Numerická matematika A – 30.06.2016

A1.

a) Nerovnost $x^T \boldsymbol{A} x > 0$ připomíná definici pozitivně definitní matice: Je-li matice $\boldsymbol{A}$ pozitivně definitní, bude splněna pro libovolné $x \neq 0$. Matice $\boldsymbol{A}$ je symetrická. Pozitivní definitnost ověříme tedy výpočtem všech hlavních minorů

$$5 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 9 > 0, \qquad \det \boldsymbol{A} = 150 + 48 + 48 - 96 - 45 - 80 = 25 > 0.$$

Vzhledem k tomu, že všechny hlavní minory jsou kladné, je daná symetrická matice pozitivně definitní. **Nerovnost $x^T \boldsymbol{A} x > 0$ je splněna pro libovolný $x \neq 0$.** [**8b.**]

b) $\boldsymbol{A}$ je SPD. **[s ověřením, že je SPD - 8 b.]**

c) **[výpočet - 9 b.]**

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{5}\left(3 - 3x_2^{(k)} - 4x_3^{(k)}\right), \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{6}\left(1 - 3x_1^{(k+1)} - 4x_3^{(k)}\right), \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{5}\left(5 - 4x_1^{(k+1)} - 4x_2^{(k+1)}\right). \end{aligned}$$

$X^0 = (3, 1, 5)^T$, dosadíme a spočteme $X^1 = (-4, -7/6, 77/15)^T \doteq (-4, -1.166, 5.133)$.

A2.

a) Postačující podmínkou pro existenci a jedn. řešení dané úlohy jsou spojitosti funkce f a parciálních derivací f_y, $f_{y'}$, **[6 b.]**

$$f(x, y, y') = xy' - \sqrt{y},$$

$$f_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \qquad f_{y'} = x,$$

Tyto podmínky jsou splněny pro $y > 0$. Tedy $G = \{[x, y, y'] : x \in (-\infty, \infty), y \in (0, \infty), y' \in \mathbb{R}\}$.

b) Převedeme na soustavu ODR **[7 b.]**

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \end{aligned} \Rightarrow Y' = \begin{pmatrix} y_2 \\ xy_2 - \sqrt{y_1} \end{pmatrix}, \quad Y^{(0)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\boldsymbol{k}_1 = F\left(0, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \cdot 1 - \sqrt{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{Y}_{pom} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.2 \\ 0.6 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{k}_2 = F\left(0.2, \begin{pmatrix} 4.2 \\ 0.6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.2 \cdot 0.6 - \sqrt{4.2} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 0.6 \\ -1.929 \end{pmatrix}$$

$$Y^{(1)} = Y^{(0)} + h\boldsymbol{k}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.4 \begin{pmatrix} 0.6 \\ -1.929 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.24 \\ 0.228 \end{pmatrix}$$

Tedy $y(0.4) \approx 4.24$. **[12 b.]**

A3.

a)

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

pro $P_{i,j} = [x_i, y_j]: \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(P_{ij}) \approx \frac{u(x_i, y_j + h) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2}, \quad U_{i,j} \approx u(P_{i,j})$

Dosazením těchto vyjádření do vyjádření $\triangle u$ v regulárním uzlu $P_{i,j}$ dostáváme

$$h^2 \triangle u|_{P_{i,j}} \approx U_{i+1,j} + U_{i,j+1} - 4U_{i,j} + U_{i,j-1} + U_{i-1,j}$$

a tedy náhradu rovnice $-\triangle u = f$ v regulárním uzlu ($f_{i,j} = f(P_{i,j})$)

$$-U_{i+1,j} - U_{i,j+1} + 4U_{i,j} - U_{i,j-1} - U_{i-1,j} = h^2 \cdot f_{i,j}.$$

[6 b.]

c) Dle Taylorova rozvoje máme

$$z(x_i + h) = z(x_i) + h\,z'(x_i) + \frac{1}{2}h^2 z''(x_i) + \frac{1}{3!}h^3 z'''(x_i) + \mathcal{O}(h^4),$$

$$z(x_i - h) = z(x_i) - h\,z'(x_i) + \frac{1}{2}h^2 z''(x_i) - \frac{1}{3!}h^3 z'''(x_i) + \mathcal{O}(h^4),$$

