,0][1.5,0], [1,1.5], [0,1.5]$.
   a) Ukažte, že pro $u \in C^4$ je druhá centrální diference náhradou u'' s přesností $O(h^2)$.
   b) Odvoďte diferenční rovnici pro danou úlohu v obecném regulárním uzlu.
   c) Volte krok $h = 0.5$ a sestavte síťové rovnice. V neregulárních uzlech užijte lineární interpolaci.

3. Je dána soustava $Ax = b$, kde
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & p-1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
   a) Pro jaké hodnoty parametru $p \in R$ je matice A ODD? Zdůvodněte!
   b) Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$ pro které je GS iterační metoda pro danou soustavu konvergentní.
   c) Volte $p = 2$ a $X^{(0)} = (2,1,0)^T$. Spočtěte pomocí GS iterační metody $X^{(1)}$.

4. Dána smíšená úloha
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \ ,$$
$$\begin{array}{lll} u(x,0) = ax + b & & \text{pro } x \in <1,4>, \\ u(1,t) = 2 & u(4,t) = 5 & \text{pro } t \geq 0. \end{array}$$
   a) Určete pro které hodnoty $a, b \in R$ jsou splněny podmínky souhlasu.
   b) Volte maximální krok h a τ tak, aby explicitní metoda byla stabilní a bod $A = [2.0, 1.]$ byl uzlem sítě.
   c) Spočtěte přibližnou hodnotu řešení v bodě A explicitní metodou.

ŘEŠENÍ

1. a) $x > -1, y > 0$.

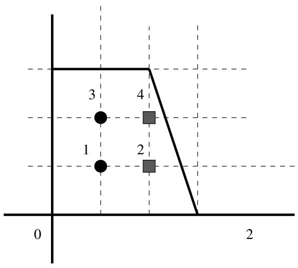
   b) převod

$$Y' = \begin{pmatrix} y_2 \\ 2 - \sqrt{y_1} - \frac{y_2}{x+1} \end{pmatrix}, \qquad Y(0) = (9,0)^T.$$

   Řešení

$$\begin{aligned} x = 0 \qquad & Y^0 = (9,0)^T, \quad k_1 = (0,-1)^T, \quad Y_{POM} = (9,-1)^T, \\ & k_2 = (-1,-0.5)^T \\ & \to \mathbf{Y^1} = (\mathbf{7}, -\mathbf{1}), \qquad \mathbf{y(2.0)} \approx \mathbf{7}, \quad \mathbf{y'(2.0)} \approx -\mathbf{1} \end{aligned}$$

2.



$$4U_1 - U_2 - U_3 - 0.5 - 0.5 = -0.25$$
$$4U_2 - U_1 - U_4 - 1 - 2 = -0.25$$
$$Q_2 = [1.166, 1], \delta = 0.66$$
$$Q_1 = [1.33, 0.5], \delta = 0.33$$
$$1.33U_4 - 0.33U_3 = 2.166$$
$$1.66U_2 - 0.66U_1 = 1.833$$

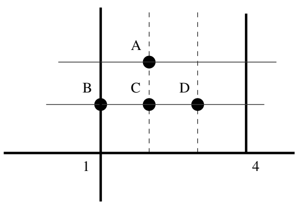
3. a) $|p-1| < 4$

   b) $|p-1| < 8$

   c)

$$\mathbf{X^1} = (\mathbf{1}, \mathbf{1.5}, \mathbf{0.5})^\mathbf{T}$$

4.



   a) a=1, b=1

   b) h=1.0, $\tau = 0.5$, $\sigma = 0.5$

   c) $\sigma = 0.5$, $U_B = 2, U_C = 4.5, U_D = 5.5$, $U_A = 5.25$.

NMA

1. Dána C.Ú.
$$y'' = \frac{10}{x+1}y + \frac{10}{2-x}y', \qquad y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

   a) Zapište oblast existence a jednoznačnosti řešení dané úlohy.
   b) Užitím Eulerovy metody s krokem $h = 0.5$ spočítejte $y(1,0)$ a $y'(1,0)$.
   c) Užitím Collatzovy metody s krokem $h = 0.5$ spočítejte $y(0,5)$ a $y'(0,5)$.

