NMA Varianta **A**

1. Je dána soustava lineárních rovnic $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zapište obecnou matici $\boldsymbol{A}$ jako součet diagonální matice $\boldsymbol{D}$, ostře dolní trojúhelníkové matice $\boldsymbol{L}$ a ostře horní trojúhelníkové matice $\boldsymbol{P}$, tzn. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{P}$. Zapište Jacobiho iterační metodu ve tvaru prosté iterační metody $x^{k+1} = \boldsymbol{U}_J x^k + v_J$ a pomocí $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{P}$ a $\vec{b}$ vyjádřete matici $\boldsymbol{U}_J$ a vektor v_J.

b) Dokažte, že platí $det(\boldsymbol{U}_J - \lambda E) = 0 \Rightarrow det(\boldsymbol{L} + \lambda \boldsymbol{D} + \boldsymbol{P}) = 0$.

c) Ukažte, že danou soustavu rovnic lze řešit Jacobiho iterační metodou.

d) Zvolte $x^{(0)} = \vec{b}$ a spočítejte první iteraci pomocí Jacobiho metody.

2. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' - 4xy' + 4y = 1, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

a) Danou rovnici převeďte na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu.

b) Pomocí zpětné diference odvoďte implicitní Eulerovu metodu pro numerické řešení obyčejné diferenciální rovnice $z'(x) = g(x, z)$.

c) Volte krok $h = 0.5$ a určete přibližnou hodnotu řešení y(0.5) pomocí implicitní Eulerovy metody.

3. Je dána Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\Delta u = 4(x + y)$$

na oblasti $\Omega = \{[x, y] \in E_2 : x > 0,\ y > 0,\ 25x^2 + 64y^2 < 100\}$, kde na hranici je předepsána okrajová podmínka $u(x, y) = 2x + 1$.

a) Nakreslete zadanou oblast a síť s krokem $h = 0.5$. Dále napište počet reguárních a neregulárních uzlů sítě a vyznačte je v obrázku oblasti.

b) Užitím Taylorova rozvoje pro $u(x, y) \in C^4(D), D \subset E_2$, v bodě $[x_i, y_j]$ vyjádřete hodnoty v bodech $[x_i, y_j \pm h]$. Odvoďte náhradu $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j)$ pomocí hodnot $u(x_i, y_j + h)$, $u(x_i, y_j - h)$, $u(x_i, y_j)$ a zapište, jaké chyby se dopustíte.

c) Sestavte síťové rovnice v uzlech ležících na přímce $y = 0.5$, které vzniknou diskretizací dané úlohy pomocí metody sítí s krokem $h = 0.5$. V neregulárních uzlech použijte lineární iterpolaci.

4. Je dána smíšená úloha pro vlnovou rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 16t,$$

počáteční podmínky $u(x, 0) = x$ a $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 2x$, $x \in < 0, 2 >$
a okrajové podmínky $u(0, t) = 0$ a $u(2, t) = 4t + 2$, $t \geq 0$.

a) Odvoďte explicitní schéma pro řešení dané vlnové rovnice pomocí metody sítí. Stručně vysvětlete význam všech užitých symbolů.

b) Volte prostorový krok $h = 0.5$, maximální časový krok τ tak, aby explicitní schéma bylo stabilní a bod $A = [1, 0.5]$ byl bodem sítě.

c) Vypočítejte aproximaci řešení $u(A)$ pomocí explicitní metody s kroky h a τ z bodu b).

NMA Varianta **B**

1. Je dána soustava lineárních rovnic $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Ukažte, že daná soustava rovnic má právě jedno řešení.

b) Ukažte, že danou soustavu rovnic lze řešit Gaussovou-Seidelovou iterační metodou.

c) Zvolte $x^{(0)} = \vec{0}$ a spočítejte první iteraci pomocí Gaussovy-Seidelovy metody.

d) Spočítejte sloupcovou normu $||\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}||_1$.

2. Je dána Cauchyova úloha

$$Y' = AY + B(x), \qquad Y(0) = Y_0,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zapište, v jaké oblasti jsou splněny postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost řešení dané Cauchyovy úlohy. Uveďte všechny podmínky, které ověřujete!

b) Zvolte krok $h = 0.5$ a určete přibližnou hodnotu řešení $Y(1)$ pomocí explicitní Eulerovy metody.

3. Je dána Dirichletova úloha pro obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu v samoadjungovaném tvaru

$$-(2y')' + (x-1)y = 4x, \qquad y(2) = 1, \qquad y(4) = -1.$$

a) Ověřte, zda jsou splněny postačující podmínky existence a jednoznačnosti řešení dané úlohy.

b) Sestavte soustavu rovnic, která vznikne diskretizací dané úlohy pomocí metody sítí s krokem $h = 0.5$.

c) Zapište vzniklou soustavu rovnic v maticovém tvaru a rozhodněte, zda ji lze řešit Jacobiho iterační metodou.

4. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xt,$$

s počáteční podmínkou $u(x,0) = x + 1$, $x \in < 0, 2 >$
a okrajovými podmínkami $u(0,t) = 1$ a $u(2,t) = t + 3$, $t \geq 0$.

a) Ověřte, zda jsou splněny podmínky souhlasu. Uveďte všechny podmínky, které ověřujete!

b) Volte prostorový krok $h = 0.5$, časový krok $\tau = 0.25$ a ověřte, zda je splněna podmínka stability pro explicitní metodu.

c) Vypočítejte přibližnou hodnotu řešení $u(1, 0.25)$ pomocí explicitní metody s kroky h a τ z bodu b).