Sečtením obou rovností dostáváme vztah

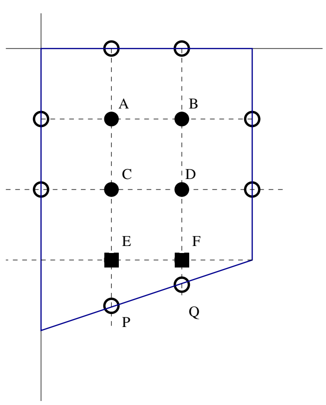
$$z(x_i + h) - 2z(x_i) + z(x_i - h) = h^2 z''(x_i) + \mathcal{O}(h^4),$$

z kterého $z''(x_i)$ již vyjádříme

$$\frac{z(x_i + h) - 2z(x_i) + z(x_i - h)}{h^2} = z''(x_i) + \mathcal{O}(h^2)$$

[7 b.]

b) **[12 b.]**



Regulární uzly (A, B, C, D):

$$\begin{aligned}
4U_A - U_B - U_C - (3-0) - (3-0.5) &= 0.5^2 \cdot (4 \cdot 0.5 + 0.5),\\
4U_B - U_A - U_D - (3-1.5) - (3-1) &= 0.5^2 \cdot (4 \cdot 1 + 0.5),\\
4U_C - U_A - U_D - U_E - (3-0) &= 0.5^2 \cdot (4 \cdot 0.5 + 1),\\
4U_D - U_B - U_C - U_F - (3-1.5) &= 0.5^2 \cdot (4 \cdot 1 + 1),
\end{aligned}$$

neregulární uzly E, F - užijeme $(1+\delta)U_N - \delta U_R = \varphi(Q)$, kde δ získáme ze souřadnic hraničních uzlů.
($P = [0.5,\ -\frac{11}{6}],\ Q = [1,\ -\frac{5}{3}]$)

$$(1 + \frac{2}{3})U_E - \frac{2}{3}U_C = 3 - 0.5$$

$$(1 + \frac{1}{3})U_F - \frac{1}{3}U_D = 3 - 1$$

A4.

a) Užijeme náhrady

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(P_i^k) \approx \frac{U_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{\tau^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(P_i^k) \approx \frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2},$$

dosadíme do vlnové rovnice

$$\frac{U_i^{k+1} - 2U_i^k + U_i^{k-1}}{\tau^2} = \frac{81}{25}\frac{U_{i-1}^k - 2U_i^k + U_{i+1}^k}{h^2} + f(P_i^k),$$

vynásobíme τ^2, označíme $\sigma^2 = \frac{81}{25}\frac{\tau^2}{h^2}$ a upravíme

$$U_i^{k+1} = \sigma^2 U_{i-1}^k + (2 - 2\sigma^2)U_i^k + \sigma^2 U_{i+1}^k - U_i^{k-1} + \tau^2 f(P_i^k).$$

[6 b.]

b) **Podmínky souhlasu** **[4b.]**

poloha:
$u(x,0) = x^2 \wedge u(1,t) = \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow$
pro $[x = 1, t = 0]$ platí $1 = 1$,
$u(x,0) = x^2 \wedge u(-1,t) = 1 \Rightarrow$
pro $[x = -1, t = 0]$ platí $1 = 1$,

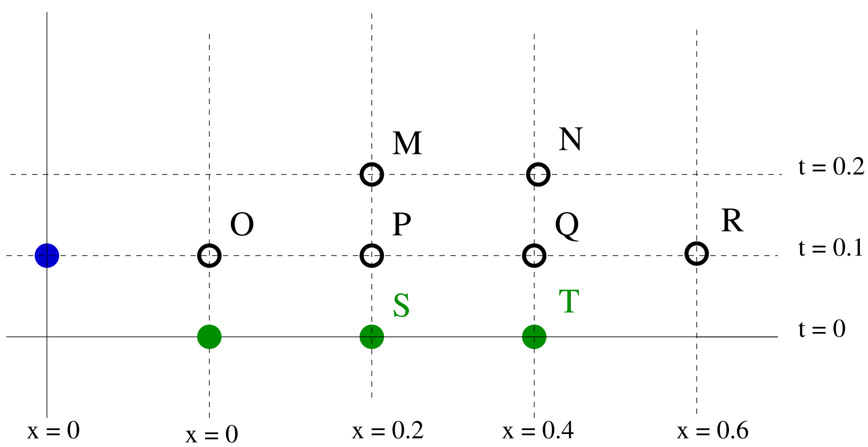
rychlost:
$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 - x^2 \wedge \frac{\partial u}{\partial t}(1,0) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} \Rightarrow$
pro $[x = 1, t = 0]$ platí $0 = 0$,
$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1 - x^2 \wedge \frac{\partial u}{\partial t}(-1,0) = 0 \Rightarrow$
pro $[x = -1, t = 0]$ platí $0 = 0$,

