Numerická matematika A – 30.06.2016

A1. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) Určete všechny vektory $x \in \mathbb{R}^3$, pro které je splněna nerovnost $x^T \boldsymbol{A} x > 0$ (pro danou matici $\boldsymbol{A}$). Zdůvodněte!

b) Rozhodněte, zda je pro danou matici $\boldsymbol{A}$ Gaussova-Seidelova iterační metoda konvergentní!

c) Volte $X^{(0)} = \boldsymbol{b}$ a proveďte výpočet $X^{(1)}$ Gaussovou-Seidelovou iterační metodou.

A2. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' = x\,y' - \sqrt{y}, \quad y(0) = 4, \ y'(0) = 1$$

a) Zapište, v jaké oblasti jsou splněny postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení dané Cauchyovy úlohy. Uveďte podmínky, jejichž platnost ověřujete.

b) Danou diferenciální rovnici převeďte na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu.

c) Volte $h = 0.4$ a určete přibližnou hodnotu $y(0.4)$ užitím Collatzovy metody.

A3. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\triangle u = 4x - y$$

v oblasti $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ x \leq 1.5, \ y \leq 0, \ 3y - x + 6 \geq 0\}$.
Na hranici oblasti $\partial\Omega$ pro $u(x, y)$ platí okrajová podmínka: $u(x, y) = 3 - x$.

a) Pomocí parciálních derivací rozepište symbol $\triangle u$ uvedený v zadané úloze. Rozepište, jak se v regulárním uzlu $P_{i,j} = [x_i, y_j]$ nahradí tyto parciální derivace, a odvoďte rovnici pro náhradu dané rovnice metodou sítí v regulárním uzlu $P_{i,j}$.

b) Volte krok $h = 0.5$ a síť tak, aby bod $[0, 0]$ byl uzlem sítě. Sestavte síťové rovnice. V neregulárních uzlech užijte lineární interpolaci.

c) Užitím Taylorova rozvoje pro funkci $z = z(x), z \in \mathcal{C}^4(I)$ v bodě x_i vyjádřete hodnoty funkce $z(x_i \pm h)$. Odvoďte náhradu $z''(x_i)$ pomocí hodnot $z(x_i + h)$, $z(x)$ a $z(x_i - h)$ a zapište jaké chyby se dopustíte.

A4. Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{81}{25} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10t - x,$$

kde počáteční a okrajové podmínky jsou dány $u(x, 0) = x^2$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1 - x^2$, $u(-1, t) = 1$, $u(1, t) = \frac{1}{1+t^2}$.

a) Zapište, jak se nahradí derivace $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ v bodě P_i^k při řešení dané rovnice explicitním schématem. Toto schéma odvoďte.

b) Ověřte, zda jsou splněny podmínky souhlasu. Volte krok $h = 0.2$ a určete maximální $\tau > 0$ tak, aby explicitní schéma bylo stabilní.

c) Ověřte, zda pro volbu $h = 0.2$ a $\tau = 0.1$ bude explicitní schéma stabilní. Určete přibližnou hodnotu řešení v bodech $M = [0.2, 0.2]$ a $N = [0.4, 0.2]$ použitím explicitního schématu.

Numerická matematika B – 30.06.2016

B1. Je dána soustava nelineárních rovnic

$$16x^2 + y^2 = 4, \qquad 4x - \frac{1}{y} = 0.$$

a) Určete graficky přibližnou polohu všech řešení soustavy.

b) Zvolte počáteční aproximaci $X^{(0)} = (0, -1)^T$ a určete $X^{(1)}$ Newtonovou metodou.

B2. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' = \frac{x}{x-1}y - \frac{5}{x-1}y', \qquad y(2) = 1, \qquad y'(2) = 0$$

a) Zadanou diferenciální rovnici převeďte na soustavu rovnic $\mathrm{Y}' = F(x, \mathrm{Y})$.

b) Volte krok $h = 0.1$ a určete přibližné řešení Cauchyovy úlohy v bodě $x = 2.2$ Eulerovou explicitní metodou.

c) Volte krok $h = 0.2$ a určete přibližné řešení Cauchyovy úlohy v bodě $x = 2.2$ Collatzovou metodou.

B3. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro rovnici v samoadjungovaném tvaru

$$-\left((x-1)y'\right)' + xy = |3 - x|, \quad y(2) = 1,\ y(4) = 0$$

a) Zapište podmínky, které jsou postačující pro existenci a jednoznačnost řešení obecné okrajové úlohy pro rovnici v samoadjungovaném tvaru. Ověřte, zda jsou splněny pro zadanou úlohu.

b) Zapište síťové rovnice pro krok $h = 0.5$.

c) Ověřte, zda matice soustavy z b) je ostře diagonálně dominantní.

B4. Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 8\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{x}{1+10t},$$

$$u(x,0) = x + 1,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{x}{2} - 1 \text{ pro } x \in \langle 0, 2\rangle \text{ a } \ u(0,t) = \frac{1}{1+t},\ u(2,t) = 3 \text{ pro } t \geq 0.$$

a) Zapište podmínky souhlasu a ověřte, zda pro danou úlohu jsou splněny.

b) Zapište podmínku stability explicitního schématu a ověřte, zda je pro volbu $h = 0.5$ a $\tau = 0.1$ splněna.

c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[1.5, 0.2]$ užitím explicitního schématu. Volte krok h a τ dle b).