2. Dána Dirichletova úloha $\Delta u = 10$ na oblasti Ω s okrajovou podmínkou $u(x,y) = x+y$ na hranici $\partial\Omega$. Oblast Ω je čtyřúhelník s vrcholy $[0;0][\frac{14}{10};0], [\frac{11}{10};1], [0;1]$.

   (a) Ukažte, že pro dostatečně hladkou funkci $z = z(x)$ je výraz $\frac{1}{h^2}\left(z(x+h) - 2z(x) + z(x-h)\right)$ aproximací $z''(x)$ druhého řádu přesnosti!
   (b) Volte krok $h = 0.5$. Zakreslete oblast a síť s číslováním uzlů. Sestavte síťové rovnice pro danou úlohu ve všech regulárních uzlech.
   (c) Sestavte síťové rovnice pro danou úlohu ve všech neregulárních uzlech. Užijte lineární interpolaci!

3. Dána smíšená úloha
$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t + x\ ,$$
$$u(x,0) = ax + b + x^2 - 5x + 4 \qquad \text{pro } x \in <1,4>,$$
$$u(1,t) = 0 \qquad u(4,t) = 0 \quad \text{pro } t \geq 0.$$

   (a) Ukažte, že pro dostatečně hladkou funkci $z = z(x)$ je výraz $\frac{1}{2h}\left(z(x+h) - z(x-h)\right)$ aproximací $z'(x)$ druhého řádu přesnosti!
   (b) Určete hodnoty $a, b \in R$ tak, aby byly splněny podmínky souhlasu. Volte maximální krok h a τ tak, aby explicitní metoda byla stabilní a bod $A = [2;0,3]$ byl uzlem sítě.
   (c) Spočtěte přibližnou hodnotu řešení v bodě A explicitní metodou.

   (a) Vysvětlete princip metody nejmenších čtvercu. Odvod'te soustavu normalních rovnic pro polynom nejvýše 1. stupne a obecnou tabulku hodnot x_i, y_i, $i = 0 \ldots n$.

   Je dána tabulka hodnot

x_i	-1	0	1
y_i	1.1	1.0	0.6

   (b) Určete polynom p_1^* nejvýše 1. stupně, který ve smyslu metody nejmenších čtverců nejlépe aproximuje danou tabulku hodnot.
   (c) Určete polynom, který interpoluje danou tabulku hodnot.

1. CU:

   (a) $x \neq -1$, $x \neq 2$.

   (b) Eulerova metoda:

$$Y(0.5) \approx (0.50000, 1.5)$$
$$Y(1.0) \approx (1.25, 8.166)$$

   (c) Collatzova metoda:

$$k_1 = (-1.00000, 5)$$
$$Y_{pom} = (0.75000, 0.25)$$
$$k_2 = (0.25, 7.43)$$
$$Y(0.5) \approx (0.25, 7.43)$$

2. Dirichletova uloha

   (a)

   (b) jediny regularni uzel (U_1)

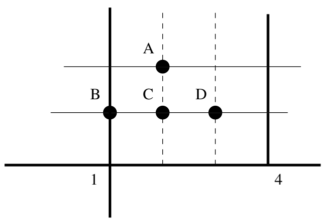
$$-4U_1 + U_2 + (0 + 0.5) + (0.5 + 0) + (1.0 + 0.5) = 0.5^2\, 10$$

   (c) jediny neregularni uzel (U_2)

$$Q = [1.25, 0.5], \delta = 0.5$$

$$(1 + 0.5)U_2 - 0.5U_1 = (1.25 + 0.5)$$

3. Smisena uloha



   (a)

   (b) $a = 0, b = 0$, $\tau = 0.15$, $h = 1$

   (c) $U_C \approx -0.8$, $U_D \approx -0.65$,

$$U_A \approx 0.45\,(0{-}0.65){+}(1{-}0.9)\,({-}0.8){+}0.15\,(2{+}0.15).$$

4. MNČ/Interpolace

   (a)

   (b) $p_1^*(x) = 0.9 - 0.25x$

   (c) $p_{INT}(x) = 1 - 0.25x - 0.85x^2$

ZKOUŠKA NMA

1. Je dána Cauchyova úloha

$$xy'' + 5xy' = \frac{x}{x-2}\sqrt{y}, \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 0.$$

   (a) Zapište postačující podmínky zaručující existenci a jednoznačnost řešení dané Cauchyovy úlohy a najděte oblast, kde jsou splněny.