Podmínka stability explicitního schématu: $\sigma \leq 1$. Pro $h = 0.2$, τ a danou rovnici máme

$$\sigma^2 = \frac{81}{25} \cdot \frac{\tau^2}{0.2^2} = 81 \cdot \tau^2 \leq 1, \quad \text{tedy } \tau_{max} = \frac{1}{9}.$$

[2b.]

c) $\tau = 0.1 \leq \tau_{max} = \frac{1}{9}$, tedy $\sigma = 0.9 < 1, (\sigma^2 = 0.81)$. **[1b.]**



Počítáme přibližnou hodnotu řešení v bodech $M = [0.2; 0.2]$ a $N = [0.4, 0.2]$.

$$U_M = 0.81U_O + 0.38U_P + 0.81U_Q - 0.2^2 + 0.1^2(10 \cdot 0.1 - 0.2),$$

$$U_N = 0.81U_P + 0.38U_Q + 0.81U_R - 0.4^2 + 0.1^2(10 \cdot 0.1 - 0.4),$$

kde hodnoty v uzlech O, P, Q, R leží v první časové vrstvě , tedy

$$U_O = 0^2 + 0.1 \cdot (1 - 0^2) = 0.1$$

$$U_P = 0.2^2 + 0.1 \cdot (1 - 0.2^2) = 0.136$$

$$U_Q = 0.4^2 + 0.1 \cdot (1 - 0.4^2) = 0.244$$

$$U_R = 0.6^2 + 0.1 \cdot (1 - 0.6^2) = 0.424$$

Tedy po dosazení $U_M = 0.29832,\ U_N = 0.39232$ **[12b.]**

Numerická matematika B – 30.06.2016

B1.

a) (druhá křivka je elipsa s poloosami 1/2 a 2), $y = \frac{1}{4x}$, $\quad \frac{x^2}{\frac{1}{2}^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$. Soustava má 4 řešení.

b) $X^{(0)} = (0,\ -1)^T$

$f(x,y) = 16x^2 + y^2 - 4, \qquad g(x,y) = 4x - \frac{1}{y}, \quad f(0,\ -1) = -3, \qquad g(0,-1) = 1.$

$f_x = 32x, \qquad f_y = 2y, \qquad g_x = 4, \qquad g_y = \frac{1}{y^2}$

Soustava rovnic pro Δ_x, Δ_y v bodě $A = X^{(0)}$ je $\left(\begin{array}{cc|c} f_x(A) & f_y(A) & -f(A) \\ g_x(A) & g_y(A) & -g(A) \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{array}\right)$

Řešení této soustavy $\Delta_y = -\frac{3}{2}$, $\Delta_x = (-1 + \frac{3}{2})/(4) = \frac{1}{8}$. Tedy

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

B2.

a) $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, $f(x,Y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ \frac{x}{x-1}y_1 - \frac{5}{x-1}y_2 \end{pmatrix}$, soustava: $Y' = \begin{pmatrix} y_2 \\ \frac{x}{x-1}y_1 - \frac{5}{x-1}y_2 \end{pmatrix}$, $Y(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) *Volíme krok $h = 0.1$ a spočteme přibližnou hodnotu řešení v bodě $x = 2.2$ Eulerovou metodou*

$$x_0 = 2, \qquad Y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 2.1, \qquad Y^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.1 f(2, Y^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = 2.2, \qquad Y^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \end{pmatrix} + 0.1 f(2.1, Y^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 0.2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.02 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

c) Collatzova metoda, *krok $h = 0.2$*

$$x_0 = 2, \qquad Y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 2.2, \qquad \boldsymbol{k}_1 = f(2, Y^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad Y_{pom} = Y^{(0)} + 0.1\boldsymbol{k}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}_2 = f(2.1, Y_{pom}) = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Y^{(1)} = Y^{(0)} + 0.2\boldsymbol{k}_2 = \begin{pmatrix} 1.04 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

