1

Parciální diferenciální rovnice

- rovnice obsahující funkci a její parciální derivace
- popisují mnoho fyzikálních a technických problémů.
  Proudění tekutin – Navier-Stokesovy rov.
  Elektromagnetické pole – Maxwellovy rov.
  Vedení tepla (ochlazování odlitku), průhyb konstrukce, deformace těles ...

Lineární parciální diferenciální rovnice 2. řádu ve dvou proměnných

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+$$

$$+g(x,y)u=f(x,y) \quad \text{na } \Omega\subset R^2$$

jiné značení $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=u_{xy}$

$$a u_{xx}+b u_{xy}+c u_{yy}+d u_x+e u_y+gu=f$$

Typ PDR

$$D(x,y)=b^2(x,y)-4a(x,y)c(x,y)$$

$D(x,y)<0$ – eliptická rovnice

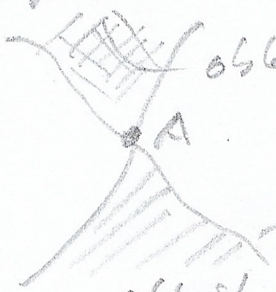
$D(x,y)=0$ – parabolická rovnice

$D(x,y)>0$ – hyperbolická rovnice

- Typ může záviset na oblasti, může se měnit

– charakteristiky – křivky v R^2, po kterých se v systému „šíří informace" na nich má speciální jednodušší tvar

Hyperbolické rov. $D > 0$ 2 nezávislé, reálné systémy



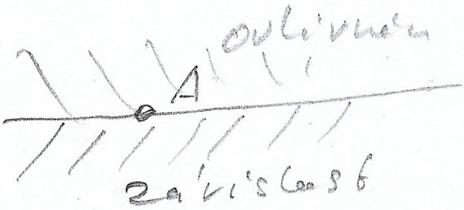
- evoluční rov. – významný směr.
- hodnota v A ovlivňována jen

Př. vlnová rovnice – rov. kmitání struny $u(x,t)$ – výchylka

$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t)$ $a=1$ $c=-1$ $D = 0-4\cdot 1\cdot(-1) = 4$

Parabolické rov.

$D = 0$ 1 dvojnásobný systém



– evoluční rov. – „minulost" –
– fiz. podivné – nekonečná rychlost šíření informace

PŘ. $u_t = p u_{xx} + f(x,t)$ $a=1$ $b,c=0$ $D=0$

rov. vedení tepla, difuze

Eliptické rov.

$D < 0$ – imaginární systém –

popisuje stacionární problémy, „dostatečný „relaxační" čas" na to, aby se stihly vyměnit informace

$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$ stac. rozložení teploty, průhyb membrány

pro daný problém může souviset

$u_t = p(u_{xx}+u_{yy}) + f(x,y,t) \xrightarrow{\text{stac. stav}} u_{xx}+u_{yy} = -f/p$

teplota v desce, sledují čas. vývoj; u – teplota v čase a prostoru

teplota se ustálí

Poissonova rovnice

$-(u_{xx}+u_{yy}) = f(x,y) \qquad \Omega \subset R^2$

Laplaceův operátor

$$\Delta u = \nabla \cdot \nabla u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(+ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \dots \right)$$

$-\Delta u = f$ na $\Omega \subset R^2$ Poissonova rov.

$f=0$ – Laplaceova

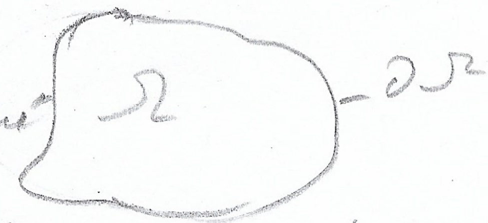
k rovnici musím doplnit okrajové podm.

Rov. 2. řádu – mohu předepsat hodnotu funkce a její první derivaci – záleží na fce. významu.

např.

$-\Delta u = f$ na $\Omega \in R^2$

deska, u – rozložení teploty



Dirichlet $u(x,y) = \varphi$ na $\partial\Omega$ – předepisuji rozložení teploty na okraji desky

Neumann $\frac{\partial u}{\partial t} = \psi$ na $\partial\Omega$ – teplo odváděno/přiváděno stěnou.

My budeme řešit DÚ pro Poissonovu rov.

Dirichletova úloha pro Poissonovu rov.

Mějme $\Omega \subset R^2$ omezenou oblast s hladkou nebo Lipschitzovsky spojitou hranicí. ($\partial\Omega \in C^2$) $f \in C(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Hledáme fci $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ takovou, že

$$-\Delta u = f \quad \forall x,y \in \Omega \qquad (1)$$

a $u(x,y) = \varphi(x,y)$ na $\partial\Omega$.

