Numerická matematika A – 29.5.2018

A1. Je dána soustava nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 1 &= 0 \\ \operatorname{arctg} x - y &= 0 \end{aligned}$$

a) Určete graficky přibližnou polohu kořenů soustavy.

b) Pro obecnou soustavu nelineárních rovnic $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$ odvoďte soustavu rovnic pro výpočet nového přiblížení $X^{m+1} = [x_{m+1}, y_{m+1}]$ Newtonovou iterační metodou, znáte-li $X^m = [x_m, y_m]$.

c) Zvolte $X^{(0)} = [0,\ 2]$ a Newtonovou metodou spočtěte $X^{(1)}$.

A2. Je dána Cauchyova úloha pro soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1^2 + 2y_2 + \sqrt{x}, & y_1(1) &= 2 \\ y_2' &= \sqrt{y_1 y_2}, & y_2(1) &= 2 \end{aligned}$$

a) Určete oblast existence a jednoznačnosti řešení dané úlohy.
Uveďte postačující podmínky, které jste ověřili.

b) Volte $h = 0.1$ a určete hodnotu aproximace řešení $Y(1.2) = \begin{pmatrix} y_1(1.2) \\ y_2(1.2) \end{pmatrix}$ užitím Eulerovy metody.

c) Volte $h = 0.2$ a určete hodnotu aproximace řešení $Y(1.2)$ užitím Collatzovy metody.

d) Vysvětlete pojem jednokroková metoda pro obyčejnou diferenciální rovnici $y' = f(x,y)$.
Zapište vzorec pro výpočet aproximace $y(x_{n+1})$. Vysvětlete užité značení. Uveďte aspoň jeden příklad jednokrokové metody druhého řády přesnosti (uveďte příklad přírůstkové funkce).

A3. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + tx \quad \text{v oblasti} \quad \Omega = \{[x,t] : x \in (0,\ 2),\ t > 0\},$$

$$u(x,0) = \frac{6}{1+x} \text{ pro } x \in \langle 0,\ 2\rangle, \qquad u(0,t) = \frac{12}{2+t}, \quad u(2,t) = 3 - \frac{1}{1+t} \text{ pro } t \geq 0.$$

a) Ověřte splnění podmínek souhlasu pro danou úlohu.

b) Uveďte, jak se v dané rovnici nahradí příslušné parciální derivace v bodě $P_i^{k+1} = [x_i, t_{k+1}]$ pro implicitní schéma výpočtu hodnot aproximací na $(k+1)$-ní časové vrstvě z hodnot na $k-$té časové vrstvě. Implicitní schéma odvoďte. Stručně vysvětlete význam všech symbolů.

c) Volte prostorový krok $h = \frac{1}{2}$ a časový krok $\tau = 1$ a sestavte rovnice pro řešení úlohy v 1. časové vrstvě použitím implicitního schématu. Uveďte, zda je splněna podmínka stability schématu.

A4. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4x - y \quad \text{v oblasti } \Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in (0,\ 1.5),\ y < 0,\ 3y - x + 6 > 0\},$$

na hranici oblasti $\partial\Omega$ pro $u(x,y)$ platí okrajová podmínka: $u(x,y) = 3 - x$.

a) Rozepište, jak se v regulárním uzlu $P_{i,j} = [x_i, y_j]$ nahradí parciální derivace v zadané úloze, a odvoďte náhradu dané rovnice metodou sítí v regulárním uzlu $P_{i,j}$. Vysvětlete všechny použité symboly.

b) Volte krok $h = 0.5$ a síť tak, aby bod $[0,0]$ byl uzlem sítě. Sestavte síťové rovnice.
V neregulárních uzlech užijte lineární interpolaci.

c) Užitím Taylorova rozvoje funkce $z = z(x), z \in \mathcal{C}^4(I)$, se středem v bodě x_i vyjádřete hodnoty funkce $z(x_i \pm h)$. Odvoďte náhradu $z''(x_i)$ pomocí hodnot $z(x_i + h)$, $z(x)$ a $z(x_i - h)$ a zapište, jaké chyby se dopustíte.