B3.

a) Postačující podmínky pro ex. a jedn. řešení: V dané úloze $p(x) = x - 1$, (a také $p'(x) = 1$), $q(x) = x$ a $f(x) = |3 - x|$ spojité na $I = \langle 2, 4\rangle$. A platí $p(x) > 0$ a $q(x) \geq 0$ na I.

b) Zapíšeme síťové rovnice pro krok $h = 0.5$ v uzlech $x_1 = 2.5$, $x_2 = 3$ a $x_3 = 3.5$

$$\begin{aligned} -1.25 \cdot 1 + (1.25 + 1.75 + 0.25^2 \cdot 2.5)\, y_1 - 1.75\, y_2 &= 0.5^2 \cdot (3 - 2.5), \\ -1.75\, y_1 + (1.75 + 2.25 + 0.25^2 \cdot 3)\, y_2 - 2.25\, y_3 &= 0.5^2 \cdot (3 - 3), \\ -2.25\, y_2 + (2.25 + 2.75 + 0.25^2 \cdot 3.5)\, y_3 - 2.75 \cdot 0 &= 0.5^2 \cdot (3.5 - 3), \end{aligned}$$

kde jsme hodnoty $y_0 = y(2) = 1$ a $y_4 = y(4) = 0$ z okrajových podmínek. Upravíme :

$$\begin{pmatrix} 3.625 & -1.75 & 0 \\ -1.75 & 4.75 & -2.25 \\ 0 & -2.25 & 5.875 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.375 \\ 0 \\ 0.125 \end{pmatrix}$$

c) Matice soustavy je ODD (řádky i sloupce), také proto, že $q(x_i) \neq 0,\ i = 1, 2, 3$.

B4.

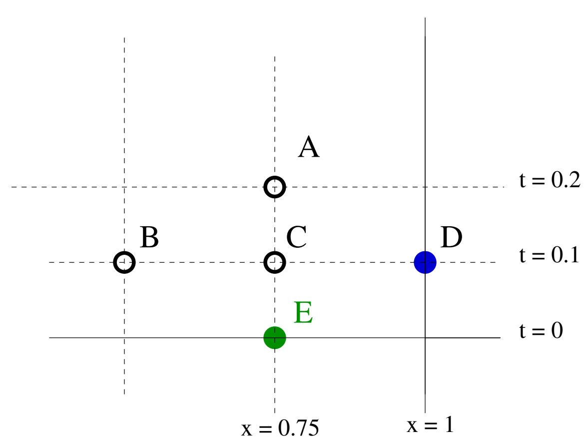
- *Podmínky souhlasu:*

$$\begin{array}{lll} & \underline{\textbf{Poloha}}\ (u), & \underline{\textbf{Rychlost}}\ (u_t) \\ \text{Bod } [0,0]: & x + 1|_{x=0} = \mathbf{1} = \frac{1}{1+t}|_{t=0}, & \frac{x}{2} - 1|_{x=0} = \mathbf{-1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+t}\right)|_{t=0} = -(1+t)^{-2}|_{t=0} \\ \text{Bod } [1,0]: & x + 1|_{x=2} = \mathbf{3} = 3|_{t=0}, & \frac{x}{2} - 1|_{x=2} = \mathbf{0} = \frac{d}{dt}(3)|_{t=0} \end{array}$$

b) *Podmínka stability pro $h = 0.5$ a $\tau = 0.1$:* $(\sigma \leq 1)$

$$\sigma^2 = \frac{8\tau^2}{h^2} = \frac{0.08}{0.25^2} = 0.32 \leq 1, \quad \text{tj. } \sigma \leq 1$$

c) *x-ové souřadnice na obr. jsou jiné!*



$$U_E = u(1.5, 0) = 2.5, \qquad U_D = 3$$

$$U_B = (1 + 1) + 0.1 \cdot (0.5 - 1) = 2 - 0.05 = 1.95$$

$$U_C = (1.5 + 1) + 0.1 \cdot (0.75 - 1) = 2.5 - 0.025 = 2.475$$

$$U_A = 0.32U_B + (2 - 2 \cdot 0.32)U_C + 0.32U_D - U_E + 0.01\left(\frac{1.5}{1 + 10 \cdot 0.1}\right) = 2.4575$$