Obecně $\exists_1$ řešení problém. U takto formulované úlohy obecně neplatí.

Pokud např. $f \in C^1(\overline{\Omega})$ – pak $\exists_1$ řešení

nebo

Je-li Ω konvexní, $\partial\Omega$ Lipschitzovská, $f \equiv 0$ pak $\exists_1$ řešení

V některých případech umíme řešit analyticky

$-\Delta u = 0$ → řešení velmi záleží na tvaru oblasti

→ ~~taková~~ fce u se nazývá harmonická

Poissonova rov. sin – vl. fce derivace

$\Omega = (0,1) \times (0,1)$ $\quad u|_{\partial\Omega} = 0$

$u(x,y) = \sin(k\pi x)\sin(m\pi y)$

$$-\Delta u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = +k^2\pi^2(\sin(k\pi x)\sin(m\pi y)) + m^2\pi^2(\sin k\pi x \sin m\pi y) = \pi^2(k^2+m^2)\sin k\pi x \sin m\pi y$$

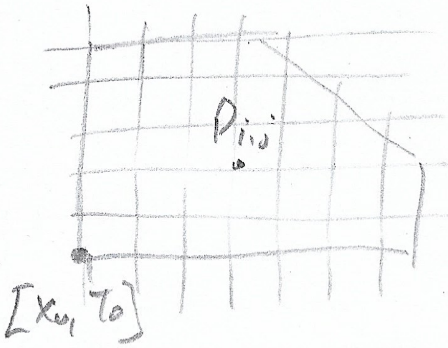
Vidíme, že je-li pravá strana rozvinutelná do F. řady $f(x,y) = \sum_{k,m=1}^{+\infty} a_{k,m} \sin(k\pi x)\sin(m\pi x)$

můžeme najít analytické řešení

Numerické řešení metodou sítí

Stejný postup jako u ODR.

1) Vytvoříme síť – v našem případě ekvidistantní



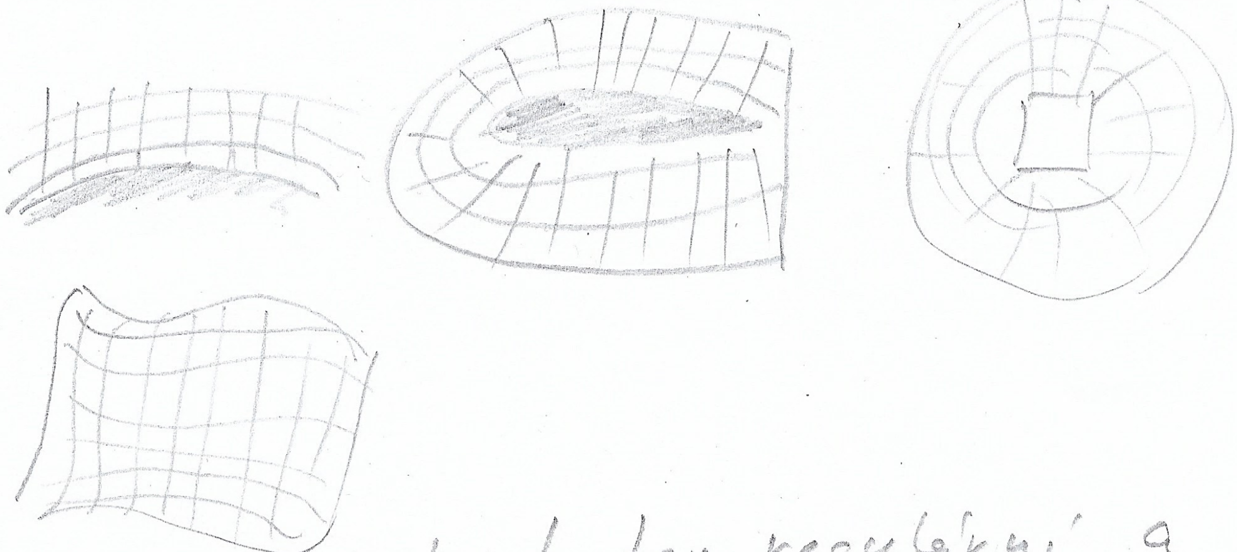
$x_i = x_0 + ih$ $\qquad [x_i, y_j] = P_{i,j}$