   (b) S krokem $h = 0.2$ určete přibližnou hodnotu $y'(1.2)$ pomocí Collatzovy metody(1. modifikace Eulerovy metody).

2. Pro soustavu $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   a) Definujte pojem ostře diagonálně dominantní (ODD) matice pro matici $B = (b_{ij})$ typu 3x3. Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$ pro které je zadaná matice A ODD!

   b) Zapište nutnou a postačující podmínku pro konvergenci Jacobiho metody. Určete všechny hodnoty parametru $p \in R$, pro které je splněna.

   c) Volte $p = -1$ a $X^{(0)} = (1, -2, 1)^T$. Spočtěte $X^{(1)}$ Jacobiho iterační metodou .

I. Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{9}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \alpha + \beta x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \gamma + \delta x \quad \text{pro } x \in \langle 0;1\rangle \\ u(0,t) &= \frac{t}{t+1}\ , \quad u(1,t) = \frac{-2t}{t+1} \quad \text{pro } t \in \langle 0;\infty) \end{aligned}$$

   (a) Zapište podmínky souhlasu a určete hodnoty α, β, γ, $\delta \in R$ tak, aby byly tyto podmínky byly splněny.

   (b) Odvoďte síťovou rovnici pro řešení dané úlohy explicitní metodou. Zapište podmínku pro stabilitu schématu a ověřte její splnění pro volbu $h = 0.1$ a $\tau = 0.1$.

   (c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $[0.1; 0.2]$ explicitní metodou. V první časové vrstvě užijte náhradu s chybou $\mathcal{O}(\tau)$.

II. a) Zapište postačující podmínky pro existenci řešení Dirichletovy úlohy pro obyčejnou diferenciální rovnici v samoadjungovaném tvaru (t.j. $-(p(x)y')' + q(x) = f(x)$).

   b) Dána Dirichletova úloha

$$y'' - 2y' + (x-\alpha)y = e^{2x}, \quad y(1) = 0, y(2) = 1.$$

   Rovnici zapište v samoadjungovaném tvaru. Určete všechny hodnoty parametru $\alpha \in R$, pro které jsou uvedené podmínky (viz a) splněny

   (c) Zapište rovnice pro řešení dané úlohy pomocí metody sítí. Pro $h = 0.2$ a $\alpha = 5$ zapište 1. rovnici (tj. v bodě $x = 1.2$) ze soustavy rovnic, která vznikne při řešení dané úlohy metodou sítí.

ŘEŠENÍ

1. a) $x \neq 0$, $x \neq 2$, $y \neq 0$ tedy $\mathcal{G} : 0 < x < 2, y > 0$. b)

$$\vec{f}(x, (Y_1, Y_2)^T) = (Y_2, -5Y_2 + \frac{\sqrt{Y_1}}{x-2})^T.$$

$$k_1 = \vec{f}(1, (4, 0)^T) = (0, -2)^T, \qquad Y_{pom} = (4, -0.2)$$

$$k_2 = \vec{f}(1.1; (4, -0.2)) = (-0.2, 1 + \frac{2}{-0.9})^T = (-0.2, -1.\overline{22})^T, Y^1 = (3.96, -0.2\overline{44})^T.$$

2. a) (řádky - neníODD, (sloupce obdobně))

$$1 > |p|, 2 > |-1| + |-1|, 4 > |p|$$

b) $\det(\dots) = \lambda(8\lambda^2 + 5p)$

$$\lambda_1 = 0, |\lambda_{2,3}|^2 = \frac{5|p|}{8} < 1, \qquad p \in [-1.6, 1.6].$$

c)

$$X^{(1)} = (-1, 1, 1/2)^T.$$

I. a) $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = -3$, $\delta = 1$ b) $\sigma = 1/3$ c)

$$u(0.1, 0.2) \approx 2(1 - \frac{1}{9})0.07 + \frac{1}{9}(\frac{1}{11} + 0.04) + 0 + (0.1)^2\, 0.1\, 0.1.$$

II. b) $\alpha \geq 2$, $-(e^{-2x}y')' - e^{-2x}(x - \alpha)y = -1$
c)

$$-e^{-2\times 0.3}Y^2 + \left(e^{-2\times 0.1} + e^{-2\times 0.3} + 0.2^2(5 - 0.2)e^{-2\times 0.2}\right)Y^1 - e^{-2\times 0.1}\underbrace{Y^0}_{0} = 0.2^2 \times (-1).$$

Numerická matematika A – 24.6.2014

A1. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & p-1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

a) Definujte spektrální poloměr a řádkovou normu čtvercové matice $C = (c_{ij})_{i,j}$.

b) Je daná matice A ostře diagonálně dominantní pro některé parametry $p \in R$? Zdůvodněte, zda pro $p = 0$ a danou matici A je Gaussova-Seidelova iterační metoda konvergentní.

c) Pro $p = 0$ určete $X^{(1)}$ touto metodou při volbě $X^{(0)} = B$.