Numerická matematika A – 29.5.2018

A1. Je dána soustava nelineárních rovnic

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 1 &= 0 \\ \operatorname{arctg} x - y &= 0 \end{aligned}$$

a) Určete graficky přibližnou polohu kořenů soustavy.

b) Pro obecnou soustavu nelineárních rovnic $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$ odvoďte soustavu rovnic pro výpočet nového přiblížení $X^{m+1} = [x_{m+1}, y_{m+1}]$ Newtonovou iterační metodou, znáte-li $X^m = [x_m, y_m]$.

c) Zvolte $X^{(0)} = [0,\ 2]$ a Newtonovou metodou spočtěte $X^{(1)}$.

A2. Je dána Cauchyova úloha pro soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1^2 + 2y_2 + \sqrt{x}, & y_1(1) = 2 \\ y_2' &= \sqrt{y_1 y_2}, & y_2(1) = 2 \end{aligned}$$

a) Určete oblast existence a jednoznačnosti řešení dané úlohy.
Uveďte postačující podmínky, které jste ověřili.

b) Volte $h = 0.1$ a určete hodnotu aproximace řešení $Y(1.2) = \begin{pmatrix} y_1(1.2) \\ y_2(1.2) \end{pmatrix}$ užitím Eulerovy metody.

c) Volte $h = 0.2$ a určete hodnotu aproximace řešení $Y(1.2)$ užitím Collatzovy metody.

d) Vysvětlete pojem jednokroková metoda pro obyčejnou diferenciální rovnici $y' = f(x,y)$.
Zapište vzorec pro výpočet aproximace $y(x_{n+1})$. Vysvětlete užité značení. Uveďte aspoň jeden příklad jednokrokové metody druhého řády přesnosti (uveďte příklad přírůstkové funkce).

A3. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + tx \quad \text{v oblasti} \quad \Omega = \{[x,t] : x \in (0,\ 2),\ t > 0\},$$

$$u(x,0) = \frac{6}{1+x} \text{ pro } x \in \langle 0,\ 2\rangle, \qquad u(0,t) = \frac{12}{2+t}, \qquad u(2,t) = 3 - \frac{1}{1+t} \text{ pro } t \geq 0.$$

a) Ověřte splnění podmínek souhlasu pro danou úlohu.

b) Uveďte, jak se v dané rovnici nahradí příslušné parciální derivace v bodě $P_i^{k+1} = [x_i, t_{k+1}]$ pro implicitní schéma výpočtu hodnot aproximací na $(k+1)$-ní časové vrstvě z hodnot na $k-$té časové vrstvě. Implicitní schéma odvoďte. Stručně vysvětlete význam všech symbolů.

c) Volte prostorový krok $h = \frac{1}{2}$ a časový krok $\tau = 1$ a sestavte rovnice pro řešení úlohy v 1. časové vrstvě použitím implicitního schématu. Uveďte, zda je splněna podmínka stability schématu.

A4. Je dána Dirichletova okrajová úloha pro Poissonovu rovnici

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4x - y \quad \text{v oblasti } \Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x \in (0,\ 1.5),\ y < 0,\ 3y - x + 6 > 0\},$$

na hranici oblasti $\partial\Omega$ pro $u(x,y)$ platí okrajová podmínka: $u(x,y) = 3 - x$.

a) Rozepište, jak se v regulárním uzlu $P_{i,j} = [x_i, y_j]$ nahradí parciální derivace v zadané úloze, a odvoďte náhradu dané rovnice metodou sítí v regulárním uzlu $P_{i,j}$. Vysvětlete všechny použité symboly.

b) Volte krok $h = 0.5$ a síť tak, aby bod $[0,0]$ byl uzlem sítě. Sestavte síťové rovnice.
V neregulárních uzlech užijte lineární interpolaci.

c) Užitím Taylorova rozvoje funkce $z = z(x), z \in \mathcal{C}^4(I)$, se středem v bodě x_i vyjádřete hodnoty funkce $z(x_i \pm h)$. Odvoďte náhradu $z''(x_i)$ pomocí hodnot $z(x_i + h)$, $z(x)$ a $z(x_i - h)$ a zapište, jaké chyby se dopustíte.

Numerická matematika B – 29.5.2018

B1. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

a) Rozhodněte, zda pro danou soustavu rovnic konverguje Gaussova-Seidelova iterační metoda.

b) Rozhodněte, zda je pro danou soustavu rovnic Jacobiho iterační metoda konvergentní.

c) Určete přiblížení $X^{(1)}$ užitím Jacobiho iterační metody při volbě $X^{(0)} = B$.