$y_j = y_0 + jh$

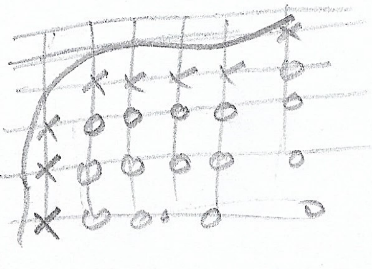
$U_{i,j}$ – num. aproximace $u(x_i, y_j)$

obecně → kvalita sítě velmi důležitá pro dobré výsledky

– sítě různých typů, strukturované, nestrukturované, C, O, H



Budeme rozeznávat tzv. regulární a neregulární body. Regulární – bod a síťové čáry spojující jej se sousedy leží v oblasti (vnitřní bod)



o – regulární

x – neregulární

2 náhrada derivace

2 centrální diference

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

pokud $f \in C^4(I)$ $\quad x, x \pm h \in I$

odvození – Taylor

$$f(x+h) = f(x) + \cancel{f'(x) \cdot h} + f''(x) \cdot \frac{h^2}{2} + \cancel{f'''(x) \cdot \frac{h^3}{6}} + O(h^4)$$

$$+\; f(x-h) = f(x) + \cancel{f'(x)(-h)} + f''(x) \frac{(-h)^2}{2} + \cancel{f'''(x) \frac{(-h)^3}{6}} + O(h^4)$$

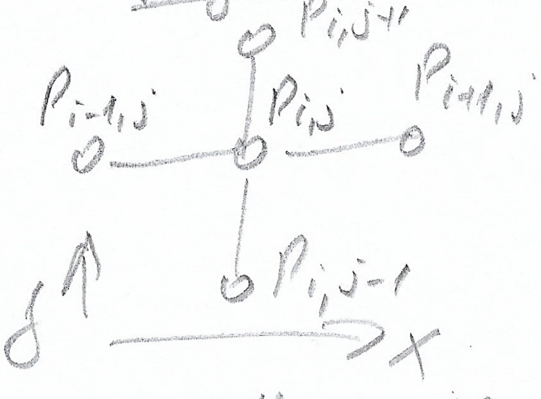
$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + f''(x) \cdot h^2 + O(h^4)$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

3 Odvození schématu

– $\boxed{\text{regulární uzel}}$

$$-u_{xx} - u_{yy} = f(x,y) \quad \big|\, P_{i,j}$$



$$-u_{xx}(P_{i,j}) - u_{yy}(P_{i,j}) = f(P_{i,j})$$

potřebuji nahradit 2 derivace ve směru x a y → síťové čáry jsou ∥ s x a y. Použiji 2 centrální diferenci

$$u_{xx}(P_{i,j}) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2)$$

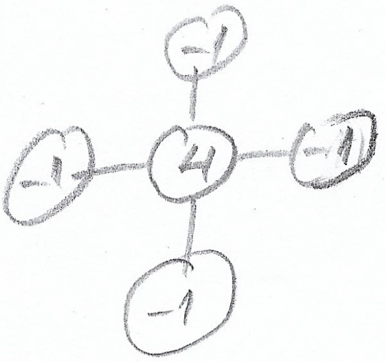
$$u_{yy}(P_{i,j}) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} + O(h^2)$$

$$-\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}-\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h^2}+O(h^2)=f_{i,j}$$

toto platí přesně. Zanedbám $O(h^2)$ a obdržím num. ap. jako hodnoty splňující rovnici

$$-\frac{U_{i+1,j}-2U_{i,j}+U_{i-1,j}}{h^2}-\frac{U_{i,j+1}-2U_{i,j}+U_{i,j-1}}{h^2}=f_{i,j}$$

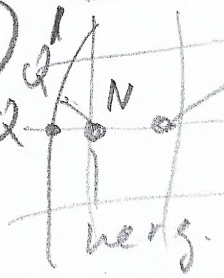
$$4U_{i,j}-U_{i+1,j}-U_{i-1,j}-U_{i,j+1}-U_{i,j-1}=h^2 f_{i,j}$$



Mám rov. pro regulární uzel.
Pokud je bod na hranici, mám OP
Chybí nereg. uzly.

– $\boxed{\text{neregulární uzel}}$

I

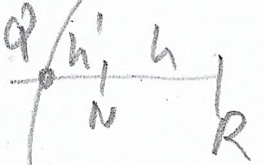


nereg. – blízko hranice
mohu si říct, že hodnota je téměř stejná – řešení v okolí hranice aproximuji konstantou – polynomem nultého stupně

$u(N)=\varphi(Q)$ popř. $u(N)=\varphi(Q')$

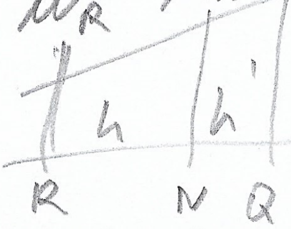
- mám tedy rovnice jen pro reg. uzly
- vzniklé schéma je jen $O(h)$, i když v reg. $O(h^2)$