A2. Je dáno $h > 0$, $D > 0$ a Cauchyova úloha $y' = -4.2y, \quad y(0) = D$.

a) Užitím explicitní Eulerovy metody a kroku h spočítejte Y_E^j aproximaci řešení v bodech $x_j = jh$, $j = 1, 2, 3$ a $j = n$.

b) Užitím implicitní Eulerovy metody spočítejte Y_I^j aproximaci řešení v bodech x_j pro $j = 1, 2$ a $j = n$.

c) Určete přesné řešení $y(x)$ dané Cauchyovy úlohy a načrtněte jeho graf v intervalu $\langle 0, 2\rangle$. Pro krok $h = 0.5$ zakreslete také výsledky z a). Uveďte, proč je volba $h = 0.5$ nevhodná pro explicitní Eulerovu metodu!

A3. Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x - 10t, \qquad u(x,0) = 1 + \frac{x}{2}, \quad u(-1,t) = \frac{1}{t+2}, \quad u(1,t) = \frac{3}{t+2},$$

a) Zapište Taylorův rozvoje funkce $y(x + h)$ v bodě $h = 0$ a odvoďte náhradu $y'(x)$ pomocí hodnot $y(x+h)$, $y(x)$. Zapište chybu, které se dopustíte pro funkci $y \in C^2(I)$.

b) Zapište, jak se nahradí $\frac{\partial u}{\partial t}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v bodě $P_i^k = [x_i, k\tau]$ při odvození explicitního schématu pro řešení dané rovnice. Toto schéma odvoďte.

c) Řešte užitím explicitního schématu. Volte krok $h = 0.1$ a τ maximální tak, aby byla splněna podmínka stability a bod $A[0.7, 0.01]$ byl uzlem sítě. Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě A.

A4. Je dána okrajová úloha $\triangle u = 12xy$ v oblasti tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0, 0]$, $[1.8, 0]$, $[0, 1.5]$, $[1.5, 1.5]$, na hranici je předepsána okrajová podmínka $u(x, y) = x + y$.

a) Uveďte o jaký typ rovnice se jedná a pomocí parciálních derivací rozepište symbol $\triangle u$. Ověřte, zda pro funkci $u(x, y) = xy(x^2 + y^2 + 97)$ platí $\triangle u = 12xy$.

b) Zapište, jak se v regulárním uzlu $P_{i,j} = [x_i, y_j]$ nahradí parciální derivace uvedené v části a). Odvoďte rovnici pro náhradu dané rovnice metodou sítí v uzlu $P_{i,j}$.

c) Volte krok $h = 0.5$ a síť tak, aby obsahovala bod $[0, 0]$. Sestavte síťové rovnice v uzlech sítě ležících na přímce $y = 1$. V neregulárních uzlech užijte lineární interpolaci.

Numerická matematika B – 24.6. 2014

B1. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

a) Je daná matice A ostře diagonálně dominantní? Je daná matice A symetrická a pozitivně definitní?

b) Určete $X^{(1)}$ Gaussova-Seidelovou iterační metodou při volbě $X^{(0)} = B$.

c) Spočítejte řádkovou normu $\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_m$.

B2. Je dána Cauchyova úloha

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Určete interval maximálního řešení dané úlohy.

b) Užitím Collatzovy metody s krokem $h = 1$ spočítejte přibližnou hodnotu $X(2)$.

B3. Dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x, \qquad u(x,0) = 10x - 7, \quad u(0,t) = t - 7, \quad u(1,t) = \frac{3}{1+t},$$

a) Ověřte podmínky souhlasu.

b) Zapište podmínku stability explicitního schématu a ověřte, zda pro $h = 0.1$ a $\tau = 0.01$ je splněna.

c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[0.8, 0.01]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ dle b).