B2. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' + y' - y = x, \qquad y(2) = 1, \qquad y'(2) = 3$$

a) Danou diferenciální rovnici převeďte na soustavu diferenciálních rovnic.

b) Volte krok $h = 0.4$. Eulerovou explicitní metodou určete přibližnou hodnotu řešení $y(2.4)$.

c) Volte krok $h = 0.4$. Collatzovou metodou určete přibližnou hodnotu $y'(2.4)$.

B3. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4x \quad \text{v oblasti} \quad \Omega = \{[x,t] : x \in (1,2),\ t > 0\},$$

$$u(x,0) = 1 + x \text{ pro } x \in \langle 1, 2\rangle \text{ a } u(1,t) = \frac{4}{2+100t},\ u(2,t) = \frac{2}{1+t} + 1 \text{ pro } t \geq 0.$$

a) Ověřte, zda jsou splněny podmínky souhlasu. Tyto podmínky uveďte.

b) Zapište vzorec pro explicitní schéma a podmínku jeho stability.
Ověřte, zda je pro volbu $h = 0.25$ a $\tau = 0.01$ splněna.

c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[1.25, 0.02]$ užitím explicitního schématu.
Volte krok h a τ dle b).

B4. Je dána okrajová úloha pro Poissonovu rovnici, tedy

$$-\triangle u = x^2 - y^2$$

v oblasti tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0,\ 0], [3,\ 0], [3,\ -4], [0,\ -3]$,
kde na hranici je předepsána Dirichletova okrajová podmínka $u(x,y) = 2x$.

a) Je dán krok $h = 1$. Nakreslete oblast a síť v této oblasti.
Vyznačte regulární, neregulární a hraniční uzly.

b) Pro dané h sestavte síťové rovnice v regulárních uzlech.

c) Sestavte síťové rovnice v jednom z neregulárních uzlů. Užijte lineární interpolaci.

Numerická matematika B – 29.5.2018

B1. Je dána soustava lineárních rovnic tvaru $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

a) Rozhodněte, zda pro danou soustavu rovnic konverguje Gaussova-Seidelova iterační metoda.

b) Rozhodněte, zda je pro danou soustavu rovnic Jacobiho iterační metoda konvergentní.

c) Určete přiblížení $X^{(1)}$ užitím Jacobiho iterační metody při volbě $X^{(0)} = B$.

B2. Je dána Cauchyova úloha

$$y'' + y' - y = x, \qquad y(2) = 1, \qquad y'(2) = 3$$

a) Danou diferenciální rovnici převeďte na soustavu diferenciálních rovnic.

b) Volte krok $h = 0.4$. Eulerovou explicitní metodou určete přibližnou hodnotu řešení $y(2.4)$.

c) Volte krok $h = 0.4$. Collatzovou metodou určete přibližnou hodnotu $y'(2.4)$.

B3. Je dána smíšená úloha pro rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4x \quad \text{v oblasti} \quad \Omega = \{[x,t] : x \in (1,2),\ t > 0\},$$

$$u(x,0) = 1 + x \text{ pro } x \in \langle 1,2 \rangle \text{ a } u(1,t) = \frac{4}{2+100t},\ u(2,t) = \frac{2}{1+t} + 1 \text{ pro } t \geq 0.$$

a) Ověřte, zda jsou splněny podmínky souhlasu. Tyto podmínky uveďte.

b) Zapište vzorec pro explicitní schéma a podmínku jeho stability.
Ověřte, zda je pro volbu $h = 0.25$ a $\tau = 0.01$ splněna.

c) Určete přibližnou hodnotu řešení v bodě $A[1.25, 0.02]$ užitím explicitního schématu.
Volte krok h a τ dle b).

B4. Je dána okrajová úloha pro Poissonovu rovnici, tedy

$$-\triangle u = x^2 - y^2$$

v oblasti tvořené čtyřúhelníkem s vrcholy $[0,\ 0], [3,\ 0], [3,\ -4], [0,\ -3]$,
kde na hranici je předepsána Dirichletova okrajová podmínka $u(x,y) = 2x$.

a) Je dán krok $h = 1$. Nakreslete oblast a síť v této oblasti.
Vyznačte regulární, neregulární a hraniční uzly.

b) Pro dané h sestavte síťové rovnice v regulárních uzlech.

c) Sestavte síťové rovnice v jednom z neregulárních uzlů. Užijte lineární interpolaci.