II – v



aproximuji pol. 1. stupně – přímkou $\varphi(Q)$

$$u_R+\frac{u_N-u_R}{h}(h+h')=\varphi(Q)$$

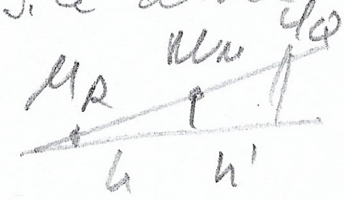


$$\left(1+\frac{h'}{h}\right)u_N-\frac{h'}{h}u_R=\varphi(Q)$$

ozn. $\frac{h'}{h} = \sigma < 1$

$(1+\sigma) u_N - \sigma u_R = \varphi(a)$

Jiné odvoz. podobnost Δ

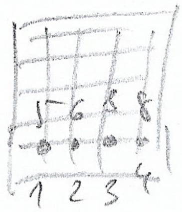


$$\frac{u_N - u_R}{h} = \frac{\varphi(a) - u_R}{h+h'}$$

Rov. pro reg. uzly + nereg. uzly → schéma

$A u = f$

tvar A závisí na tom, jak očíslujeme uzly v odvoz 2 indexy – potřebujeme napři.



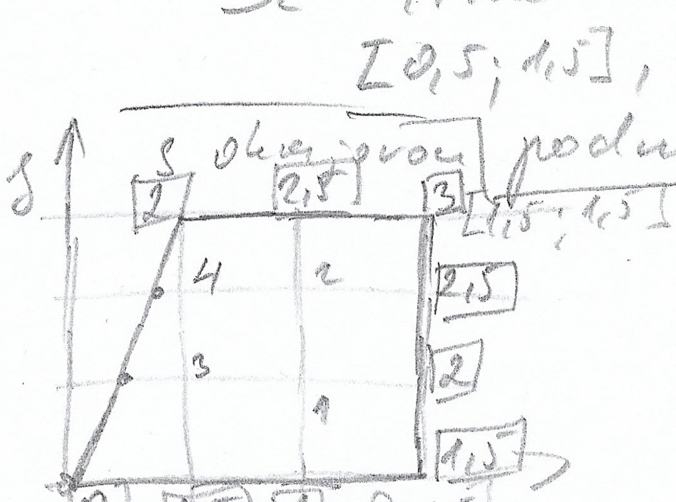
(4) vyřešíme vzniklou soustavu rovnic

Př. Sestavte soustavu rovnic, která vznikne při řešení úlohy

$-\Delta u = 2xy$ na oblasti Ω

Ω = 4úhelník s vrcholy $[0;0]$ $[1,5;0]$ $[0,5;1,5]$, $[1,5;1,5]$

s okrajovou podmínkou $u(x,y) = x+y$ na $\partial\Omega$, $h = 0,5$



4 body – 4 rovnice

1,2 → regulární

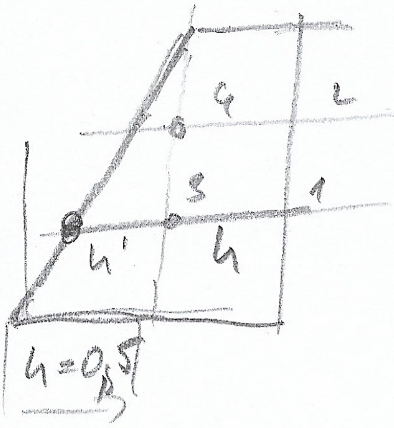
3,4 → neregulární

Rov. pro reg. uzly

① $4U_1 - U_2 - U_3 - 1 - 2 = 0{,}5^2\, 2\cdot 1\cdot 0{,}5$

② $4U_2 - U_1 - U_4 - 2{,}5 - 2{,}5 = 0{,}5^2 \cdot 1 \cdot 1$

Nereg. uzly



③ $h' = \frac{2}{3}h \Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{2}{3}$

$$\left(1+\frac{2}{3}\right)U_3 - \frac{2}{3}U_1 = \frac{2}{3}$$

$Q \rightarrow$ souřadnice $[1/6;\ \frac{1}{2}]$

$\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ 0{,}5$

$$\varphi(Q) = x + y = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1+3}{6} = \frac{2}{3}$$

④ $h' = \frac{1}{3}h \quad \frac{h'}{h} = \frac{1}{3} \quad Q = \left[\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right] \quad \varphi(Q) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)U_4 - \frac{1}{3}U_2 = \frac{5}{6}$$

Soustava rovnic

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 5{,}25 \\ 2/3 \\ 5/6 \end{pmatrix}$$

A - ODD $\rightarrow$ lze řešit Jac, G-S...