B4. Je dána okrajová úloha $\triangle u = x + y$ v oblasti tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0,0], [1.5,0], [0.3,1.5], [1.5,1.5]$ na hranici $u(x,y) = xy$.

a) Nakreslete oblast a síť v této oblasti. Vyznačte regulární a neregulární uzly.

b) Sestavte síťové rovnice v uzlech sítě ležících na přímce $y = 1$ které vzniknou při řešení úlohy metodou sítí s krokem h=0.5.

A1 **a)**

b) není ODD, ale pro $p = 0$ je matice symetrická a poz. def.: $4 > 0$, $8 - 1 = 7 > 0$, $\det A = 6 > 0$ nebo též IDD resp $\rho(U_{GS}) < 1$

c) $X^{(1)} = (0.25, 1.875, -1.3125)^T = (\frac{1}{4}, \frac{15}{8}, \frac{-21}{16})^T$

A2 **a)** $Y_j^E = (1 - 4.2h)^j D$

b) $Y_j^I = \frac{1}{(1+4.2h)^j} D$

c) $y(x) = e^{-4.2x}$, numerické řešení nezachovává monotonii

A3 **c)** $\sigma = 0.4$,

$$U_B = u(0.6, 0) = 1.3, \qquad U_C = u(0.7, 0) = 1.35, \qquad U_D = u(0.8, 0) = 1.4,$$

$$U_A = \sigma U_B + (1 - 2\sigma)U_C + \sigma U_D + 0.01(0.7 - 0) = 1.357$$

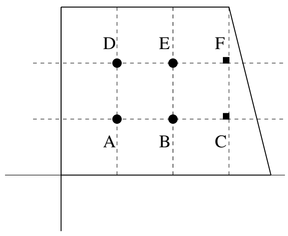
A4

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6xy + 6xy$$

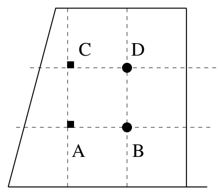
$$4U_D - U_E - U_A - (1) - (1.5 + 0.5) = -0.25(12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1)$$

$$4U_E - U_D - U_F - U_B - (1.5 + 1) = -0.25(12 \cdot 1 \cdot 1)$$

$$(1 + 0.2)U_F - 0.2U_E = 1 + 1.6$$



Oblast pro A3



Oblast pro B4

B1 **a)** není ani ODD, ani SPD (pozn. je IDD, tedy GS konverguje)

b) $X^{(1)} = (-0.2, 0.1, -0.4)^T$

c) $\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_m = 2.2$

B2 **b)**

$$x_0 = 0, k_1 = (0, -2)^T, X_{pom} = (2, -2)^T, k_2 = (-1, 0)^T, X^1 = (1, -1)^T$$

$$x_1 = 1, \tilde{k}_1 = (1, 0)^T, \tilde{X}_{pom} = (1.5, -1)^T, \tilde{k}_2 = (2.5, -1)^T, X^2 = (3.5, -2)^T$$

B3 **b)**

$$\sigma = \frac{0.01}{3(0.1)^2} = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}$$

c)

$$U_B = u(0.7, 0) = 0, U_C = u(0.8, 0) = 1, U_D = u(0.9, 0) = 2,$$

$$U_A = \frac{1}{3}(U_B + U_C + U_D) + 0.7 \times 0.01 = 1.07$$

B4 **b)**

$$4U_D - U_B - U_C - 1.5 - 1.5 = -0.25 \cdot 2$$

$$(1 + 0.6)U_C - 0.6U_D = 1 \cdot 0.2$$

VARIANTA A 140602

1. Je dána soustava rovnic $Ax = b$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Ukažte, že danou soustavu lze řešit Jacobiho iterační metodou.

   (b) Volte počáteční odhad řešení jako $x^{(0)} = [1, 1, 1]^T$ a pomocí Jacobiho iterační metody určete první iteraci $x^{(1)}$.

   (c) Pomocí vzorce pro odhad chyby $||x^{(n)} - x^*|| \leq \frac{||U||^n}{1-||U||}||x^{(1)} - x^{(0)}||$ určete počet iterací potřebných pro dosažení přesnosti 10^{-3} (měřeno v řádkové normě).

2. Je dána Cauchyova úloha $\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ s počáteční podmínkou $X(0) = [-1, 0, 1]$.

   (a) Určete oblast existence a jednoznačnosti maximálního řešení této úlohy.

   (b) Pro $h = 0.2$ určete pomocí Collatzovy metody (neboli 1. modifikace Eulerovy metody) přibližnou hodnotu $X(0.2)$.

   (c) Jak závisí chyba **jednoho kroku** Colatzovy metody pro dostatečně hladké řešení na velikosti kroku h? Tuto závislost vyjádřete pomocí symbolu $\mathcal{O}(h^p)$.

3. Je dána okrajová (Dirichletova) úloha pro obyčejnou diferenciální rovnici

$$y'' + \frac{2x}{x^2+1}y' - \frac{1}{x^2+1}y = 1$$

   s okrajovými podmínkami $y(-2) = 0$ a $y(2) = 1$.

   (a) Danou rovnici převeďte na samoadjungovaný tvar.

   (b) Ověřte, zda jsou splněny postačující podmínky existence a jednoznačnosti řešení dané úlohy.

   (c) Sestavte soustavu rovnic, která vznikne diskretizací dané úlohy na síti s krokem $h = 1$.

   (d) Ukažte, že vzniklou soustavu rovnic lze řešit pomocí Jacobiho iterační metody.

4. Je dána smíšená úloha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xt$$

   s počáteční podmínkou $u(x, 0) = 1 - x$ pro $x \in < 0, 1 >$ a okrajovými podmínkami $u(0, t) = a$, $u(1, t) = b - t$ pro $t \geq 0$.

   (a) Určete $a, b \in R$ tak, aby byly splněny podmínky souhlasu.

   (b) Zvolte maximální h a τ tak, aby bod $A = [0.7, 0.1]$ byl uzlem sítě a aby bylo možno provést výpočet explicitní metodou.

   (c) Pomocí explicitního schématu určete přibližnou hodnotu řešení v bodě A.

   (d) Pomocí rozvojů do Taylorových řad určete řád přesnosti explicitního schématu.

1. $Ax = b$,
   (a) A je O.D.D.
   (b) $x^{(1)} = [1, 1/2, 1]^T$
   (c) $||U_J||_m = 1/2$, $||x^{(1)} - x^{(0)}||_m = 1/2$ $||x^{(n)} - x^*||_m \leq \frac{0.5^n}{0.5} 0.5 = \frac{1}{2^n}$, $\Rightarrow$ $\mathbf{n} \geq 10$.

   Pozn. uznávejte i výpočet ve sloupcové normě.

2. (a) $\Omega = R \times R^3 = R^4$.
   (b) $K_1 = [-2; 0; 4] \Rightarrow X_{1/2} = [-1.2; 0; 1.4]$, $K_2 = [-2.2; 1.4; 6.8] \Rightarrow X_1 = [-1.44; 0.2; 2.36]$.
   (c) $||X_1 - X^*(0.2)|| = O(h^3)$.

3. (a) $p(x) = 1 + x^2$, $=> -((1 + x^2)y')' + y = -(1 + x^2)$
   (b) ...
   (c) $-p_{i-1/2}y_{i-1} + (p_{i-1/2} + p_{i+1/2} + h^2 q_i)y_i - p_{i+1/2}y_{i+1} = h^2 f_i$,

$$\begin{aligned} (3.25 + 1.25 + 1)y_1 - 1.25y_2 &= 2 \\ -1.25y_1 + (1.25 + 1.25 + 1)y_2 - 1.25y_3 &= 1 \\ -1.25y_2 + (1.25 + 3.25 + 1)y_3 &= 2 + 3.25 \end{aligned}$$

   (d) matice je O.D.D.

4. (a) $a = 1$, $b = 0$.
   (b) $h = 0.1$, $\sigma = \frac{p\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \tau \leq \frac{h^2}{2p} = 0.05$, $\tau = 0.05$, $u_A = u_7^2$.
   (c) $\sigma = 0.5 \Rightarrow u_i^{k+1} = \frac{1}{2}u_{i-1}^k + \frac{1}{2}u_{i+1}^k + \tau x_i t_k$

$$\begin{aligned} u_6^1 = &\quad 0.5 * 0.5 + 0.5 * 0.3 + 0.05 * 0.6 * 0 = 0.4 \\ u_7^1 = &\quad ... = 0.3 \\ u_8^1 = &\quad ... = 0.2 \\ \\ u_7^2 = &\quad 0.5 * 0.4 + 0.5 * 0.2 + 0.05 * 0.7 * 0.05 = 0.30175 \end{aligned}$$

   (d) $\mathcal{O}(h^2 + \tau)$ nebo s využitím podmínky stability $\mathcal{O}(h^2)$.

VARIANTA B 140602

1. Je dána soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 4x - y &= 2, \\ -x + 4y - z &= 3.5, \\ -y + 4z &= 7. \end{aligned}$$

   (a) Soustavu zapište v maticovém tvaru.

   (b) Lze danou soustavu řešit pomocí Gaussovy-Seidelovy iterační metody? Zdůvodněte!

   (c) Volte počáteční aproximaci řešení $[x, y, z]^{(0)} = [0, 0, 0]$ a vypočtěte jednu iteraci pomocí Gaussovy-Seidelovy metody.

2. Je dána Cauchyova úloha

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 2y + t, \\ \dot{y} &= \frac{x+1}{y+1} - t. \end{aligned}$$

   s počátečními podmínkami $x(0) = 0$ a $y(0) = 1$.

   (a) Určete oblast existence a jednoznačnosti maximálního řešení této úlohy.

   (b) Pro $h = 0.1$ určete pomocí Eulerovy metody přibližnou hodnotu $x(0.2)$ a $y(0.2)$.

3. Je dána okrajová úloha $-\left((x + 1.5)y'\right)' + (x + 1)y = x^2$, $y(-1) = 0$, $y(2) = \frac{11}{3}$

   (a) Ukažte, že pro danou úlohu jsou splněny postačující podmínky existence a jednoznačnosti řešení okrajové úlohy.

   (b) Pro krok $h = 1$, určete metodou sítí hodnotu řešení v síťových bodech.

4. Na oblasti tvaru čtverce s vrcholy $A = [0; 0]$, $B = [1.5; 0]$, $C = [1.5; 1.5]$ a $D = [0; 1.5]$ je dána rovnice $\Delta u = x + y$ s okrajovou podmínkou $u = 1$ na hranici oblasti Ω.

   (a) V dané oblasti načrtněte síť s krokem $h = 0.5$.

   (b) Sestavte soustavu diferenčních rovnic pro řešení dané úlohy na síti s $h = 0.5$.

   (c) Lze tuto soustavu vyřešit pomocí Jacobiho iterační metody?

   (d) Volte počáteční aproximaci řešení $u_{ij}^{(0)} = 1$ a proveďte jeden krok Jacobiho iterační metody.

1. (a) no comments
   (b) ODD
   (c) $[1/2, 1, 2]$.
2. (a) $y \neq -1 \Rightarrow G = R \times R \times (-1, \infty)$.
   (b) $\dot{X} = F(t, X)$, $K_1 = [2; 1/2]$ $X_1 = X_0 + hK_1 = [0; 1] + 0.1 \cdot [2; 0.5] = [.2; 1.05]$. $x(0.1) \approx .2$, $y(0.1) \approx 1.05$.
3. (a) no comments
   (b)

$$-y_0 + 4y_1 - 2y_2 = 0,$$
$$-2y_1 + 7y_2 - 3y_3 = 1,$$

$$4y_1 - 2y_2 = 0,$$
$$-2y_1 + 7y_2 = 12,$$

   $y_1 = 1$, $y_2 = 2$.
4. (a) no comments
   (b)

$$-4u_{11} + u_{21} + u_{12} = 0.5^2 * (0.5 + 0.5) - 1 - 1 = -1.75,$$
$$-4u_{21} + u_{11} + u_{22} = 0.5^2 * (1 + 0.5) - 1 - 1 = -1.625,$$
$$-4u_{12} + u_{11} + u_{22} = 0.5^2 * (0.5 + 1) - 1 - 1 = -1.625,$$
$$-4u_{22} + u_{21} + u_{12} = 0.5^2 * (1 + 1) - 1 - 1 = -1.5.$$

   (c) Ano, matice je ODD. Pokud si ale někdo napíše rovnice ve špatném pořadí a nevyjde mu ODD matice, pak uznávejte i odpověď "nelze".
   (d) Pokud je správné pořadí rovnic, pak $u^1_{11} = (1 + 1 + 1.75)/4 = 0.9375$, $u^1_{21} = (1 + 1 + 1.625)/4 = 0.90625$, $u^1_{12} = u_{21}$ a $u^1_{22} = ... = 0.875$.